Corrigé
Application de la dérivation

Étudier les variations d'une fonction

Exercice 1.

Étudier les variations des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$ et dresser leur tableau de variations.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 1$
2. $f(x) = -2x^3 + 6x + 1$
3. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$
4. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$

1. $f'(x) = 2x - 6$: décroissante sur $]-\infty\,;\,3]$, croissante ensuite ; minimum $f(3) = -8$.
2. $f'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x-1)(x+1)$: décroissante, croissante sur $[-1\,;\,1]$, décroissante ; $f(-1) = -3$, $f(1) = 5$.
3. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x+4)(x-2)$: croissante, décroissante sur $[-4\,;\,2]$, croissante ; $f(-4) = 80$, $f(2) = -28$.
4. $f'(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$: décroissante sur $]-\infty\,;\,-2]$, croissante sur $[-2\,;\,0]$, décroissante sur $[0\,;\,2]$, croissante ensuite ; $f(\pm 2) = -4$, $f(0) = 0$.

Exercice 2.

Étudier les variations de chaque fonction sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ sur $]-1\,;\,+\infty[$.
2. $g(x) = x + \dfrac{9}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. $h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $k(x) = x - 2\sqrt{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$: croissante.
2. $g'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$: décroissante sur $]0\,;\,3]$, croissante ensuite, minimum $g(3) = 6$.

3. $h'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$: décroissante sur $]-\infty\ ;\ -1]$, croissante sur $[-1\ ;\ 1]$, décroissante ensuite ; $h(-1) = -\frac{1}{2}$, $h(1) = \frac{1}{2}$.

4. $k'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$: décroissante sur $]0\ ;\ 1]$, croissante ensuite, minimum $k(1) = -1$.

Exercice 3.

On donne le tableau de signes de la dérivée f' d'une fonction f définie sur $[-4\ ;\ 5]$, avec $f(-4) = 1$, $f(-1) = 4$, $f(2) = -3$, $f(5) = 0$.

x	-4		-1		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ admet-elle ?

1. f croît de 1 à 4 sur $[-4\ ;\ -1]$, décroît de 4 à -3 sur $[-1\ ;\ 2]$, croît de -3 à 0 sur $[2\ ;\ 5]$.
2. Une solution dans $]-1\ ;\ 2[$ et la solution $x = 5$: deux solutions.

Déterminer des extremums

Exercice 4.

Déterminer les extremums locaux de chaque fonction.

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$
2. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[0\ ;\ 3]$
3. $f(x) = x^3$
4. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$

1. $f'(x) = 6(x-2)(x+1)$: maximum local $f(-1) = 11$, minimum local $f(2) = -16$.
2. $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$: minimum $f(1) = -1$; aux bornes $f(0) = 1$, $f(3) = 19$ (maximum sur $[0\ ;\ 3]$).
3. $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$: pas d'extremum (f' s'annule sans changer de signe).
4. $f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2 = 3(x-1)(x+1)$: maximum local $f(-1) = 4$, minimum local $f(1) = 0$.

Exercice 5.

Montrer que pour tout réel $x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$. Puis que pour tout réel x, $x^4 - 4x + 3 \geqslant 0$.

$g(x) = x + \frac{1}{x}$, $g'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$: minimum $g(1) = 2$.
$h(x) = x^4 - 4x + 3$, $h'(x) = 4(x^3 - 1)$, du signe de $x - 1$: minimum $h(1) = 0$.

Résoudre un problème d'optimisation

Exercice 6.

Un rectangle a un périmètre de 20 cm. On note x sa largeur.

1. Exprimer son aire $A(x)$ en fonction de x.
2. Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ? Quelle est la nature du rectangle ?

1. $A(x) = x(10 - x)$ pour $x \in [0\,;\,10]$.
2. $A'(x) = 10 - 2x$: maximum pour $x = 5$; c'est un carré, d'aire 25 cm^2.

Exercice 7.

Une entreprise produit q tonnes d'un produit ($0 \leqslant q \leqslant 10$). Le coût total est $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 20$ (en milliers d'euros) et chaque tonne est vendue 36 milliers d'euros.

1. Exprimer le bénéfice $B(q)$.
2. Étudier les variations de B et en déduire la production qui maximise le bénéfice.

1. $B(q) = 36q - C(q) = -q^3 + 12q^2 - 24q - 20$.
2. $B'(q) = -3q^2 + 24q - 24 = -3(q^2 - 8q + 8)$, racines $4 \pm 2\sqrt{2}$ ($\approx 1,17$ et $6,83$). B décroît, croît sur $[1,17\,;\,6,83]$, puis décroît. Maximum pour $q = 4+2\sqrt{2} \approx 6,83$ t : $B \approx 57,25$ milliers d'euros.

Exercice 8.

On souhaite fabriquer une boîte de conserve cylindrique de volume 1 L (1 000 cm^3) en utilisant le moins de métal possible.

1. Exprimer la hauteur h en fonction du rayon r, puis montrer que l'aire totale vaut $S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2\,000}{r}$.
2. Déterminer le rayon qui minimise S (arrondir au mm).

1. $\pi r^2 h = 1\,000$ donc $h = \frac{1000}{\pi r^2}$; $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$.
2. $S'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2}$, nul pour $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,4$ cm (alors $h \approx 10,8$ cm $= 2r$).