Épreuve anticipée de mathématiques
Première spécialité
Probabilités

Exercice 1.

Une société de transport possède deux types de véhicules : des fourgons et des camions. Certains véhicules sont en bon état, les autres sont en mauvais état.
On sait que :

- 60 % des véhicules sont des fourgons, et parmi eux, 50 % sont en bon état ;
- 40 % des véhicules sont des camions.

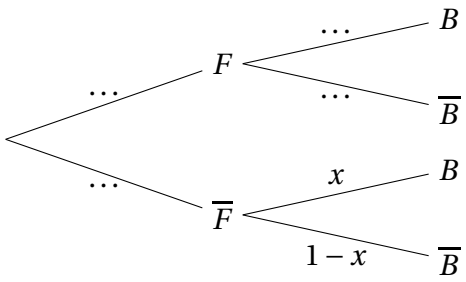
On sait par ailleurs que 66 % de l'ensemble des véhicules sont en bon état.
Un véhicule est choisi au hasard. On considère les évènements :

F : « le véhicule est un fourgon » ;

B : « le véhicule est en bon état ».

La probabilité de l'évènement B sachant que l'évènement $\overline{F}$ est réalisé est notée x, où x est un réel.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Montrer que la probabilité que le véhicule choisi soit un fourgon en bon état est égale à 0,3.

3. On sait que le véhicule choisi est en bon état. Déterminer la probabilité que ce soit un fourgon. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

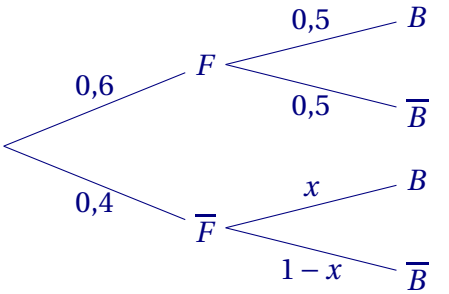
4. Montrer que le réel x est solution de l'équation $0,4x + 0,3 = 0,66$.

5. Résoudre l'équation et interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Corrigé

On note F l'évènement « le véhicule est un fourgon » et B l'évènement « le véhicule est en bon état ».
On a $P(F) = 0,6$, $P_F(B) = 0,5$ et $P(B) = 0,66$. On note $x = P_{\overline{F}}(B)$.

1. La somme des probabilités issues d'un même nœud vaut 1 :
$P\left(\overline{F}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$ et $P_F\left(\overline{B}\right) = 1 - 0,5 = 0,5$.



2. La probabilité que le véhicule choisi soit un fourgon en bon état est $P(F \cap B)$.
$P(F \cap B) = P(F) \times P_F(B) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$.
La probabilité que le véhicule choisi soit un fourgon en bon état est égale à $0,3$.

3. On cherche la probabilité conditionnelle $P_B(F)$:

$$P_B(F) = \frac{P(F \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,66} = \frac{30}{66} = \frac{5}{11}.$$

Sachant que le véhicule choisi est en bon état, la probabilité que ce soit un fourgon est égale à $\frac{5}{11}$.

4. F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(F \cap B) + P\left(\overline{F} \cap B\right) = P(F \cap B) + P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(B)$$

donc $0,66 = 0,3 + 0,4x$, c'est-à-dire $0,4x + 0,3 = 0,66$.

5. $0,4x + 0,3 = 0,66 \iff 0,4x = 0,36 \iff x = \frac{0,36}{0,4} = \frac{36}{40} = 0,9$.
Sachant que le véhicule choisi n'est pas un fourgon (c'est donc un camion), la probabilité qu'il soit en bon état est égale à $0,9$.

Exercice 2.

Un médecin reçoit de nombreux patients. On dispose des informations suivantes :

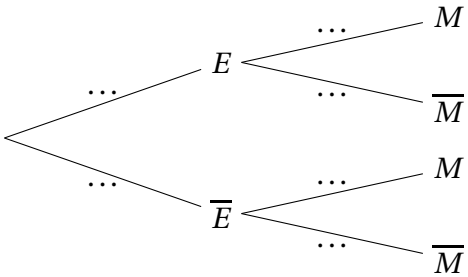
- 70 % des patients sont des enfants, les autres sont des adultes ;
- lorsque le patient est un enfant, le médecin prescrit des médicaments dans 20 % des cas ;
- lorsque le patient est un adulte, le médecin prescrit des médicaments dans 40 % des cas.

On choisit au hasard un patient reçu par ce médecin.
On considère les évènements suivants :

E : « le patient est un enfant » ;

M : « le médecin prescrit des médicaments ».

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Calculer la probabilité $P\left(\overline{E} \cap M\right)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Montrer que la probabilité que le médecin prescrive des médicaments au patient est égale à $0,26$.

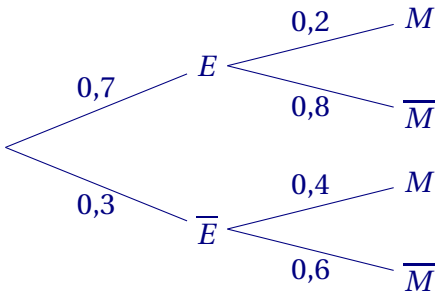
4. Les évènements E et M sont-ils indépendants ? Justifier.

5. On sait que le médecin a prescrit des médicaments au patient.
Quelle est la probabilité que le patient soit un enfant ? On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Corrigé

On note E l'évènement « le patient est un enfant » et M l'évènement « le médecin prescrit des médicaments ». On a $P(E) = 0,7$, $P_E(M) = 0,2$ *et* $P_{\overline{E}}(M) = 0,4$.

1. La somme des probabilités issues d'un même nœud vaut 1 : $P(\overline{E}) = 1 - 0,7 = 0,3$, $P_E(\overline{M}) = 1 - 0,2 = 0,8$ et $P_{\overline{E}}(\overline{M}) = 1 - 0,4 = 0,6$.



2. La probabilité d'un chemin de l'arbre est le produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin :

$$P(\overline{E} \cap M) = P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(M) = 0,3 \times 0,4 = 0,12.$$

La probabilité que le patient choisi soit un **adulte et** que le médecin lui prescrive des médicaments est de $0,12$; autrement dit, 12 % des patients sont des adultes à qui le médecin prescrit des médicaments.

3. E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(M) = P(E \cap M) + P(\overline{E} \cap M)$$
$$P(M) = P(E) \times P_E(M) + P(\overline{E} \cap M)$$
$$P(M) = 0,7 \times 0,2 + 0,12$$
$$P(M) = 0,26$$

La probabilité que le médecin prescrive des médicaments au patient est égale à $0,26$.

4. Deux évènements E et M (avec $P(E) \neq 0$) sont indépendants si et seulement si $P(E \cap M) = P(E) \times P(M)$.
D'une part $P(E \cap M) = 0,14$; d'autre part $P(E) \times P(M) = 0,7 \times 0,26 = 0,182$.
Comme $0,14 \neq 0,182$, l'égalité n'est pas vérifiée.
Les évènements E et M ne sont **pas indépendants**.

5. On cherche la probabilité conditionnelle $P_M(E)$.

$$P_M(E) = \frac{P(E \cap M)}{P(M)} = \frac{0,14}{0,26} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13}.$$

Sachant que le médecin a prescrit des médicaments, la probabilité que le patient soit un enfant est égale à $\frac{7}{13}$.

Exercice 3.

Un joueur participe à un jeu. Il dispose d'une pièce de monnaie équilibrée et de deux urnes A et B qui contiennent chacune des jetons dorés et des jetons argentés.
Il doit commencer par lancer la pièce de monnaie.

- S'il obtient le côté pile, il pioche un jeton dans l'urne A. Il a alors 60 % de chances de tirer un jeton doré.
- S'il obtient le côté face, il pioche un jeton dans l'urne B. Il a alors 80 % de chances de tirer un jeton argenté.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer la pièce de monnaie puis à tirer un jeton dans une des deux urnes.
On considère les évènements suivants :

- A : le joueur pioche dans l'urne A ;
- B : le joueur pioche dans l'urne B ;
- D : le jeton obtenu est doré ;
- $\overline{\text{D}}$: le jeton obtenu est argenté.

1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

2. Calculer $P\left(A \cap D\right)$, puis interpréter le résultat obtenu.

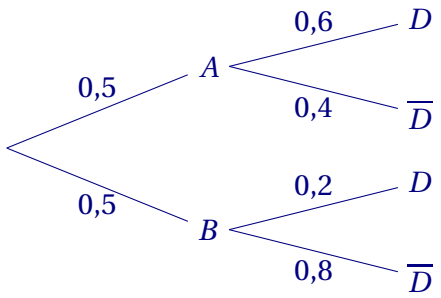
3. Montrer que $P(D) = 0,4$.

4. Le joueur a obtenu un jeton doré.
Quelle est la probabilité qu'il l'ait pioché dans l'urne B ?

Corrigé

La pièce est équilibrée : $P(A) = P(B) = 0,5$. *On a* $P_A(D) = 0,6$ *et* $P_B\left(\overline{D}\right) = 0,8$.

1. La somme des probabilités issues d'un même nœud vaut 1 : $P_A\left(\overline{D}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$ et $P_B(D) = 1 - 0,8 = 0,2$.



2. $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0,5 \times 0,6 = 0,3$.
La probabilité que le joueur pioche dans l'urne A et tire un jeton doré est égale à 0,3.

3. A et B forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D)$$

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D)$$

$$P(D) = 0,5 \times 0,6 + 0,5 \times 0,2 = 0,3 + 0,1 = 0,4.$$

4. On cherche $P_D(B)$. On a $P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D) = 0,5 \times 0,2 = 0,1$, donc

$$P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25.$$

Sachant que le jeton obtenu est doré, la probabilité qu'il ait été pioché dans l'urne B est égale à $0,25$.

Exercice 4.

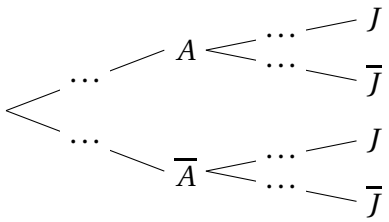
On s'intéresse à l'ensemble des spectateurs d'un cinéma.
On désigne par le terme *JEUNE* un spectateur âgé de 18 ans ou moins.
On désigne par le terme *ABONNÉ* un spectateur ayant souscrit un abonnement à ce cinéma.
Une étude a permis d'établir les résultats suivants :

- 60 % des spectateurs sont abonnés ;
- parmi les spectateurs abonnés, 40 % sont jeunes ;
- parmi les spectateurs n'étant pas abonnés, 20 % sont jeunes.

On interroge au hasard un spectateur et on considère les événements suivants :

- A : « *le spectateur est abonné* » ;
- J : « *le spectateur est jeune* ».

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous décrivant la situation.



2. Calculer la probabilité $P(A \cap J)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Démontrer que $P(J) = 0,32$.

4. On considère l'affirmation suivante :

> « *Si on interroge un spectateur jeune au hasard, il y a plus d'une chance sur deux qu'il soit abonné.* »

Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.

5. Le prix d'une place de cinéma est fixé selon les règles suivantes :

- un spectateur non abonné paie sa place 5 euros, quel que soit son âge ;
- un spectateur abonné et n'étant pas jeune paie sa place 2 euros ;
- un spectateur abonné et jeune ne paie pas sa place : c'est gratuit.

On note X la variable aléatoire qui, à un spectateur choisi au hasard, donne le prix qu'il doit payer pour sa place de cinéma.

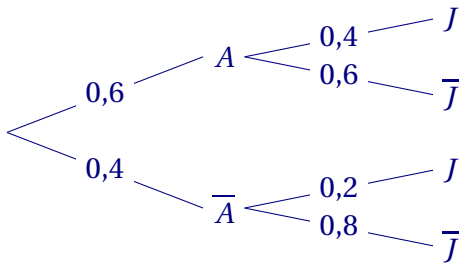
a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

1. Comme on interroge un spectateur au hasard, on est en situation d'équiprobabilité, et les proportions données dans l'énoncé sont assimilables à des probabilités.

On peut donc compléter l'arbre ci-dessous :



2. On a, d'après la propriété des probabilités conditionnelles :

$P(A \cap J) = P(A) \times P_A(J) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que 24 % des spectateurs sont des personnes à la fois jeunes et abonnées.

3. Les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$P\left(J\right) = P\left(A \cap J\right) + P\left(\overline{A} \cap J\right) = 0,24 + 0,4 \times 0,2 = 0,24 + 0,08 = 0,32$.

On a bien trouvé $P(J) = 0,32$. Cela signifie que 32 % des spectateurs sont jeunes.

4. L'affirmation peut être traduite sous forme d'inégalité mathématique : $P_J(A) > \dfrac{1}{2}$.

Or, d'après la définition des probabilités conditionnelles : $P_J(A) = \dfrac{P(A \cap J)}{P(J)} = \dfrac{0,24}{0,32} = \dfrac{24}{32} = \dfrac{3}{4} > \dfrac{1}{2}$.

L'affirmation est donc correcte, quand on interroge un spectateur jeune au hasard, il y a trois chances sur quatre, donc plus d'une sur deux, qu'il soit abonné.

5. **a.** La variable aléatoire X prend trois valeurs : 5, 2 et 0.

On a dès lors la loi de probabilité pour X :

k	0	2	5
évènement $\{X = k\}$	$A \cap J$	$A \cap \overline{J}$	$\overline{A}$
$P(X = k)$	0,24	$0,6 \times 0,6 = 0,36$	0,4

b. On applique la formule qui définit l'espérance :

$\mathrm{E}(X) = 0 \times P(X = 0) + 2 \times P(X = 2) + 5 \times P(X = 5) = 0 + 2 \times 0,36 + 5 \times 0,4 = 0 + 0,72 + 2 = 2,72$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que le prix moyen payé par les spectateurs de ce cinéma est de 2,72 €.

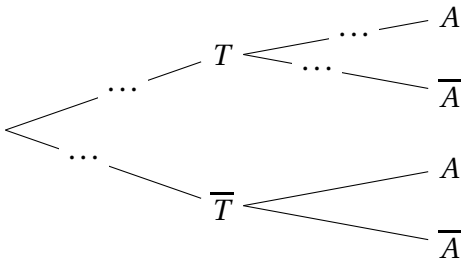
Exercice 5.

Un loueur de bicyclettes propose deux types de bicyclettes : des bicyclettes traditionnelles et des bicyclettes électriques.
Il incite ses clients à prendre une assurance.
On dispose des informations suivantes.

- 60 % des clients ont loué une bicyclette traditionnelle, les autres ont loué une bicyclette électrique.
- Parmi ceux qui ont loué une bicyclette traditionnelle, 25 % ont pris une assurance.
- 20 % de l'ensemble des clients ont pris une assurance.

On choisit un client au hasard et on note les événements :
T : « le client a loué une bicyclette traditionnelle ».
A : « le client a pris une assurance ».

1. Recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Donner, par simple lecture de l'énoncé, la probabilité de l'événement A.

3. Montrer que la probabilité que le client ait loué une bicyclette traditionnelle et qu'il ait pris une assurance est égale à 0,15.

4. En déduire que la probabilité $P\left(\overline{T} \cap A\right)$ est égale à 0,05.

5. Déterminer la probabilité que le client ait pris une assurance sachant qu'il a loué une bicyclette électrique.
On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

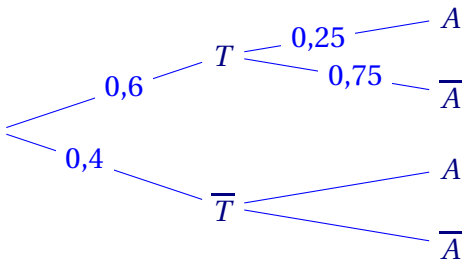
Corrigé

Un loueur de bicyclettes propose deux types de bicyclettes : des bicyclettes traditionnelles et des bicyclettes électriques. Il incite ses clients à prendre une assurance. On dispose des informations suivantes.

- 60% des clients ont loué une bicyclette traditionnelle, les autres ont loué une bicyclette électrique.
- Parmi ceux qui ont loué une bicyclette traditionnelle, 25% ont pris une assurance.
- 20% de l'ensemble des clients ont pris une assurance.

On choisit un client au hasard et on note les événements :
T : « le client a loué une bicyclette traditionnelle ».
A : « le client a pris une assurance ».

1. Recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Donner, par simple lecture de l'énoncé, la probabilité de l'événement A.

CORRECTION

20% des clients ont pris l'assurance, donc $P(A) = 0{,}2$

3. Montrer que la probabilité que le client ait loué une bicyclette traditionnelle et qu'il ait pris une assurance est égale à 0,15.

CORRECTION

$P(T \cap A) = P(T) \times P_T(A) = 0{,}6 \times 0{,}25 = 0{,}15$.

4. En déduire que la probabilité $P(\overline{T} \cap A)$ est égale à 0,05.

CORRECTION

Loi des probabilités totales : $P(A) = P(T \cap A) + P(\overline{T} \cap A)$;

donc $P(\overline{T} \cap A) = P(A) - P(T \cap A) = 0{,}2 - 0{,}15 = 0{,}05$

la probabilité qu'un client ait loué une bicyclette électrique et pris une assurance est 0,05.

5. Déterminer la probabilité que le client ait pris une assurance sachant qu'il a loué une bicyclette électrique. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

CORRECTION

Puisque $P(\overline{T} \cap A) = P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(A)$,

On en déduit : $P_{\overline{T}}(A) = \dfrac{P(\overline{T} \cap A)}{P(\overline{T})} = \dfrac{0{,}05}{0{,}4} = \dfrac{1}{8}$

la probabilité qu'un client ayant loué une bicyclette électrique ait pris une assurance est $\dfrac{1}{8} = 0{,}125$

Exercice 6.

Durant une fête foraine, une urne contient dix boules. Chaque boule est soit verte, soit rouge, indiscernable au toucher.
Un jeu est proposé aux personnes présentes à la fête foraine. Pour y participer le joueur doit d'abord payer 1 euro.
Ensuite,

- le joueur tire une première boule qu'il donne au forain, celui-ci note sa couleur puis remet la boule dans l'urne ;
- le joueur tire une deuxième boule, le forain note la couleur de ce deuxième tirage et remet à nouveau la boule dans l'urne.

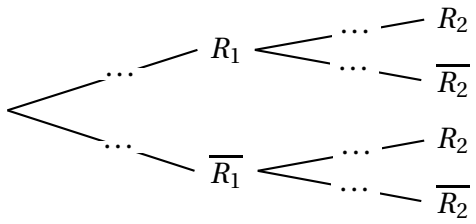
Voici les récompenses qu'il obtient :

- si le joueur a tiré deux boules rouges, il reçoit 3 euros ;
- si le joueur a tiré deux boules vertes, il reçoit 1 euro ;
- sinon il ne reçoit pas d'argent.

Partie A
Dans cette partie, on considère que cette urne contient 1 boule rouge et 9 boules vertes.
On note :

- R_1 l'événement : « La première boule tirée est rouge. »
- R_2 l'événement : « La deuxième boule tirée est rouge. »

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation.



2. On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue après les deux tirages et les frais de participation au jeu de 1 euro.

a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Montrer que $P(X=-1)=\dfrac{18}{100}$.

c. Recopier sur votre feuille et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X :

k			
$P(X=k)$			

d. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat.

Partie B

Dans cette partie, on considère que cette urne contient maintenant n boules rouges et $10-n$ boules vertes où n est un nombre entier naturel avec $0 \leq n \leq 10$.

On note Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique après les deux tirages.

1. Démontrer que $E(Y) = \dfrac{4n^2 - 20n}{100}$.

On expliquera la démarche mise en œuvre. Toute démarche, même incomplète, sera prise en compte dans la notation.

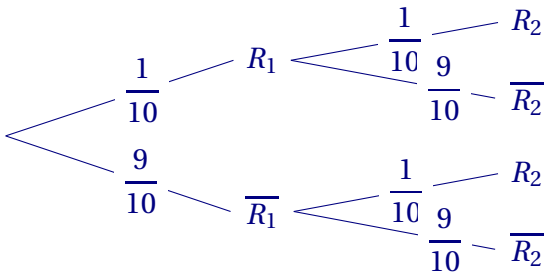
2. Pour combien de boules rouges dans l'urne le jeu est-il équitable entre le joueur et le forain ?

Corrigé

Partie A

Les boules sont indiscernables au toucher, donc on est en situation d'équiprobabilité. Les tirages se font avec remise, donc les probabilités d'obtenir une boule verte ou une boule rouge sont indépendants de l'ordre du tirage.

1. Arbre pondéré complété :



2. a. Le joueur paie 1 €, qui contribue donc négativement au gain algébrique de la partie.

Il peut recevoir 3 € (deux rouges), 1 € (deux vertes) ou 0 € (sinon).

Le gain algébrique X prend donc les valeurs :

$$X = 3 - 1 = 2, \qquad X = 1 - 1 = 0, \qquad X = 0 - 1 = -1.$$

b. $X = -1$ correspond à « une rouge et une verte » (dans un ordre ou dans l'autre).

On a donc : $\{X = -1\} = \left(R_1 \cap \overline{R_2}\right) \cup \left(\overline{R_1} \cap R_2\right)$.

Les événements que l'on réunit sont disjoints, donc :

$P(X = -1) = P\left(R_1 \cap \overline{R_2}\right) + P\left(\overline{R_1} \cap R_2\right) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{9}{10} + \dfrac{9}{10} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{100} + \dfrac{9}{100} = \dfrac{18}{100}$.

On arrive bien à : $P(X = -1) = \dfrac{18}{100}$.

c. $P(X = 2) = P(R_1 \cap R_2) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{100}$ et $P(X = 0) = P\left(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}\right) = \dfrac{9}{10} \times \dfrac{9}{10} = \dfrac{81}{100}$.

x_k	-1	0	2
$P(X = x_k)$	$\dfrac{18}{100}$	$\dfrac{81}{100}$	$\dfrac{1}{100}$

On peut se rassurer, en vérifiant : $\dfrac{18}{100} + \dfrac{81}{100} + \dfrac{1}{100} = 1$.

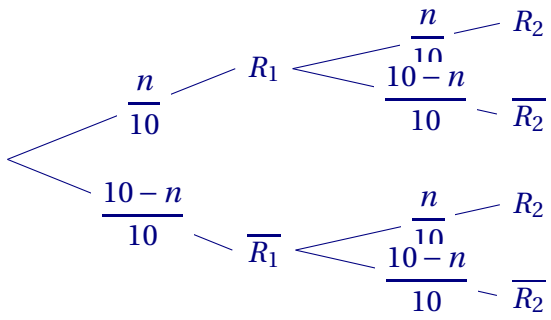
d. On a : $E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + x_3 \times P(X = x_3)$.

$$= (-1) \times \frac{18}{100} + 0 \times \frac{81}{100} + 2 \times \frac{1}{100}$$
$$= \frac{-18+0+2}{100}$$
$$= \frac{-16}{100} = -0,16$$

Interprétation : sur un grand nombre de parties, le joueur perd en moyenne 0,16 € (soit 16 centimes) par partie. Le jeu est défavorable au joueur (et donc favorable au forain).

Partie B

On va reproduire le même raisonnement qu'à la partie A, avec un changement dans les probabilités, pour refléter la nouvelle répartition entre les boules vertes et les boucles rouges. L'arbre adapté est donc :



1. Comme en partie A, Y prend les valeurs -1, 0 et 2 avec :

$P(Y = 2) = P(R_1 \cap R_2) = \left(\frac{n}{10}\right)^2 = \frac{n^2}{100}$

Puis, $P(Y = -1) = P\left(\overline{R_1} \cap R_2\right) + P\left(R_1 \cap \overline{R_2}\right) = \frac{n}{10} \times \frac{10-n}{10} + \frac{10-n}{10} \times \frac{n}{10}$

$$= 2 \times \frac{n}{10} \times \frac{10-n}{10} = \frac{2n(10-n)}{100}.$$

On ne calcule pas $P(Y = 0)$, car dans le calcul de l'espérance, cette probabilité sera multipliée par la valeur 0, donc sans effet sur l'espérance.

D'où : $E(Y) = 2 \times P(Y = 2) + 0 \times P(Y = 0) + (-1) \times P(Y = -1)$

$$= \frac{2n^2}{100} - \frac{2n(10-n)}{100} = \frac{2n^2 - 20n + 2n^2}{100} = \frac{4n^2 - 20n}{100}.$$

On arrive bien à l'expression donnée dans le sujet.

2. Le jeu est équitable lorsque $E(Y) = 0$.

On résout : $\frac{4n^2 - 20n}{100} = 0 \iff 4n(n-5) = 0 \iff n = 0$ ou $n = 5$.

Il y a donc deux situations où le jeu est équitable :

- La valeur $n = 0$ correspond à une urne sans boule rouge. Ce n'est pas très intéressant : on tire toujours deux vertes, ce n'est plus vraiment un jeu de hasard.
- Le cas pertinent est donc pour $n = 5$ boules rouges : avec 5 boules rouges (et 5 vertes), le jeu est équitable entre le joueur et le forain.

Remarque : La question n'était pas posée, mais dans le calcul de l'espérance de Y, on voit que le numérateur est un polynome de degré 2, dont le coefficient dominant est 4 donc positif et les racines sont 0 et 5, donc on peut dire que pour n compris strictement entre 0 et 4 (c'est à dire avec un nombre de boules rouges compris entre 1 et 4, puisque ce nombre doit être entier), alors le jeu a une espérance négative, et est favorable au forain, pour un nombre de boules rouges compris entre 6 et 10, il est favorable au joueur.