Corrigé
Second degré

Passer d'une forme à l'autre

Exercice 1.

Développer chaque expression et donner a, b, c.

1. $(x-3)^2+1$ **2.** $-2(x+1)^2+8$ **3.** $3(x-1)(x+4)$

1. $x^2-6x+10$: $a=1$, $b=-6$, $c=10$.

2. $-2x^2-4x+6$: $a=-2$, $b=-4$, $c=6$.

3. $3x^2+9x-12$: $a=3$, $b=9$, $c=-12$.

Exercice 2.

Déterminer la forme canonique de chaque fonction.

1. $f(x)=x^2+8x+3$

2. $g(x)=x^2-5x+1$

3. $h(x)=2x^2+4x-6$

4. $k(x)=-3x^2+12x-7$

1. $(x+4)^2-13$.

2. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}$.

3. $2(x+1)^2-8$.

4. $-3(x-2)^2+5$.

Étudier les variations et le sommet d'une parabole

Exercice 3.

Pour chaque fonction, donner les coordonnées du sommet, dresser le tableau de variations et préciser l'extremum.

1. $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$

2. $g(x) = -(x+4)^2 - 1$

3. $h(x) = x^2 - 6x + 5$

4. $k(x) = -0,5x^2 + 2x$

1. $S(1\ ;\ 3)$, $a > 0$: décroissante puis croissante, minimum 3 en 1.

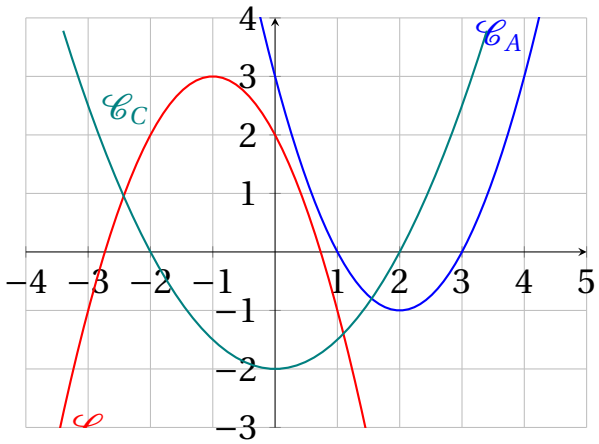
2. $S(-4\ ;\ -1)$, $a < 0$: croissante puis décroissante, maximum -1 en -4.

3. $\alpha = 3$, $\beta = -4$: minimum -4 en 3.

4. $\alpha = 2$, $\beta = 2$: maximum 2 en 2.

Exercice 4.

Associer chaque parabole à son expression : $f_1(x) = (x-2)^2 - 1$; $f_2(x) = -(x+1)^2 + 3$; $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$.



$\mathscr{C}_A$: f_1 (sommet $(2\ ;\ -1)$) ; $\mathscr{C}_B$: f_2 (sommet $(-1\ ;\ 3)$, tournée vers le bas) ; $\mathscr{C}_C$: f_3 (sommet $(0\ ;\ -2)$).

Résoudre une équation du second degré

Exercice 5.

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$

2. $2x^2 + 3x - 2 = 0$

3. $x^2 - 6x + 9 = 0$

4. $3x^2 + x + 5 = 0$

5. $-x^2 + 4x + 1 = 0$

6. $4x^2 - 9 = 0$

1. $\Delta = 1 : S = \{2\,;\,3\}$.

2. $\Delta = 25 : S = \left\{-2\,;\,\frac{1}{2}\right\}$.

3. $\Delta = 0 : S = \{3\}$.

4. $\Delta = -59 < 0 : S = \emptyset$.

5. $\Delta = 20 : S = \{2 - \sqrt{5}\,;\,2 + \sqrt{5}\}$.

6. Sans Δ : $x^2 = \frac{9}{4}$, $S = \left\{-\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right\}$.

Exercice 6.

1. Vérifier que 1 est racine de $2x^2 + 5x - 7$ et en déduire l'autre racine à l'aide du produit des racines.

2. Trouver deux nombres dont la somme vaut 10 et le produit 21.

3. Pour quelles valeurs de m l'équation $x^2 + mx + 4 = 0$ a-t-elle une seule solution ?

4. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$). Que renvoie `nb_solutions(1, 4, 4)` ?

```
def nb_solutions(a, b, c):
    delta = ...
    if delta > 0:
        return ...
    elif ... :
        return 1
    else:
        return ...
```

1. $2 + 5 - 7 = 0$. $x_1 x_2 = \frac{-7}{2}$ donc $x_2 = -\frac{7}{2}$.

2. Ils sont racines de $x^2 - 10x + 21 = 0 : \Delta = 16$, les nombres sont 3 et 7.

3. $\Delta = m^2 - 16 = 0 \iff m = 4$ ou $m = -4$.

4. Le nombre de solutions dépend du signe du discriminant :

```
def nb_solutions(a, b, c):
    delta = b**2 - 4*a*c
    if delta > 0:
        return 2
    elif delta == 0:
        return 1
    else:
        return 0
```

`nb_solutions(1, 4, 4)` renvoie 1 : on retrouve le cas $m = 4$ de la question 3.

Factoriser et étudier le signe

Exercice 7.

Factoriser lorsque c'est possible, puis dresser le tableau de signes.

1. $f(x) = x^2 + x - 12$

2. $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$

3. $h(x) = x^2 + 2x + 5$

4. $k(x) = 9x^2 - 12x + 4$

1. $(x+4)(x-3)$: positif sur $]-\infty\,;\,-4[\cup]3\,;\,+\infty[$, négatif sur $]-4\,;\,3[$.

2. $-2(x-1)(x-3)$: négatif hors de $[1\,;\,3]$, positif sur $]1\,;\,3[$.

3. $\Delta = -16$: pas de factorisation, $h(x) > 0$ pour tout x.

4. $(3x-2)^2$: positif, nul en $\frac{2}{3}$.

Exercice 8.

Résoudre les inéquations.

1. $x^2 - 3x - 10 \leqslant 0$

2. $-x^2 + 2x + 3 < 0$

3. $2x^2 + x > 1$

4. $x^2 + 4 \geqslant 4x$

1. Racines -2 et 5 : $S = [-2\,;\,5]$.

2. Racines -1 et 3, $a < 0$: $S =]-\infty\,;\,-1[\cup]3\,;\,+\infty[$.

3. $2x^2 + x - 1 > 0$, racines -1 et $\frac{1}{2}$: $S =]-\infty\,;\,-1[\cup\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

4. $(x-2)^2 \geqslant 0$: $S = \mathbb{R}$.

Modéliser par une fonction du second degré

Exercice 9.

Une balle est lancée verticalement. Sa hauteur (en m) après t secondes est $h(t) = -5t^2 + 20t + 1{,}5$.

1. Quelle est la hauteur maximale atteinte ? À quel instant ?
2. À quel instant la balle retombe-t-elle au sol ? (arrondir au centième)
3. Pendant combien de temps est-elle à plus de 16,5 m ?

1. $\alpha = \frac{-20}{-10} = 2$: hauteur maximale $h(2) = 21{,}5$ m à $t = 2$ s.
2. $\Delta = 400 + 30 = 430$, racine positive $t = \frac{-20-\sqrt{430}}{-10} \approx 4{,}07$ s.
3. $-5t^2 + 20t - 15 > 0 \iff t^2 - 4t + 3 < 0 \iff t \in]1\,;\,3[$: pendant 2 s.

Exercice 10.

Un fermier dispose de 40 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire le long d'un mur (le mur forme un côté).

1. On note x la largeur (côtés perpendiculaires au mur). Exprimer l'aire $A(x)$.
2. Déterminer les dimensions qui donnent une aire maximale.

1. La longueur vaut $40 - 2x$: $A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$ pour $x \in [0\,;\,20]$.
2. $\alpha = 10$: largeur 10 m, longueur 20 m, aire maximale 200 m^2.

Exercice 11.

Une entreprise fabrique q objets ($0 \leqslant q \leqslant 60$). Le bénéfice en euros est $B(q) = -2q^2 + 140q - 1\,800$.

1. Pour quelles quantités l'entreprise est-elle rentable ?
2. Quel bénéfice maximal peut-elle réaliser ?

1. $B(q) = -2(q^2 - 70q + 900)$, $\Delta = 4900 - 3600 = 1300$; racines $35 \pm 5\sqrt{13} \approx 16{,}97$ et $53{,}03$. Rentable pour q entre 17 et 53 objets.
2. $\alpha = 35$: $B(35) = 650$ €.