Corrigé
Suites arithmétiques et géométriques

Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique

Exercice 1.

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques, géométriques ou ni l'un ni l'autre ? Préciser la raison le cas échéant.

1. $u_n = 7n - 2$

2. $v_n = 5 \times 3^n$

3. $w_n = n^2 + 1$

4. $t_n = \dfrac{4}{2^n}$

5. $a_{n+1} = a_n - 0,5$, $a_0 = 3$

6. $b_{n+1} = 2b_n + 1$, $b_0 = 1$

1. Arithmétique, $r = 7$. 2. Géométrique, $q = 3$. 3. Ni l'un ni l'autre ($w_0 = 1$, $w_1 = 2$, $w_2 = 5$). 4. Géométrique, $q = \frac{1}{2}$. 5. Arithmétique, $r = -0,5$. 6. Ni l'un ni l'autre (1, 3, 7 : différences 2 et 4, quotients 3 et $\frac{7}{3}$).

Exercice 2.

Une salle de spectacle compte 20 sièges au premier rang, puis chaque rang compte 2 sièges de plus que le précédent. Un abonnement coûte 300 € la première année puis augmente de 4 % par an. Modéliser chaque situation par une suite dont on donnera la nature, le premier terme et la raison.

Nombre de sièges du rang n ($n \geqslant 1$) : arithmétique, $s_1 = 20$, $r = 2$. Prix l'année n ($n \geqslant 0$) : géométrique, $p_0 = 300$, $q = 1,04$.

Calculer un terme d'une suite arithmétique ou géométrique

Exercice 3.

1. (u_n) est arithmétique, $u_0 = -4$, $r = 3$. Calculer u_{20}.
2. (u_n) est arithmétique, $u_5 = 17$, $u_{12} = 38$. Déterminer r et u_0.
3. (v_n) est géométrique, $v_0 = 1\,000$, $q = 0,9$. Calculer v_{10} arrondi au centième.
4. (v_n) est géométrique de raison positive, $v_2 = 12$, $v_4 = 108$. Déterminer q et v_0.

1. $u_{20} = -4+60 = 56$. 2. $7r = 21$, $r = 3$, $u_0 = 17-15 = 2$. 3. $v_{10} = 1\,000 \times 0,9^{10} \approx 348,68$. 4. $q^2 = 9$, $q = 3$, $v_0 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

Exercice 4.

Dans la salle de l'exercice 2, combien de sièges compte le 15e rang ? Quel est le prix de l'abonnement au bout de 10 ans ?

$s_{15} = 20 + 14 \times 2 = 48$. $p_{10} = 300 \times 1,04^{10} \approx 444,07$ €.

Étudier les variations

Exercice 5.

Étudier le sens de variation des suites : $u_n = 10-2,5n$; $v_n = 3\times 1,2^n$; $w_n = -5\times 0,8^n$.

(u_n) arithmétique de raison $-2,5 < 0$: décroissante. (v_n) : $v_0 > 0$, $q > 1$: croissante. (w_n) : $w_0 < 0$ et $0 < q < 1$: croissante.

Calculer une somme de termes

Exercice 6.

Calculer :

1. $1 + 2 + \cdots + 200$
2. $3 + 5 + 7 + \cdots + 101$
3. $1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{10}$
4. $5 + 10 + 20 + \cdots + 5 \times 2^9$

Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la somme $1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n$. Que renvoie `somme(10)` ?

1. $\frac{200\times 201}{2} = 20\,100$. 2. 50 termes : $50 \times \frac{3+101}{2} = 2\,600$. 3. $\frac{3^{11}-1}{3-1} = 88\,573$. 4. $\frac{5\times 2^{10}-5}{2-1} = 5\,115$.

Pour la fonction, on ajoute les puissances 3^k pour k allant de 0 à n :

```
def somme(n):
    s = 0
    for k in range(n + 1):
        s = s + 3**k
    return s
```

`somme(10)` renvoie 88 573 : on retrouve le résultat du 3.

Exercice 7.

Combien la salle de l'exercice 2 compte-t-elle de sièges si elle a 25 rangs ? Quelle somme totale aura-t-on payée pour l'abonnement pendant 10 années (de l'année 0 à l'année 9) ?

Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie le nombre total de sièges d'une salle de n rangs. Que renvoie `total(25)` ?

$25 \times \frac{20+68}{2} = 1\,100$ sièges. $\frac{300 \times 1{,}04^{10} - 300}{1{,}04-1} \approx 3\,601{,}83$ €.

La variable `r` contient le nombre de sièges du rang en cours :

```
def total(n):
    s = 0
    r = 20
    for i in range(n):
        s = s + r
        r = r + 2
    return s
```

`total(25)` renvoie 1 100.

Exercice 8. [Démonstration]

Démontrer que $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ puis que $1+q+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour $q \neq 1$.

Voir le cours.

Résoudre un problème de modélisation

Exercice 9. [Placements]

Léa place 5 000 € à intérêts simples de 3 % par an (elle reçoit 150 € chaque année). Tom place 5 000 € à intérêts composés de 2,5 % par an.

1. Exprimer le capital L_n de Léa et T_n de Tom après n années.
2. Comparer les deux placements après 10 ans, puis après 30 ans.
3. Écrire une fonction Python qui renvoie la première année où le capital de Tom dépasse celui de Léa.

1. $L_n = 5\,000 + 150n$; $T_n = 5\,000 \times 1{,}025^n$.
2. $L_{10} = 6\,500$, $T_{10} \approx 6\,400{,}42$: Léa en tête. $L_{30} = 9\,500$, $T_{30} \approx 10\,487{,}84$: Tom en tête.
3. `n = 0; L = 5000; T = 5000` puis `while T <= L: n = n + 1; L = L + 150; T = 1.025 * T` et `return n`; on obtient $n = 16$.

Exercice 10. [Médicament]

On injecte 8 mL d'un médicament ; chaque heure, 20 % de la quantité présente est éliminée. Au bout de combien d'heures reste-t-il moins de 1 mL ? (on utilisera la calculatrice ou un algorithme de seuil)

Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche ce nombre d'heures.

$q_n = 8 \times 0,8^n$. $q_9 \approx 1,07$ et $q_{10} \approx 0,86$: au bout de 10 heures.

Éliminer 20 % revient à multiplier par $0,8$:

```
q = 8
n = 0
while q >= 1:
    n = n + 1
    q = 0.8 * q
print(n)
```

L'algorithme affiche 10.