Corrigé
Variables aléatoires

Déterminer une loi de probabilité

Exercice 1.

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On gagne 10 € si c'est un as, 4 € si c'est une figure (roi, dame, valet), et on perd 2 € sinon. X désigne le gain algébrique.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer $P(X > 0)$.

1. $P(X = 10) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$; $P(X = 4) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$; $P(X = -2) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.
2. $P(X > 0) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2.

On lance deux dés équilibrés à 6 faces et on note S la somme des résultats.

1. Quelles valeurs S peut-elle prendre ? Donner sa loi (on pourra utiliser un tableau à double entrée).
2. Calculer $P(S \geqslant 10)$ et $P(S \leqslant 4)$.

1. $S \in \{2, \ldots, 12\}$; $P(S = k) = \frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}$ pour $k = 2, \ldots, 12$.
2. $P(S \geqslant 10) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; $P(S \leqslant 4) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Exercice 3.

La loi de X est donnée ci-dessous. Déterminer a.

x_i	-1	0	2	5
$P(X = x_i)$	$0,3$	a	$2a$	$0,1$

$0,3 + 3a + 0,1 = 1 \iff a = 0,2$.

Calculer et interpréter une espérance

Exercice 4.

Calculer l'espérance de X dans les exercices 1 et 3. Interpréter le résultat de l'exercice 1.

Exercice 1 : $E(X) = \frac{10}{8} + \frac{12}{8} - 1 = 1,75$: en moyenne, le joueur gagne $1,75$ € par partie.

Exercice 3 : $E(X) = -0,3 + 0 + 0,8 + 0,5 = 1$.

Exercice 5.

Pour participer à une loterie, on paie 3 €. Sur 1 000 billets, un billet gagne 500 €, dix billets gagnent 50 € et cent billets gagnent 5 €. Soit G le gain algébrique d'un joueur (mise déduite).

1. Donner la loi de G et calculer $E(G)$.
2. Quel prix du billet rendrait le jeu équitable ?

1. $G \in \{497\ ;\ 47\ ;\ 2\ ;\ -3\}$ avec probabilités $0,001\ ;\ 0,01\ ;\ 0,1\ ;\ 0,889$. $E(G) = 0,497 + 0,47 + 0,2 - 2,667 = -1,5$.
2. Gain moyen hors mise : $0,5 + 0,5 + 0,5 = 1,5$ € : le billet devrait coûter $1,50$ €.

Exercice 6.

Une compagnie d'assurance propose un contrat à 120 € par an. Une étude montre que, chaque année, 5 % des assurés déclarent un petit sinistre coûtant 500 € à la compagnie et 1 % un sinistre important coûtant 5 000 €. On note B le bénéfice de la compagnie pour un contrat. Calculer $E(B)$.

$B \in \{120\ ;\ -380\ ;\ -4\,880\}$ avec probabilités $0,94\ ;\ 0,05\ ;\ 0,01$. $E(B) = 112,8 - 19 - 48,8 = 45$ €.

Calculer une variance et un écart type

Exercice 7.

Calculer la variance et l'écart type de X dans l'exercice 3.

$E(X^2) = 0,3 + 0 + 0,8 + 2,5 = 3,6$; $V(X) = 3,6 - 1 = 2,6$; $\sigma(X) \approx 1,61$.

Exercice 8.

Deux placements ont des rendements annuels (en %) modélisés par X et Y :

x_i	-2	4	8
$P(X = x_i)$	0,2	0,5	0,3

y_i	3	5
$P(Y = y_i)$	0,4	0,6

Comparer leurs espérances et leurs écarts types. Lequel conseiller à un investisseur prudent ?

$E(X) = -0,4 + 2 + 2,4 = 4$; $E(X^2) = 0,8 + 8 + 19,2 = 28$; $V(X) = 12$; $\sigma(X) \approx 3,46$.

$E(Y) = 1,2 + 3 = 4,2$; $E(Y^2) = 3,6 + 15 = 18,6$; $V(Y) = 0,96$; $\sigma(Y) \approx 0,98$.

Y a une meilleure espérance et beaucoup moins de risque : on conseille Y.

Exercice 9.

X a pour espérance $E(X) = 12$ et pour écart type $\sigma(X) = 3$. Calculer l'espérance et l'écart type de $Y = 5X - 20$ et de $Z = -X + 4$.

$E(Y) = 40$, $\sigma(Y) = 15$; $E(Z) = -8$, $\sigma(Z) = 3$.

Simuler une variable aléatoire

Exercice 10.

Écrire une fonction Python $\text{gain}()$ qui simule le gain du jeu de l'exercice 1, puis un programme qui affiche le gain moyen sur 10 000 parties. Quelle valeur attend-on ?

On numérote les cartes de 1 à 32 : $\text{c} = \text{randint}(1,\ 32)$; $\text{if c} <= 4\text{: return } 10$; $\text{elif c} <= 16\text{: return } 4$; else: return -2. Puis on additionne 10 000 gains et on divise par 10 000 : on attend une valeur proche de $E(X) = 1,75$.