

Croissance linéaire :

fonctions affines et suites arithmétiques

Notion de suites

Exercice 1.

Pour chacune des suites suivantes, calculer les trois premiers termes u_0 , u_1 et u_2 .

1. Suite définie par : $u_n = 3n + 5$
2. Suite définie par : $u_n = 2^n$
3. Suite définie par récurrence :
 $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 4$
4. Suite définie par : $u_n = -2n + 7$
5. Suite définie par récurrence :
 $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = u_n - 3$
6. Suite définie par : $u_n = n^2 + 1$

Exercice 2.

Calculer u_5 puis dire si chacune de ces suites est croissante, décroissante ou aucun des deux.

1. Une suite commence à 100 et augmente de 15 à chaque étape.
2. Une suite commence à 50 et diminue de 2 à chaque étape.
3. Je place 200 € sur un compte et ajoute 50 € chaque mois.
4. Une population de 1000 individus augmente de 200 puis est divisée par deux chaque année.
5. Une population de 200 individus augmente de 200 puis est divisée par deux chaque année.

Exercice 3.

Pour chaque suite arithmétique, identifier le premier terme u_0 et la raison r , puis calculer u_{10} et u_{20} .

1. $u_n = 4n + 7$.
2. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 5$.
3. $u_n = -3n + 12$.
4. $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = u_n - 4$.
5. $u_n = 2,5n + 8$.
6. $u_0 = 500$ et $u_{n+1} = u_n + 25$.

Exercice 4.

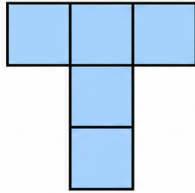
Un investisseur place 2 000 € à intérêts simples au taux annuel de 3 %. Chaque année, les intérêts gagnés sont de $2000 \times 0,03 = 60$ €.

On note C_n le capital obtenu après n années.

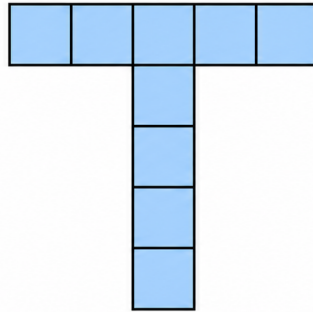
1. Quelle est la nature de la suite (C_n) ? Justifier.
2. Donner l'expression de C_n en fonction de n .
3. Calculer le capital obtenu après 5 années, puis après 10 années.
4. Après combien d'années le capital dépassera-t-il 2 500 €?

Exercice 5.

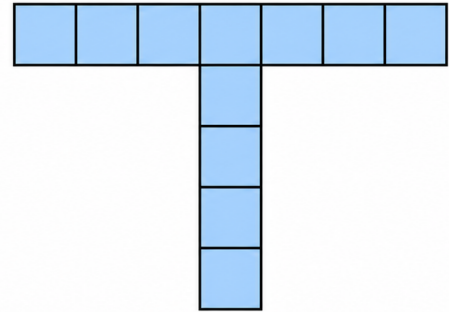
On construit une suite de figures comme suit :



Rang 0 : 5 carrés



Rang 1 : 8 carrés



Rang 2 : 11 carrés

On note u_n le nombre de carrés au rang n .

1. Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .
2. Justifier pourquoi la suite (u_n) est arithmétique.
3. Préciser u_0 et r .
4. Donner l'expression de u_n en fonction de n .
5. Combien de carrés y aura-t-il au rang 10? au rang 20?

Discret ou continu

Exercice 6.

Pour chaque situation, dire si le phénomène est **discret** ou **continu**, puis le modéliser par une suite arithmétique ou une fonction affine.

1. Un compte bancaire reçoit un versement mensuel fixe de 150 € chaque mois. Le solde initial est de 800 €.
2. La température d'un four augmente régulièrement de 20 °C par minute. La température initiale est de 20 °C.

3. Un réservoir d'eau se remplit à débit constant de 5 litres par minute. Il contient initialement 50 litres.
4. Chaque année, une ville gagne 1 200 habitants. Sa population initiale est de 15 000 habitants.
5. Un véhicule roule à vitesse constante de 90 km/h. La distance parcourue dépend du temps écoulé.
6. Un salaire augmente de 50 € tous les mois. Le salaire initial est de 1 800 €.

Exercice 7.

La relation entre la température en degrés Celsius (C) et en degrés Fahrenheit (F) est donnée par la formule :

$$F = 1,8 \times C + 32$$

1. Justifier pourquoi cette relation est une fonction affine.
2. Identifier le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.
3. Calculer la température en Fahrenheit pour : 0 °C, 10 °C, 20 °C et 100 °C.
4. Représenter graphiquement cette fonction pour C variant de 0 à 40.
5. À quelle température en Celsius correspondent 68 °F ? 212 °F ?

Exercice 8.

Les scientifiques modélisent l'évolution du niveau moyen des océans par une augmentation linéaire de 3,3 mm par an depuis 2000.

En 2000 (rang $n = 0$), le niveau moyen était de 0 mm (référence).

On note h_n le niveau en mm après n années.

1. Justifier que la suite (h_n) est arithmétique.
2. Préciser h_0 et r .
3. Donner l'expression de h_n en fonction de n .
4. Calculer le niveau en 2010, puis en 2020.
5. Représenter graphiquement les 10 premiers termes de la suite.
6. Quel sera le niveau en 2030 ? en 2050 ?

Exercice 9.

Sur un marché, l'offre et la demande sont modélisées par des fonctions affines :

- L'offre représente la quantité fabriquée en fonction du prix p :
 $O(p) = 50p - 100$
- La demande représente la quantité achetée en fonction du prix p :
 $D(p) = -30p + 700$

1. Calculer l'offre et la demande pour les prix : $p = 5$, $p = 10$, $p = 15$.
2. Représenter graphiquement les deux fonctions pour p variant de 0 à 20.
3. Le point d'équilibre correspond au prix pour lequel offre = demande. Résoudre l'équation $O(p) = D(p)$.
4. Quelle est la quantité échangée à l'équilibre?

Exercice 10.

On modélise un barème d'impôt simplifié par tranches :

- Pour un revenu R entre 0 et 10 000 € : impôt = 0 €.
 - Pour un revenu R entre 10 000 et 30 000 € : impôt = $0,14 \times (R - 10\,000)$.
 - Pour un revenu R au-delà de 30 000 € : impôt = $2\,800 + 0,30 \times (R - 30\,000)$.
1. Calculer l'impôt pour les revenus suivants : 8 000 €, 15 000 €, 25 000 €, 35 000 €, 50 000 €.
 2. Pour la tranche $[0; 10\,000]$ €, l'impôt est-il une fonction affine du revenu? Si oui, préciser le coefficient directeur.
 3. Pour la tranche $[10\,000; 30\,000]$ €, l'impôt est-il une fonction affine du revenu? Si oui, préciser le coefficient directeur.
 4. Pour la tranche 30 000 € et plus, l'impôt est-il une fonction affine du revenu? Si oui, préciser le coefficient directeur.

Problèmes de seuil

Exercice 11.

Je souhaite acheter un ordinateur coûtant 1 200 €. Je dispose déjà de 300 € et décide d'épargner 75 € par mois.

On note S_n la somme dont elle dispose après n mois.

1. Quelle est la modélisation la plus appropriée, une suite ou une fonction?
2. Exprimer S_n en fonction de n .
3. Après combien de mois aurais-je suffisamment d'argent?
4. Vérifier en calculant S_n pour la valeur trouvée.
5. Si je souhaite acheter l'ordinateur dans exactement 10 mois, combien dois-je épargner par mois (en gardant les 300 € initiaux)?

Exercice 12.

Une entreprise fabrique des objets. Les coûts de production sont modélisés par :

$$C(n) = 50n + 1\,200$$

où n est le nombre d'objets fabriqués et $C(n)$ le coût total en euros.

Chaque objet est vendu 80 €, donc la recette est :

$$R(n) = 80n$$

1. Quelle est la modélisation la plus appropriée, une suite ou une fonction ?
2. Calculer le coût et la recette pour $n = 20$, $n = 40$ et $n = 60$.
3. Le bénéfice est donné par $B(n) = R(n) - C(n)$.
Exprimer $B(n)$ en fonction de n .
4. À partir de combien d'objets vendus l'entreprise fait-elle un bénéfice positif ?
5. Combien d'objets faut-il vendre pour obtenir un bénéfice d'au moins 1 000 € ?

Exercice 13.

Une ville compte actuellement 25 000 habitants. On modélise sa croissance par une augmentation de 400 habitants par an.

On note P_n la population après n années.

1. Quelle est la modélisation la plus appropriée, une suite ou une fonction ?
2. Exprimer P_n en fonction de n .
3. Quelle sera la population dans 5 ans ? dans 10 ans ?
4. La ville souhaite construire une nouvelle école lorsque la population dépassera 30 000 habitants. Dans combien d'années cela se produira-t-il ?
5. Si la ville veut atteindre 35 000 habitants en exactement 15 ans, quel devrait être le nombre d'habitants ajoutés chaque année ?

Exercice 14.

Un réservoir d'eau de capacité 5 000 litres contient initialement 800 litres. On le remplit à débit constant de 120 litres par minute.

On note V_n le volume d'eau (en litres) après n minutes.

1. Quelle est la modélisation la plus appropriée, une suite ou une fonction ?
2. Exprimer V_n en fonction de n .
3. Quel volume y aura-t-il après 10 minutes ? après 20 minutes ?

4. Dans combien de temps le réservoir sera-t-il plein?
5. Si on veut remplir le réservoir en exactement 30 minutes, quel débit faut-il utiliser?

Exercice 15.

Deux entreprises de téléphonie proposent les offres suivantes :

- Offre A : abonnement mensuel de 20 € + 0,15 € par minute d'appel.
- Offre B : abonnement mensuel de 35 € + 0,08 € par minute d'appel.

On note $A(m)$ et $B(m)$ le coût mensuel en fonction du nombre m de minutes d'appel.

1. Quelle est la modélisation la plus appropriée, une suite ou une fonction?
2. Exprimer $A(m)$ et $B(m)$ en fonction de m .
3. Calculer le coût pour 100 minutes, 200 minutes et 300 minutes avec chaque offre.
4. À partir de combien de minutes l'offre B devient-elle plus avantageuse que l'offre A?
5. Vérifier en calculant les coûts pour cette valeur.
6. Si un client téléphone en moyenne 250 minutes par mois, quelle offre doit-il choisir?

Corrigé

