

Croissance linéaire :

fonctions affines et suites arithmétiques

Notion de suites

Exercice 1.

Pour chacune des suites suivantes, calculer les trois premiers termes u_0 , u_1 et u_2 .

1. Suite définie par : $u_n = 3n + 5$
 $u_0 = 3 \times 0 + 5 = 5$; $u_1 = 3 \times 1 + 5 = 8$;
 $u_2 = 3 \times 2 + 5 = 11$.
2. Suite définie par : $u_n = 2^n$
 $u_0 = 2^0 = 1$; $u_1 = 2^1 = 2$; $u_2 = 2^2 = 4$.
3. Suite définie par récurrence :
 $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 4$
 $u_0 = 1$; $u_1 = u_0 + 4 = 1 + 4 = 5$;
 $u_2 = u_1 + 4 = 5 + 4 = 9$.
4. Suite définie par : $u_n = -2n + 7$
5. Suite définie par récurrence :
 $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = u_n - 3$
 $u_0 = 10$; $u_1 = u_0 - 3 = 10 - 3 = 7$;
 $u_2 = u_1 - 3 = 7 - 3 = 4$.
6. Suite définie par : $u_n = n^2 + 1$
 $u_0 = 0^2 + 1 = 1$; $u_1 = 1^2 + 1 = 2$;
 $u_2 = 2^2 + 1 = 5$.

Exercice 2.

Calculer u_5 puis dire si chacune de ces suites est croissante, décroissante ou aucun des deux.

1. Une suite commence à 100 et augmente de 15 à chaque étape.
Suite arithmétique de premier terme $u_0 = 100$ et de raison $r = 15$.
 $u_n = 100 + 15n$, donc $u_5 = 100 + 15 \times 5 = 175$.
La suite est **croissante** car $r = 15 > 0$.
2. Une suite commence à 50 et diminue de 2 à chaque étape.
Suite arithmétique de premier terme $u_0 = 50$ et de raison $r = -2$.
 $u_n = 50 - 2n$, donc $u_5 = 50 - 2 \times 5 = 40$.
La suite est **décroissante** car $r = -2 < 0$.
3. Je place 200 € sur un compte et ajoute 50 € chaque mois.
Suite arithmétique de premier terme $u_0 = 200$ et de raison $r = 50$.
 $u_n = 200 + 50n$, donc $u_5 = 200 + 50 \times 5 = 450$ €.
La suite est **croissante** car $r = 50 > 0$.
4. Une population de 1000 individus augmente de 200 puis est divisée par deux chaque année.
 $u_0 = 1000$, $u_1 = (1000 + 200)/2 = 600$, $u_2 = (600 + 200)/2 = 400$.
 $u_3 = 300$, $u_4 = 250$ et $u_5 = (250 + 200)/2 = 225$.
La suite est **décroissante**.

5. Une population de 200 individus augmente de 200 puis est divisée par deux chaque année.

$u_0 = 200$ et $u_1 = (200 + 200)/2 = 200$. La suite est constante, donc $u_5 = 200$.

Une suite constante est à la fois croissante et décroissante.

Exercice 3.

Pour chaque suite arithmétique, identifier le premier terme u_0 et la raison r , puis calculer u_{10} et u_{20} .

1. $u_n = 4n + 7$.

$u_0 = 7$; $r = 4$; $u_{10} = 47$; $u_{20} = 87$.

2. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 5$.

$u_0 = 3$; $r = 5$; $u_{10} = 3 + 5 \times 10 = 53$;
 $u_{20} = 103$.

3. $u_n = -3n + 12$.

$u_0 = 12$; $r = -3$; $u_{10} = -18$; $u_{20} = -48$.

4. $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = u_n - 4$.

$u_0 = 100$; $r = -4$; $u_{10} = 60$; $u_{20} = 20$.

5. $u_n = 2,5n + 8$.

$u_0 = 8$; $r = 2,5$; $u_{10} = 33$; $u_{20} = 58$.

6. $u_0 = 500$ et $u_{n+1} = u_n + 25$.

$u_0 = 500$; $r = 25$; $u_{10} = 750$; $u_{20} = 1000$.

Exercice 4.

Un investisseur place 2 000 € à intérêts simples au taux annuel de 3 %. Chaque année, les intérêts gagnés sont de $2000 \times 0,03 = 60$ €.

On note C_n le capital obtenu après n années.

1. Quelle est la nature de la suite (C_n) ? Justifier.

La suite (C_n) est **arithmétique** car le capital augmente de 60 € chaque année.

2. Donner l'expression de C_n en fonction de n .

$C_0 = 2000$ et $r = 60$, donc $C_n = 2000 + 60n$.

3. Calculer le capital obtenu après 5 années, puis après 10 années.

$C_5 = 2000 + 60 \times 5 = 2300$ € et $C_{10} = 2000 + 60 \times 10 = 2600$ €.

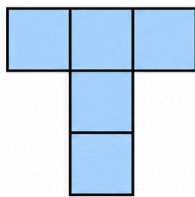
4. Après combien d'années le capital dépassera-t-il 2 500 €?

$2000 + 60n > 2500$, donc $60n > 500$, soit $n > 8,33$.

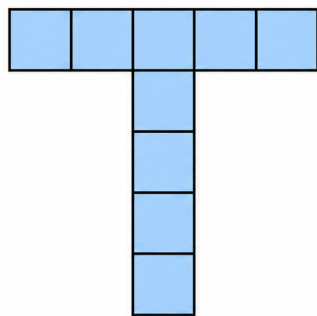
Le capital dépasse 2 500 € après **9 années**.

Exercice 5.

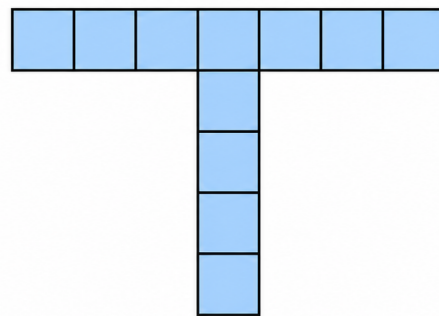
On construit une suite de figures comme suit :



Rang 0 : 5 carrés



Rang 1 : 8 carrés



Rang 2 : 11 carrés

On note u_n le nombre de carrés au rang n .

1. Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .

En observant les figures : $u_0 = 1$; $u_1 = 4$; $u_2 = 7$; $u_3 = 10$.

2. Justifier pourquoi la suite (u_n) est arithmétique.

On ajoute toujours 3 carrés : $4 - 1 = 3$, $7 - 4 = 3$ et $10 - 7 = 3$. La suite est donc arithmétique.

3. Préciser u_0 et r .

$u_0 = 1$ et $r = 3$.

4. Donner l'expression de u_n en fonction de n .

$u_n = 1 + 3n$.

5. Combien de carrés y aura-t-il au rang 10? au rang 20?

$u_{10} = 1 + 3 \times 10 = 31$ carrés et $u_{20} = 1 + 3 \times 20 = 61$ carrés.

Discret ou continu

Exercice 6.

Pour chaque situation, dire si le phénomène est **discret** ou **continu**, puis le modéliser par une suite arithmétique ou une fonction affine.

1. Un compte bancaire reçoit un versement mensuel fixe de 150 € chaque mois. Le solde initial est de 800 €.

Phénomène **discret**. Suite arithmétique : $u_n = 800 + 150n$, où n est le nombre de mois.

2. La température d'un four augmente régulièrement de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ par minute. La température initiale est de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$.
Phénomène **continu**. Fonction affine : $T(t) = 20 + 20t$, où t est le temps en minutes.
3. Un réservoir d'eau se remplit à débit constant de 5 litres par minute. Il contient initialement 50 litres.
Phénomène **continu**. Fonction affine : $V(t) = 50 + 5t$, où t est le temps en minutes.
4. Chaque année, une ville gagne 1 200 habitants. Sa population initiale est de 15 000 habitants.
Phénomène **discret**. Suite arithmétique : $u_n = 15000 + 1200n$, où n est le nombre d'années.
5. Un véhicule roule à vitesse constante de 90 km/h . La distance parcourue dépend du temps écoulé.
Phénomène **continu**. Fonction affine : $d(t) = 90t$, où t est le temps en heures.
6. Un salaire augmente de 50 € tous les mois. Le salaire initial est de $1\,800\text{ €}$.
Phénomène **discret**. Suite arithmétique : $u_n = 1800 + 50n$, où n est le nombre de mois.

Exercice 7.

La relation entre la température en degrés Celsius (C) et en degrés Fahrenheit (F) est donnée par la formule :

$$F = 1,8 \times C + 32$$

1. Justifier pourquoi cette relation est une fonction affine.
Elle est de la forme $F = aC + b$, avec $a = 1,8$ et $b = 32$: c'est donc une fonction affine.
2. Identifier le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.
Le coefficient directeur est $1,8$ et l'ordonnée à l'origine est 32 .
3. Calculer la température en Fahrenheit pour : $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, $10\text{ }^{\circ}\text{C}$, $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $100\text{ }^{\circ}\text{C}$.
 $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ correspond à $32\text{ }^{\circ}\text{F}$; $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ à $50\text{ }^{\circ}\text{F}$; $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ à $68\text{ }^{\circ}\text{F}$; $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ à $212\text{ }^{\circ}\text{F}$.
4. Représenter graphiquement cette fonction pour C variant de 0 à 40.
La représentation est une droite passant, par exemple, par les points $(0; 32)$ et $(40; 104)$.
5. À quelle température en Celsius correspondent $68\text{ }^{\circ}\text{F}$? $212\text{ }^{\circ}\text{F}$?
 $68 = 1,8C + 32$, donc $C = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$.
 $212 = 1,8C + 32$, donc $C = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Exercice 8.

Les scientifiques modélisent l'évolution du niveau moyen des océans par une augmentation linéaire de 3,3 mm par an depuis 2000.

En 2000 (rang $n = 0$), le niveau moyen était de 0 mm (référence).

On note h_n le niveau en mm après n années.

1. Justifier que la suite (h_n) est arithmétique.

Le niveau augmente de 3,3 mm chaque année : la suite (h_n) est donc arithmétique.

2. Préciser h_0 et r .

$h_0 = 0$ et $r = 3,3$.

3. Donner l'expression de h_n en fonction de n .

$h_n = 3,3n$.

4. Calculer le niveau en 2010, puis en 2020.

En 2010, $n = 10$: $h_{10} = 33$ mm. En 2020, $n = 20$: $h_{20} = 66$ mm.

5. Représenter graphiquement les 10 premiers termes de la suite.

On place les points $(n; 3,3n)$ pour n de 0 à 9. Ils sont alignés sur une droite de pente 3,3.

6. Quel sera le niveau en 2030 ? en 2050 ?

En 2030, $h_{30} = 99$ mm. En 2050, $h_{50} = 165$ mm.

Exercice 9.

Sur un marché, l'offre et la demande sont modélisées par des fonctions affines :

- L'offre représente la quantité fabriquée en fonction du prix p :

$$O(p) = 50p - 100$$

- La demande représente la quantité achetée en fonction du prix p :

$$D(p) = -30p + 700$$

1. Calculer l'offre et la demande pour les prix : $p = 5$, $p = 10$, $p = 15$.

$$O(5) = 150 \text{ et } D(5) = 550.$$

$$O(10) = 400 \text{ et } D(10) = 400.$$

$$O(15) = 650 \text{ et } D(15) = 250.$$

2. Représenter graphiquement les deux fonctions pour p variant de 0 à 20.

On trace les droites d'équations $y = 50p - 100$ et $y = -30p + 700$. Elles se coupent au point $(10; 400)$.

3. Le point d'équilibre correspond au prix pour lequel offre = demande. Résoudre l'équation $O(p) = D(p)$.

$$50p - 100 = -30p + 700, \text{ donc } 80p = 800 \text{ et } p = 10.$$

4. Quelle est la quantité échangée à l'équilibre?

$O(10) = D(10) = 400$. La quantité d'équilibre est donc de **400 unités**.

Exercice 10.

On modélise un barème d'impôt simplifié par tranches :

- Pour un revenu R entre 0 et 10 000 € : impôt = 0 €.
- Pour un revenu R entre 10 000 et 30 000 € : impôt = $0,14 \times (R - 10\,000)$.
- Pour un revenu R au-delà de 30 000 € : impôt = $2\,800 + 0,30 \times (R - 30\,000)$.

1. Calculer l'impôt pour les revenus suivants : 8 000 €, 15 000 €, 25 000 €, 35 000 €, 50 000 €.

Pour 8 000 € : 0 €.

Pour 15 000 € : $0,14 \times (15\,000 - 10\,000) = 700$ €.

Pour 25 000 € : $0,14 \times (25\,000 - 10\,000) = 2\,100$ €.

Pour 35 000 € : $2\,800 + 0,30 \times (35\,000 - 30\,000) = 4\,300$ €.

Pour 50 000 € : $2\,800 + 0,30 \times (50\,000 - 30\,000) = 8\,800$ €.

2. Pour la tranche $[0; 10\,000]$ €, l'impôt est-il une fonction affine du revenu? Si oui, préciser le coefficient directeur.

Oui : $I(R) = 0$. Le coefficient directeur est 0.

3. Pour la tranche $[10\,000; 30\,000]$ €, l'impôt est-il une fonction affine du revenu? Si oui, préciser le coefficient directeur.

Oui : $I(R) = 0,14(R - 10\,000) = 0,14R - 1\,400$. Le coefficient directeur est 0,14.

4. Pour la tranche 30 000 € et plus, l'impôt est-il une fonction affine du revenu? Si oui, préciser le coefficient directeur.

Oui : $I(R) = 2\,800 + 0,30(R - 30\,000) = 0,30R - 6\,200$. Le coefficient directeur est 0,30.

Problèmes de seuil

Exercice 11.

Je souhaite acheter un ordinateur coûtant 1 200 €. Je dispose déjà de 300 € et décide d'épargner 75 € par mois.

On note S_n la somme dont elle dispose après n mois.

1. Quelle est la modélisation la plus appropriée, une suite ou une fonction?

Une **suite arithmétique**, car l'épargne évolue mois par mois.

2. Exprimer S_n en fonction de n .

$S_n = 300 + 75n$.

3. Après combien de mois aurais-je suffisamment d'argent?
 $300 + 75n \geq 1200$, donc $75n \geq 900$, soit $n \geq 12$. Il faut **12 mois**.
4. Vérifier en calculant S_n pour la valeur trouvée.
 $S_{12} = 300 + 75 \times 12 = 1200$ €.
5. Si je souhaite acheter l'ordinateur dans exactement 10 mois, combien dois-je épargner par mois (en gardant les 300 € initiaux)?
 $300 + 10x = 1200$, donc $10x = 900$ et $x = 90$. Il faut épargner **90 €** par mois.

Exercice 12.

Une entreprise fabrique des objets. Les coûts de production sont modélisés par :

$$C(n) = 50n + 1\,200$$

où n est le nombre d'objets fabriqués et $C(n)$ le coût total en euros.

Chaque objet est vendu 80 €, donc la recette est :

$$R(n) = 80n$$

1. Quelle est la modélisation la plus appropriée, une suite ou une fonction?
Une **fonction affine**, définie pour les nombres entiers naturels d'objets produits.
2. Calculer le coût et la recette pour $n = 20$, $n = 40$ et $n = 60$.
 $C(20) = 2\,200$ € et $R(20) = 1\,600$ €.
 $C(40) = 3\,200$ € et $R(40) = 3\,200$ €.
 $C(60) = 4\,200$ € et $R(60) = 4\,800$ €.
3. Le bénéfice est donné par $B(n) = R(n) - C(n)$.
Exprimer $B(n)$ en fonction de n .
 $B(n) = 80n - (50n + 1\,200) = 30n - 1\,200$.
4. À partir de combien d'objets vendus l'entreprise fait-elle un bénéfice positif?
 $30n - 1\,200 > 0$, donc $n > 40$. L'entreprise réalise un bénéfice positif à partir de **41 objets**.
5. Combien d'objets faut-il vendre pour obtenir un bénéfice d'au moins 1 000 €?
 $30n - 1\,200 \geq 1\,000$, donc $30n \geq 2\,200$ et $n \geq 73,33$. Il faut vendre au moins **74 objets**.

Exercice 13.

Une ville compte actuellement 25 000 habitants. On modélise sa croissance par une augmentation de 400 habitants par an.

On note P_n la population après n années.

1. Quelle est la modélisation la plus appropriée, une suite ou une fonction?
Une **suite arithmétique**, car l'évolution est comptée année par année.
2. Exprimer P_n en fonction de n .
 $P_n = 25\,000 + 400n$.
3. Quelle sera la population dans 5 ans? dans 10 ans?
 $P_5 = 25\,000 + 400 \times 5 = 27\,000$ habitants et $P_{10} = 25\,000 + 400 \times 10 = 29\,000$ habitants.

4. La ville souhaite construire une nouvelle école lorsque la population dépassera 30 000 habitants. Dans combien d'années cela se produira-t-il?
 $25000 + 400n > 30000$, donc $400n > 5000$, soit $n > 12,5$. Cela se produira dans **13 ans**.
5. Si la ville veut atteindre 35 000 habitants en exactement 15 ans, quel devrait être le nombre d'habitants ajoutés chaque année?
 $25000 + 15x = 35000$, donc $15x = 10000$ et $x \approx 666,67$. Il faudrait ajouter environ **667 habitants par an**.

Exercice 14.

Un réservoir d'eau de capacité 5 000 litres contient initialement 800 litres. On le remplit à débit constant de 120 litres par minute.

On note V_n le volume d'eau (en litres) après n minutes.

1. Quelle est la modélisation la plus appropriée, une suite ou une fonction?
Une **fonction affine**, car le remplissage est un phénomène continu.
2. Exprimer V_n en fonction de n .
 $V_n = 800 + 120n$.
3. Quel volume y aura-t-il après 10 minutes? après 20 minutes?
 $V_{10} = 800 + 120 \times 10 = 2000$ litres et $V_{20} = 800 + 120 \times 20 = 3200$ litres.
4. Dans combien de temps le réservoir sera-t-il plein?
 $800 + 120n = 5000$, donc $120n = 4200$ et $n = 35$. Le réservoir est plein après **35 minutes**.
5. Si on veut remplir le réservoir en exactement 30 minutes, quel débit faut-il utiliser?
 $800 + 30d = 5000$, donc $30d = 4200$ et $d = 140$. Il faut un débit de **140 litres par minute**.

Exercice 15.

Deux entreprises de téléphonie proposent les offres suivantes :

- Offre A : abonnement mensuel de 20 € + 0,15 € par minute d'appel.
- Offre B : abonnement mensuel de 35 € + 0,08 € par minute d'appel.

On note $A(m)$ et $B(m)$ le coût mensuel en fonction du nombre m de minutes d'appel.

1. Quelle est la modélisation la plus appropriée, une suite ou une fonction?
Une **fonction affine**, le coût dépendant du nombre de minutes d'appel.
2. Exprimer $A(m)$ et $B(m)$ en fonction de m .
 $A(m) = 20 + 0,15m$ et $B(m) = 35 + 0,08m$.

3. Calculer le coût pour 100 minutes, 200 minutes et 300 minutes avec chaque offre.
- Pour 100 min : $A(100) = 35 \text{ €}$ et $B(100) = 43 \text{ €}$.
Pour 200 min : $A(200) = 50 \text{ €}$ et $B(200) = 51 \text{ €}$.
Pour 300 min : $A(300) = 65 \text{ €}$ et $B(300) = 59 \text{ €}$.
4. À partir de combien de minutes l'offre B devient-elle plus avantageuse que l'offre A?
- $35 + 0,08m < 20 + 0,15m$, donc $15 < 0,07m$, soit $m > 214,29$.
Pour un nombre entier de minutes, l'offre B devient plus avantageuse à partir de **215 minutes**.
5. Vérifier en calculant les coûts pour cette valeur.
- $A(215) = 20 + 0,15 \times 215 = 52,25 \text{ €}$ et $B(215) = 35 + 0,08 \times 215 = 52,20 \text{ €}$.
L'offre B est bien moins chère.
6. Si un client téléphone en moyenne 250 minutes par mois, quelle offre doit-il choisir?
- $A(250) = 57,50 \text{ €}$ et $B(250) = 55 \text{ €}$. Il doit choisir l'**offre B**.