Épreuve anticipée de mathématiques
Première non spécialité
Fonctions et modélisation

Exercice 1.

On modélise l'altitude d'un projectile en fonction du temps t exprimé en secondes par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

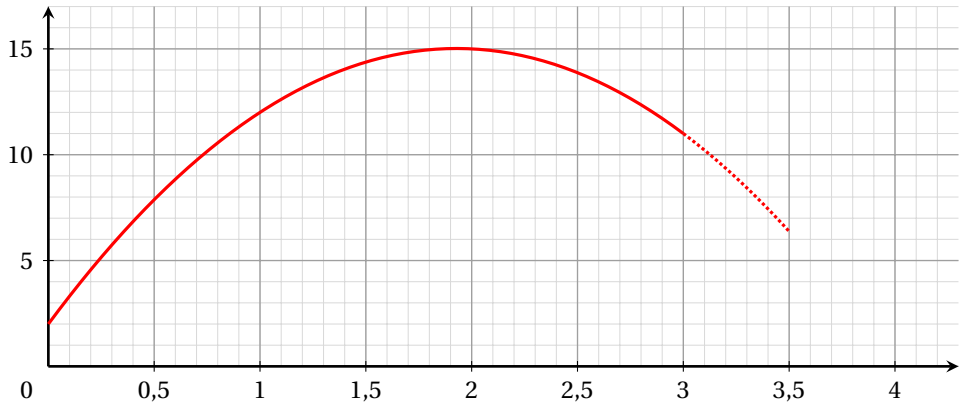
$$f(t) = (2-0,5t)(7t+1)$$

où $f(t)$ est la hauteur, exprimée en mètres.

1. a. Vérifier que $f(t) = -3,5t^2 + 13,5t + 2$, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$.

b. Calculer $f(0)$ et interpréter $f(0)$ dans le contexte de l'énoncé.

2. Ci-dessous, on donne une représentation graphique partielle de la fonction f et son tableau de variation.



t	0		$\frac{27}{14}$		$+\infty$
f	2	↗		↘	

a. Avec la précision permise par le graphique, déterminer l'intervalle de temps sur lequel la hauteur du projectile est supérieure ou égale à 12 m.

b. À quel instant t le projectile touchera-t-il le sol ? Justifier.

Corrigé

Pour $t \in [0\,;\,+\infty[$, $f(t) = (2-0,5t)(7t+1)$ où t est le temps en secondes et $f(t)$ la hauteur du projectile en mètres.

1. a. Pour tout réel t de $[0\,;\,+\infty[$:

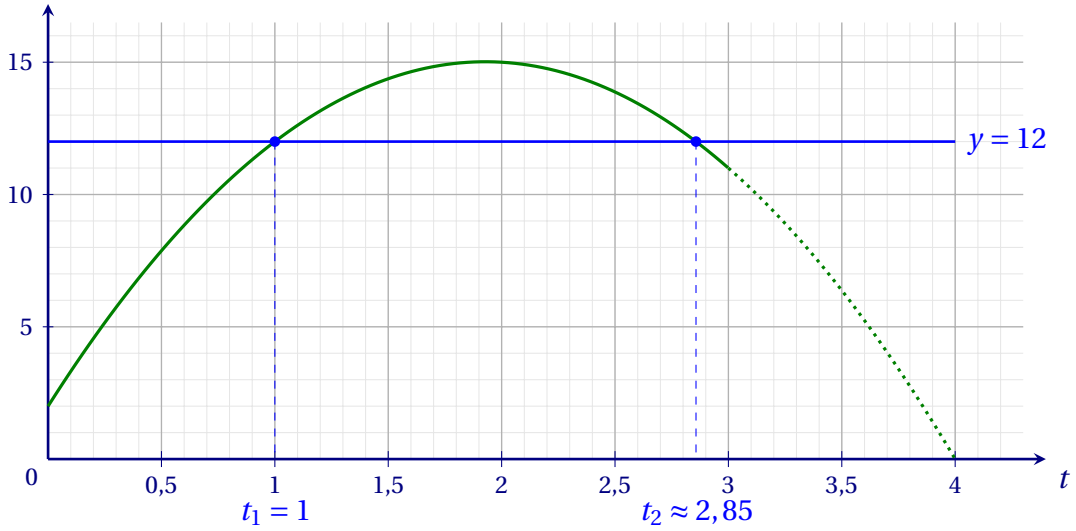
$$f(t) = (2-0,5t)(7t+1) = 2\times 7t + 2\times 1 - 0,5t\times 7t - 0,5t\times 1 = 14t + 2 - 3,5t^2 - 0,5t$$

donc $f(t) = -3,5t^2 + 13,5t + 2$.

b. $f(0) = -3,5\times 0^2 + 13,5\times 0 + 2 = 2$.

Au moment de son lancement, le projectile se trouve à une hauteur de 2 mètres.

2. a. On résout graphiquement l'équation $f(t) = 12$:



Les solutions sont

$$t_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad t_2 \approx 2,85.$$

La hauteur du projectile est supérieure ou égale à 12 m sur l'intervalle de temps $[1;2,85]$ (en secondes).

b. Le projectile touche le sol lorsque sa hauteur s'annule :

$$f(t) = 0 \iff (2-0,5t)(7t+1) = 0 \iff 2-0,5t = 0 \text{ ou } 7t+1 = 0.$$

$$\iff -0.5t = -2 \text{ ou } 7t = -1$$

$$\iff t = 4 \text{ ou } t = -\frac{1}{7}$$

Seule la solution $t = 4$ appartient à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Le projectile touche le sol 4 secondes après son lancement.

Exercice 2.

Des biologistes étudient une population de bactéries. On modélise l'évolution de cette population par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(t) = 10 \times 1,15^t$ où t est exprimé en heure et $f(t)$ en **milliers** de bactéries.
L'expérience débute quand $t = 0$.

1. **a.** Calculer le nombre de bactéries, exprimé en milliers, au début de l'expérience.
   b. Calculer le nombre de bactéries, exprimé en milliers, au bout d'une heure.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$ en justifiant.
3. On a $f(1,5) \approx 12,332$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'expérience.

Corrigé

Pour $t \in [0\,;\,+\infty[$, $f(t) = 10 \times 1,15^t$ où t est exprimé en heures et $f(t)$ en milliers de bactéries.

1. **a.** Au début de l'expérience, $t = 0$. $f(0) = 10 \times 1,15^0 = 10 \times 1 = 10$.
   Au début de l'expérience, la population compte 10 milliers de bactéries, soit 10 000 bactéries.
   b. $f(1) = 10 \times 1,15 = 11,5$.
   Au bout d'une heure, la population compte 11,5 milliers de bactéries, soit 11 500 bactéries.
2. Une fonction de la forme $t \longmapsto k \times a^t$ avec $k > 0$ et $a > 0$ est croissante si $a > 1$ et décroissante si $0 < a < 1$.
   Ici $k = 10 > 0$ et $a = 1,15 > 1$: la fonction f est **croissante** sur $[0;+\infty[$.
3. $t = 1,5$ h correspond à 1 h 30 min et $f(t)$ s'exprime en milliers de bactéries.
   Au bout d'une heure et demie, la population compte environ 12 332 bactéries.

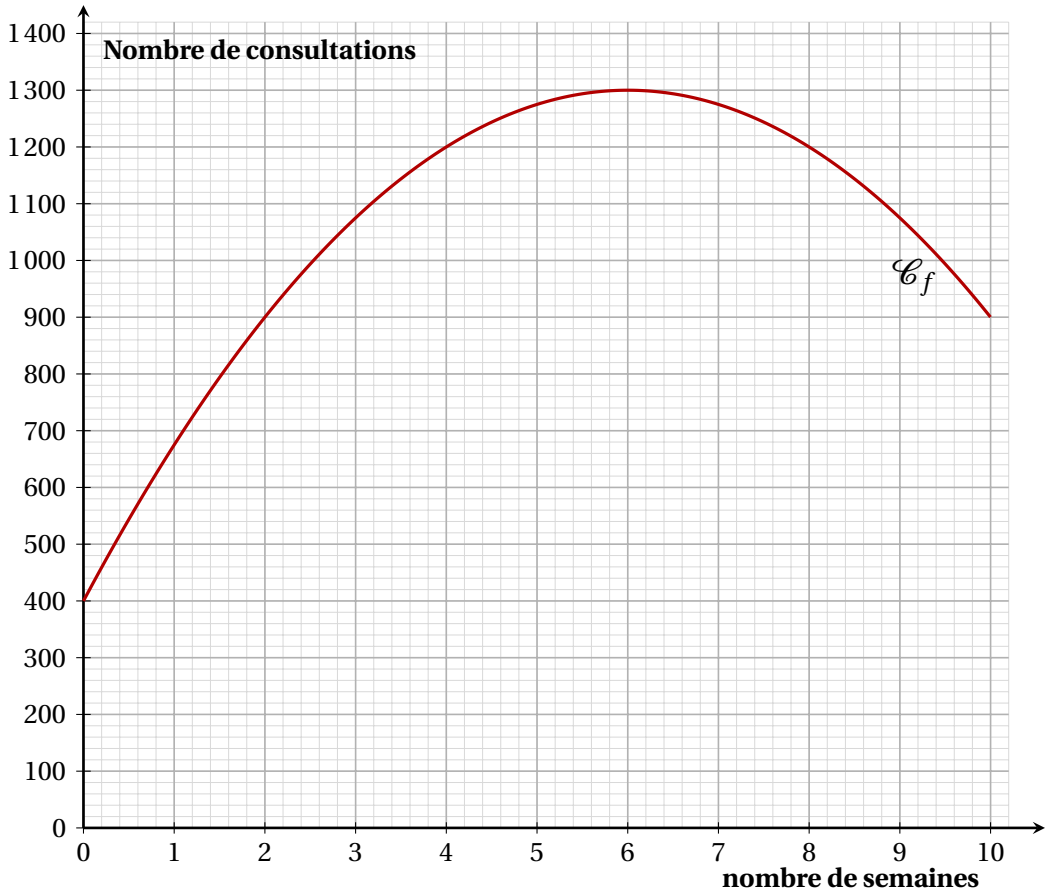
Exercice 3.

Le nombre hebdomadaire de consultations lors d'une épidémie de grippe saisonnière, pendant 10 semaines consécutives, est modélisé par la fonction f, définie sur l'intervalle $[0;10]$ par :
$f(t) = -25t^2 + 300t + 400$ où t représente le nombre de semaines écoulées depuis le début de l'épidémie.
La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère du plan.

Partie A : lecture graphique

En utilisant le graphique ci-dessus :

1. Déterminer le nombre de consultations 2 semaines après le début de l'épidémie.
2. Déterminer l'intervalle de temps pour lequel le nombre de consultations dépasse 1 200.
3. Au bout de combien de semaines après le début de l'épidémie le nombre de consultations est-il maximal ? Quelle est cette valeur maximale ?


Nombre de consultations
1 400
1 300
1 200
1 100
1 000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
nombre de semaines
$\mathscr{C}_f$

Partie B : Étude de la fonction f

1. Calculer $f(0)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Justifier que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,10]$, $f'(t) = -50t + 300$.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,10]$ l'équation $f'(t) = 0$.
4. Étudier le signe de $f'(t)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$. On donne $f(6) = 1\,300$.

ANNEXE À COMPLÉTER ET À RENDRE AVEC LA COPIE

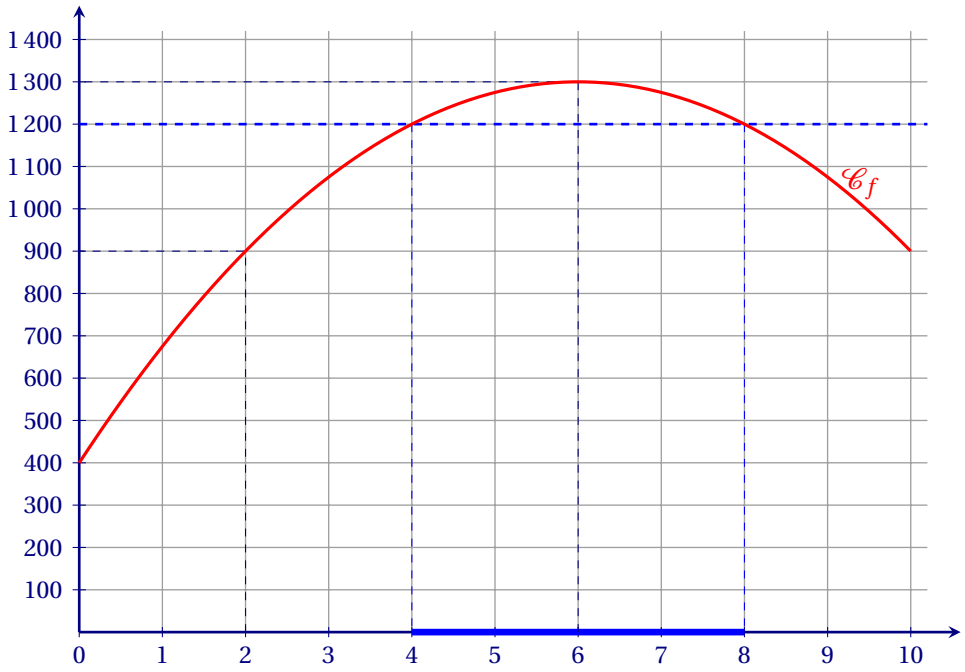
Annexe de l'exercice 2

	Achat sur internet (I)	**Achat en magasin** $(\overline{I})$	**Total**
Satisfait (S)			
Non satisfait $(\overline{S})$			
Total	400		1 000

Corrigé

Pour $t \in [0\,;\,10]$, $f(t) = -25t^2 + 300t + 400$ où t est le nombre de semaines écoulées depuis le début de l'épidémie et $f(t)$ le nombre hebdomadaire de consultations.

Partie A



1. Par lecture graphique, $f(2) \approx 900$.
   Deux semaines après le début de l'épidémie, il y a environ 900 consultations dans la semaine.

2. La courbe coupe la droite d'équation $y = 1\,200$ aux points d'abscisses 4 et 8, et se situe au-dessus entre ces deux valeurs.

Le nombre de consultations dépasse 1 200 pour $t \in]4\,;\,8[$, c'est-à-dire entre la 4e et la 8e semaine après le début de l'épidémie.

3. Le sommet de la parabole a pour coordonnées $(6\,;\,1\,300)$.

Le nombre de consultations est maximal au bout de 6 semaines ; il atteint alors 1 300 consultations dans la semaine.

Partie B

1. $f(0) = -25 \times 0^2 + 300 \times 0 + 400 = 400$.

Au début de l'épidémie, on compte 400 consultations dans la semaine.

2. Pour tout réel t de $[0\,;\,10]$, $f'(t) = -25 \times 2t + 300 \times 1 + 0 = -50t + 300$.

3. $f'(t) = 0 \iff -50t + 300 = 0 \iff -50t = -300 \iff t = \dfrac{-300}{-50} = 6$.

$S = \{6\}$.

4. $f'(t) = -50t + 300$ est une expression affine de coefficient directeur $-50 < 0$: elle est positive avant 6 et négative après.

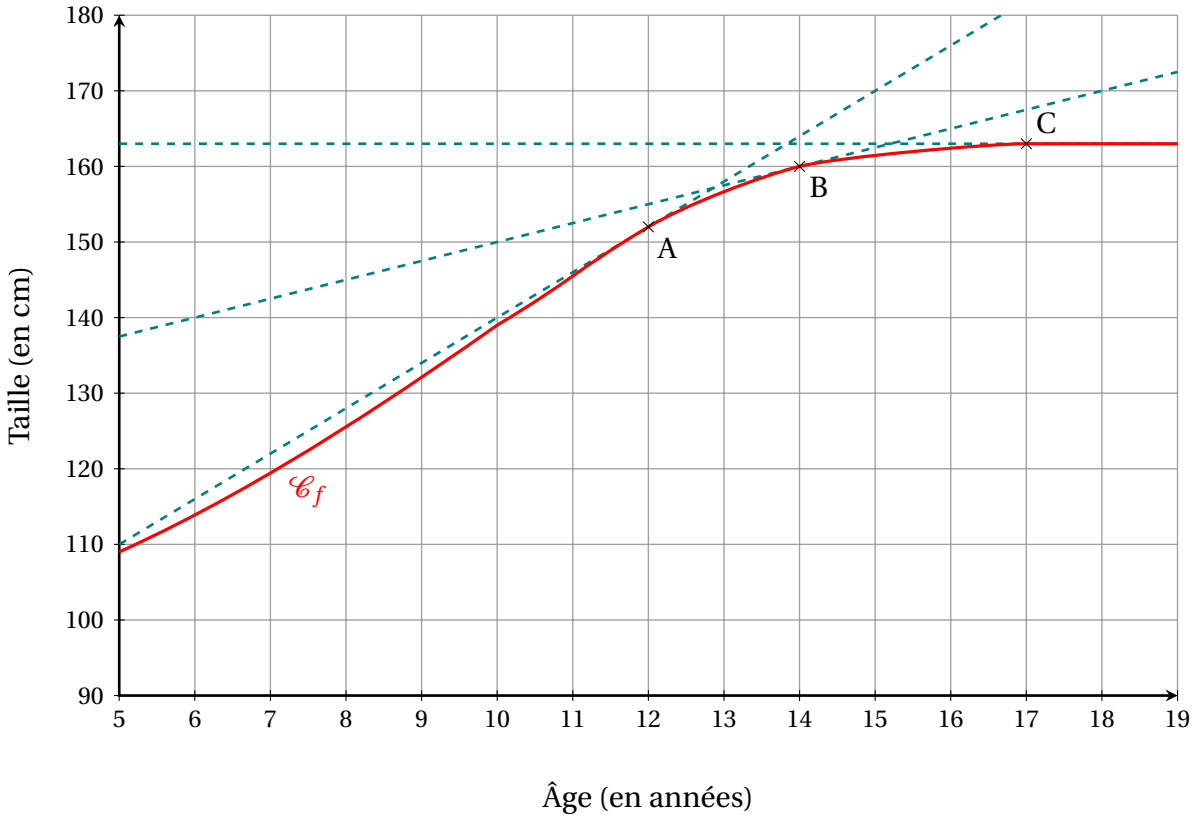
$f(0) = 400$, $f(6) = 1\,300$ et $f(10) = -2\,500 + 3\,000 + 400 = 900$.

t	0		6		10
$f'(t)$		+	0	−	
f	400	↗	1 300	↘	900

La fonction f est croissante sur $[0\,;\,6]$ et décroissante sur $[6\,;\,10]$. Elle admet un maximum égal à 1 300 en $t = 6$.

Exercice 4.

Cet exercice s'intéresse à la croissance d'une personne appelée Juliette. Sa croissance est modélisée par la fonction f, représentée ci-dessous.
La **vitesse de croissance** de Juliette (en cm par an) à une date donnée t est égale au **nombre dérivé $f'(t)$**.
On a également représenté trois tangentes à la courbe représentative de f : celles aux points A, B et C.



On répondra aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique :

1. Estimer la taille de Juliette le jour de ses 14 ans.

2. À quel âge Juliette grandissait-elle le plus vite, à 12 ans ou à 14 ans ? *Justifier.*

3. Pourquoi peut-on considérer que Juliette a terminé sa croissance à 17 ans ?

4. Estimer la taille adulte de Juliette.

Corrigé

1. le jour de ses quatorze ans, Juliette mesure environ 160 cm (c'est le point B du graphique).

2. L'âge de 12 ans correspond au point A. On constate que la pente de la tangente en ce point est plus forte que celle de la tangente en B : donc Juliette grandissait plus vite à 12 ans qu'à 14 ans.

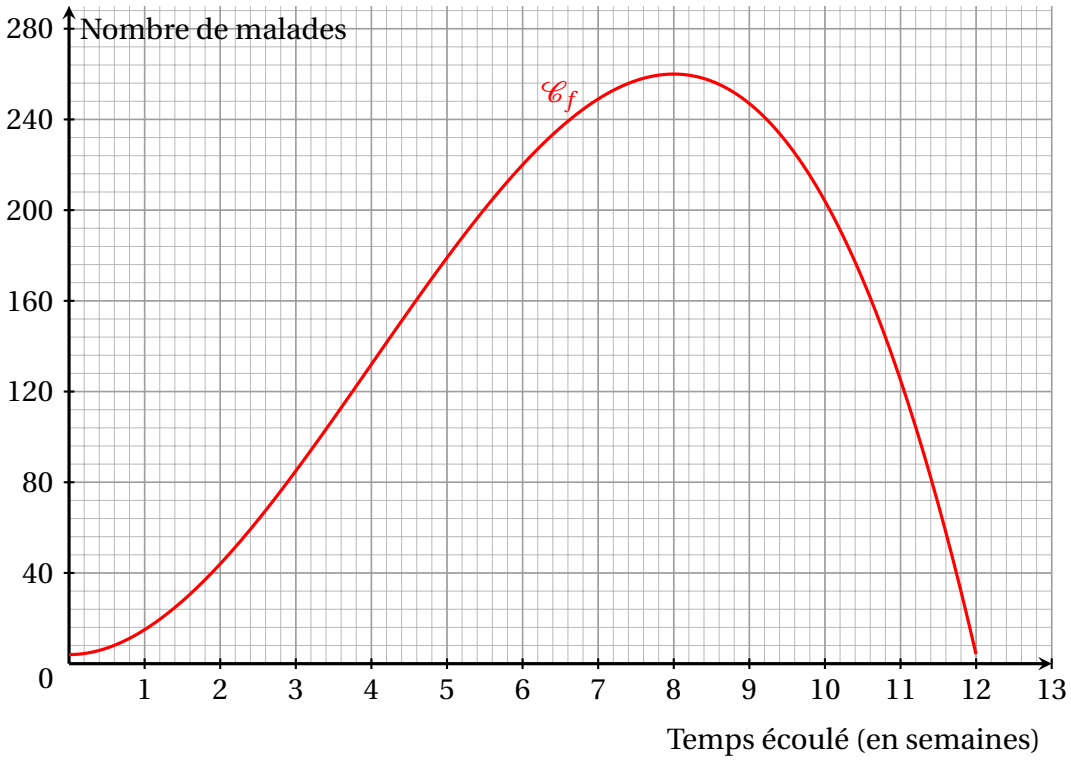
3. Le point C correspond à l'âge de 17 ans, et en ce point la tangente est manifestement horizontale : cela signifie que Juliette ne grandit plus et que sa croissance est terminée.

4. Puisque la croissance de Juliette est terminée à 17 ans, elle gardera comme taille adulte la taille de ses 17 ans : environ 163 cm.

Exercice 5.

Aide au calcul pour cet exercice : $8^3 = 512$; $12 \times 8^2 = 768$

Dans une ville, l'évolution d'une épidémie en fonction du temps écoulé x, exprimé en semaines depuis le début de l'épidémie, est modélisée par une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,12]$.
Pour tout nombre réel x compris entre 0 et 12, $f(x)$ désigne le nombre de malades observés à l'instant x.
La courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$, est donnée dans le repère du plan ci-dessous.



1. Lecture graphique

a. Avec la précision permise par le graphique, lire $f(5)$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

b. Déterminer graphiquement la semaine où a eu lieu le pic de l'épidémie.
Avec la précision permise par le graphique, déterminer le nombre de malades cette semaine-là.

2. On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie par :

$$f(x) = -x^3 + 12x^2 + 4$$

a. Calculer $f(1)$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

b. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,12]$,

$$f'(x) = 3x(-x+8).$$

c. Compléter et rendre avec la copie le tableau donné en annexe.

d. Déterminer la valeur exacte du nombre de malades la semaine où a eu lieu le pic de l'épidémie.

Annexe à rendre avec la copie

Annexe de l'exercice 3

x	0	12
Signe de $3x$		
Signe de $(-x+8)$		
Signe de $f'(x)$		
Variations de f		

Corrigé

1. Par lecture graphique :

a. $f(5) \approx 180$. La cinquième semaine le nombre de malades est proche de 180.

b. Le pic est atteint pour $x = 8$, donc lors de la huitième semaine de l'épidémie.
Le nombre maximum de malades est entre 240 et 280, environ 260.

2. **a.** $f(1) = -1^3 + 12 \times 1^2 + 4 = -1 + 12 + 4 = 15$.
Selon ce modèle, 15 personnes sont malades à la fin de la première semaine.

b. Pour tout réel x de l'intervalle $[0;12]$, $f'(x) = (-1) \times 3x^2 + 12 \times 2x = -3x^2 + 24x$.
et $3x(-x+8) = -3x^2 + 24x$.
Ainsi $f'(x) = 3x(-x+8)$.

c. $f(0) = -0^3 + 12 \times 0^2 + 4 = 4$
$f(12) = -12^3 + 12 \times 12^2 + 4 = -12^3 + 12^3 + 4 = 4$
Pour tout $x \in]0;12]$, $3x > 0$
$-x+8 = 0 \iff 8 = x$ et $-x+8 > 0 \iff 8 > x$
$\iff x = 8$ $\iff x < 8$

x	0		8		12
Signe de $3x$	0	$+$		$+$	
Signe de $(-x+8)$		$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	4	↗	$f(8)$	↘	4

d. Déterminer la valeur exacte du nombre de malades la semaine où a eu lieu le pic de l'épidémie.

Le maximum est atteint pour $x = 8$.

$f(8) = -8^3 + 12 \times 8^2 + 4 = -512 + 768 + 4 = 256 + 4 = 260$

Le maximum du nombre de malades est $f(8) = 260$

Exercice 6.

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[0\,;10]$ par :

$$f(x) = -x^3 + 4{,}5\,x^2 - 6x + 2$$

1. Calculer l'expression de la dérivée f' en fonction de x.

2. Vérifier que, pour x appartenant à $[0\,;10]$,

$$f'(x) = (3x-6)(1-x)$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $[0\,;10]$.

4. En déduire les variations de f sur $[0\,;10]$.

Les valeurs des éventuels maximums et minimums ne sont pas demandées.

Corrigé

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[0\,;10]$ par : $f(x) = -x^3 + 4{,}5\,x^2 - 6x + 2$.

1. Calculer l'expression de la dérivée f' en fonction de x.

On utilise la dérivation d'une somme de fonctions dérivables.

$f'(x) = (-1) \times 3x^2 + 4{,}5 \times 2x - 6 = -3x^2 + 9x - 6$

2. Vérifier que, pour x appartenant à $[0;10]$, $f'(x) = (3x-6)(1-x)$.
On développe l'expression :
$(3x-6)(1-x) = 3x \times 1 + 3x \times (-x) + (-6) \times 1 (-6) \times (-x)$
On réduit les produits :
$(3x-6)(1-x) = 3x - 3x^2 - 6 + 6x$
On réduit les sommes :
$(3x-6)(1-x) = -3x^2 + 9x - 6$
Donc $f'(x) = (3x-6)(1-x)$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $[0;10]$.
Pour étudier le signe de $f'(x)$, on étudie le signe de chacun des facteurs de l'expression factorisée de $f'(x) = (3x-6)(1-x)$.

Signe de $3x-6$

$3x-6 = 0 \iff 3x = 6 \iff x = 2$

$3x-6 > 0 \iff 3x > 6 \iff x > 2$

Signe de $1-x$

$1-x = 0 \iff 1 = x \iff x = 1$

$1-x > 0 \iff 1 > x \iff x < 1$

Alternative :
La fonction qui à x associe $3x-6$ est une fonction affine croissante (car $3>0$), donc $3x-6$ est négatif pour x inférieur à la racine (déterminée précédemment).
La fonction qui à x associe $1-x$ est une fonction affine décroissante (car $-1<0$), donc $1-x$ est positif pour x inférieur à la racine (déterminée précédemment).
On forme le tableau de signes :

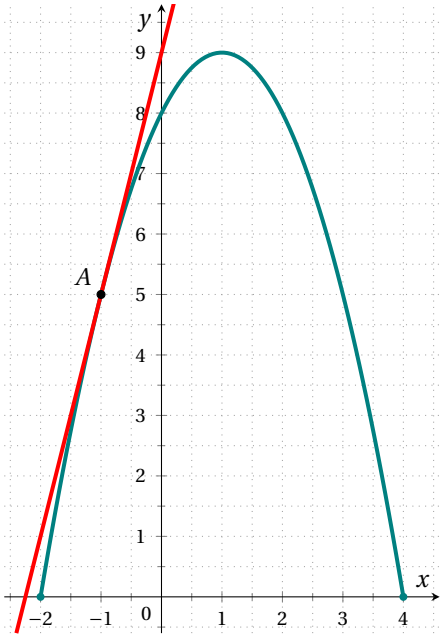
x	0		1		2		10
$3x-6$		$-$		$+$	0	$+$	
$1-x$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. En déduire les variations de f sur $[0;10]$.
Les valeurs des éventuels maximums et minimums ne sont pas demandées.
Sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f'(x) \leqslant 0$ et donc f est décroissante.
Sur l'intervalle $[1\,;\,2]$, $f'(x) \geqslant 0$ et donc f est croissante. (minimum local en 1)
Sur l'intervalle $[2\,;\,10]$, $f'(x) \leqslant 0$ et donc f est décroissante. (maximum local en 2)

x	0		1		2		10
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation de f	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(10)$

Exercice 7.

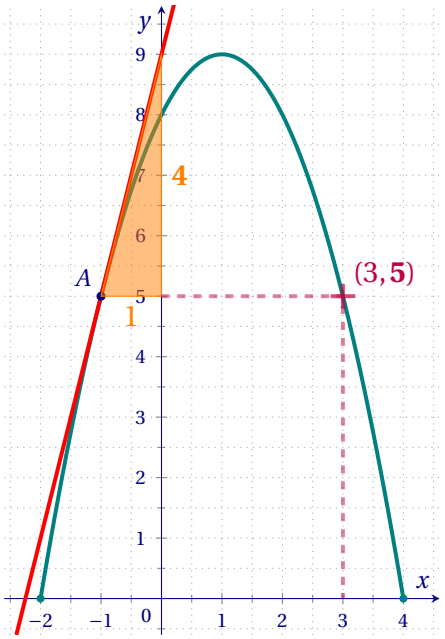
On considère ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2\,;\,4]$. On a également tracé sa tangente au point A d'abscisse -1.



1. Par lecture graphique, donner la valeur de :
   a. $f(3)$
   b. $f'(-1)$
2. On admet que la fonction f est définie sur $[-2\,;\,4]$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.
   a. Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $[-2\,;\,4]$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-2\,;\,4]$.
3. Donner les variations de f sur $[-2\,;\,4]$.

Corrigé

On considère ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2\,;\,4]$. On a également tracé sa tangente au point A d'abscisse -1.



1. Par lecture graphique, donner la valeur de :
   a. $f(3)$
   $f(3) \approx 5$
   b. $f'(-1)$
   $f'(-1)$ est donné par le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse -1.
   $f'(-1) \approx 4$
2. On admet que la fonction f est définie sur $[-2\,;\,4]$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.
   a. Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $[-2\,;\,4]$.
   $f'(x) = -(2 \times x) + 2 \times 1 = -2x + 2$
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-2\,;\,4]$.

$$-2x+2=0 \iff 2x=2$$
$$\iff x=1$$

La fonction f' est la restriction d'une fonction affine sur $[-2\ ;\ 4]$. Le taux d'accroissement est négatif donc elle est décroissante. Elle admet pour racine le nombre 1. Ainsi $f'(x)$ est positif si x est inférieur à 1 et négatif si x est supérieur à 1.

3. Donner les variations de f sur $[-2\ ;\ 4]$.

$f(-2) = -(-2)^2 + 2\times(-2) + 8 = -4 - 4 + 8 = 0$

$f(4) = -4^2 + 2\times 4 + 8 = -16 + 8 + 8 = 0$

$f(1) = -1^2 + 2\times 1 + 8 = -1 + 2 + 8 = 9$

x	-2		1		4
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de $f(x)$	0	↗	9	↘	0

Exercice 8.

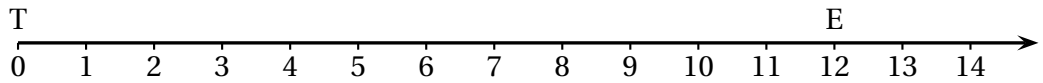
— Sur un axe gradué en mètres, on organise une course entre une tortue et un escargot.

— La tortue part du point d'abscisse $x = 0$. Elle se déplace vers la droite à une vitesse de 2 mètres par minute.

— L'escargot part du point d'abscisse $x = 12$. Il se déplace vers la droite à une vitesse de 50 centimètres par minute.

— Les deux concurrents partent en même temps.

À quel endroit la tortue T rattrapera-t-elle l'escargot E?



Corrigé

- Sur un axe gradué en mètres, on organise une course entre une tortue et un escargot.
- La tortue part du point d'abscisse $x = 0$.
  Elle se déplace vers la droite à une vitesse de 2 mètres par minute.
- L'escargot part du point d'abscisse $x = 12$.
  Il se déplace vers la droite à une vitesse de 50 centimètres par minute.

- Les deux concurrents partent en même temps.



D'après les données :
- l'abscisse de T au bout de x minutes est $2x$;
- l'abscisse de E au bout de x minutes est $12+0,5x$.

La tortue rejoint l'escargot quand $2x = 12+0,5x$, soit $2x-0,5x = 12$ soit $1,5x = 12$ ou encore $x = \dfrac{12}{1,5}$, c'est-à-dire pour $x = 8$. La distance parcourue alors est de $2 \times 8 = 16$.
La tortue rattrape l'escargot au bout de 8 minutes, donc au point d'abscisse 16.