Épreuve anticipée de mathématiques
Première non spécialité
Proportions et probabilités

Exercice 1.

Le jeu de fléchettes oppose deux joueurs et une partie se déroule en plusieurs manches. Les joueurs débutent les manches à tour de rôle. On désigne à pile ou face, avec une pièce équilibrée, la personne qui débute la première manche.
On a étudié les parties entre Pierre et Vanessa et on a constaté que lorsque Pierre joue en premier, il gagne la manche 2 fois sur 3 et lorsqu'il joue en second, il gagne la manche 2 fois sur 5.
On note les évènements :

A : « Pierre joue la manche en premier » ;

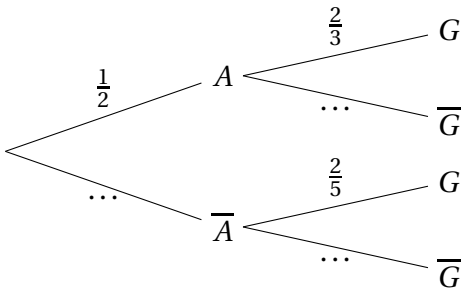
$\overline{A}$: « Pierre joue la manche en second » ;

G : « Pierre gagne la manche » ;

$\overline{G}$: « Pierre perd la manche ».

Pour un évènement quelconque E, on note $P(E)$ la probabilité de E et $P_F(E)$ la probabilité de E sachant l'évènement F.
Dans toute la suite, on s'intéresse à la première manche de la partie.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités correspondant :



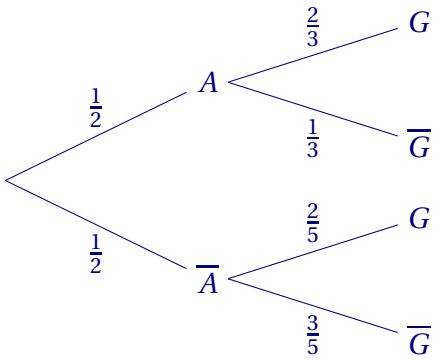
2. Donner $P_A(G)$ et $P_{\overline{A}}(G)$.

3. Calculer $P(A \cap G)$. Interpréter cette probabilité dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

On note A l'évènement « Pierre joue la manche en premier » et G l'évènement « Pierre gagne la manche ». On a $P(A) = P\left(\overline{A}\right) = \frac{1}{2}$, $P_A(G) = \frac{2}{3}$ et $P_{\overline{A}}(G) = \frac{2}{5}$.

1. La somme des probabilités issues d'un même nœud vaut 1 : $P_A\left(\overline{G}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ et $P_{\overline{A}}\left(\overline{G}\right) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.



2. D'après l'énoncé : $P_A(G) = \dfrac{2}{3}$ et $P_{\overline{A}}(G) = \dfrac{2}{5}$.

3. $P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

La probabilité que Pierre joue la manche en premier et qu'il la gagne est égale à $\dfrac{1}{3}$.

Exercice 2.

Une étude a été réalisée sur la qualité de l'eau dans une région, en prélevant des échantillons dans deux types de milieux : des rivières et des lacs. Chaque échantillon a ensuite été analysé et classé comme de qualité « satisfaisante » ou « insatisfaisante » selon les normes en vigueur.
Voici les données recueillies à partir d'un total de 500 échantillons analysés :

- 300 échantillons provenaient de rivières ;
- parmi les échantillons prélevés dans les lacs, 80 étaient classés de qualité « insatisfaisante » ;
- au total, 280 échantillons étaient classés de qualité « satisfaisante ».

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Rivière	Lac	Total
Qualité satisfaisante			
Qualité insatisfaisante			
Total			500

2. On choisit un échantillon d'eau au hasard parmi les 500 échantillons analysés.
On note les évènements suivants :

S : « l'échantillon choisi est classé de qualité satisfaisante » ;

R : « l'échantillon choisi provient d'une rivière ».

Pour un évènement quelconque E : on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E et $P(E)$ la probabilité de E.

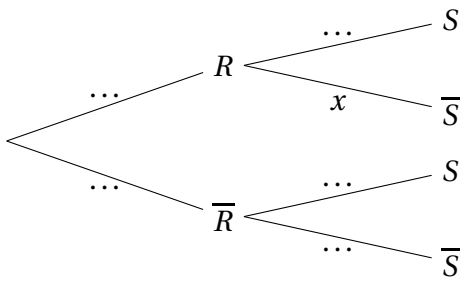
On donnera les résultats sous forme de fraction.

a. Quelle est la probabilité que l'échantillon provienne d'une rivière ?

b. Décrire l'évènement $\overline{S}$ par une phrase puis justifier que $P\left(\overline{S}\right) = \dfrac{11}{25}$.

c. Calculer $P\left(S \cap \overline{R}\right)$, puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

3. La situation est représentée par l'arbre pondéré ci-dessous :



a. Traduire la probabilité x en utilisant les évènements $\overline{S}$ et R.

b. Vérifier que $x = \dfrac{7}{15}$.

c. Recopier et compléter entièrement l'arbre.

4. Les évènements « l'échantillon provient d'une rivière » et « l'échantillon est de qualité insatisfaisante » sont-ils indépendants ?

Corrigé

1. On complète le tableau par différences : lacs $= 500-300 = 200$; lacs satisfaisants $= 200-80 = 120$; rivières satisfaisantes $= 280-120 = 160$; rivières insatisfaisantes $= 300-160 = 140$; insatisfaisants $= 500-280 = 220$.

	Rivière	Lac	Total
Qualité satisfaisante	**160**	**120**	280
Qualité insatisfaisante	**140**	80	**220**
Total	300	**200**	500

2. Le choix se fait au hasard : on est en situation d'équiprobabilité.

a. $P(R) = \dfrac{300}{500} = \dfrac{3}{5}$.

La probabilité que l'échantillon provienne d'une rivière est de $\frac{3}{5}$.

b. $\overline{S}$: « l'échantillon choisi est classé de qualité insatisfaisante ».

$$P\left(\overline{S}\right) = \frac{220}{500} = \frac{10 \times 2 \times 11}{10 \times 2 \times 25} = \frac{11}{25}.$$

c. $S \cap \overline{R}$ est l'évènement « l'échantillon est de qualité satisfaisante et provient d'un lac ».

$$P\left(S \cap \overline{R}\right) = \frac{120}{500} = \frac{10 \times 2 \times 6}{10 \times 2 \times 25} = \frac{6}{25}.$$

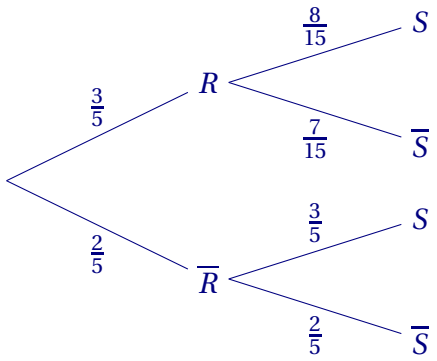
La probabilité que l'échantillon choisi provienne d'un lac et soit de qualité satisfaisante est égale à $\dfrac{6}{25}$.

3. a. $x = P_R\left(\overline{S}\right)$ est la probabilité que l'échantillon soit de qualité insatisfaisante sachant qu'il provient d'une rivière.

b. Parmi les 300 échantillons provenant d'une rivière, 140 sont de qualité insatisfaisante :

$$x = P_R\left(\overline{S}\right) = \frac{140}{300} = \frac{10 \times 2 \times 7}{10 \times 2 \times 15} = \frac{7}{15}.$$

c. $P\left(\overline{R}\right) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$; $P_R(S) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$; $P_{\overline{R}}(S) = \frac{120}{200} = \frac{3}{5}$ et $P_{\overline{R}}\left(\overline{S}\right) = \frac{80}{200} = \frac{2}{5}$.



4. Les évènements R et $\overline{S}$ sont indépendants si et seulement si $P\left(R \cap \overline{S}\right) = P(R) \times P\left(\overline{S}\right)$.

D'une part $P\left(R \cap \overline{S}\right) = \frac{140}{500} = \frac{7}{25} = \frac{35}{125}$; d'autre part $P(R) \times P\left(\overline{S}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{11}{25} = \frac{33}{125}$.

Comme $\frac{35}{125} \neq \frac{33}{125}$, l'égalité n'est pas vérifiée.

Les évènements « l'échantillon provient d'une rivière » et « l'échantillon est de qualité insatisfaisante » ne sont **pas indépendants**.

Exercice 3.

Un magasin d'ameublement interroge 1 000 clients ayant réalisé un achat au cours des 12 derniers mois, soit en magasin, soit sur internet (un seul mode d'achat par client).

Parmi les 1 000 clients, 400 ont acheté sur internet.
90 % des acheteurs sur internet sont satisfaits et 20 % des acheteurs en magasin ne sont pas satisfaits.

On choisit au hasard un client et on considère les évènements :

- I : « le client a acheté sur internet » ;
- S : « le client est satisfait » ;

$\overline{I}$ et $\overline{S}$ sont les évènements contraires respectifs de I et de S.

1. Compléter et rendre avec la copie le tableau représentant la situation, donné en annexe.

2. Calculer la probabilité que le client ait acheté en magasin et soit satisfait.

3. Sachant que le client n'est pas satisfait, calculer la probabilité qu'il ait fait son achat sur internet.

4. Une stratégie d'amélioration sera mise en place si plus de 10 % des clients ne sont pas satisfaits de leur achat.
Cette stratégie sera-t-elle mise en place ? Justifier.

Corrigé

On note I l'évènement « le client a acheté sur internet » et S l'évènement « le client est satisfait ».

1. Acheteurs en magasin : $1\,000 - 400 = 600$.

Internet et satisfaits : $0,9 \times 400 = 360$, donc internet et non satisfaits : $400 - 360 = 40$.

Magasin et non satisfaits : $0,2 \times 600 = 120$, donc magasin et satisfaits : $600 - 120 = 480$.

	Achat sur internet (I)	Achat en magasin ($\overline{I}$)	Total
Satisfait (S)	360	480	840
Non satisfait ($\overline{S}$)	40	120	160
Total	400	600	1 000

2. Le client étant choisi au hasard, on est en situation d'équiprobabilité. La probabilité que le client ait acheté en magasin et soit satisfait est $P\left(\overline{I} \cap S\right)$.

$$P\left(\overline{I} \cap S\right) = \frac{480}{1\,000} = 0,48.$$

La probabilité que le client ait acheté en magasin et soit satisfait est égale à $0,48$.

3. Parmi les 160 clients non satisfaits, 40 ont acheté sur internet :

$$P_{\overline{S}}(I) = \frac{40}{160} = 0,25.$$

Sachant que le client n'est pas satisfait, la probabilité qu'il ait acheté sur internet est égale à $0,25$.

4. La proportion de clients non satisfaits est $\dfrac{160}{1\,000} = 0,16 = 16\,\%$.

Or $16\,\% > 10\,\%$: la stratégie d'amélioration sera mise en place.

Exercice 4.

Dans un lycée, des élèves de première souhaitent installer des vélos générateurs d'électricité dans la cafétéria pour recharger des téléphones portables.
À l'aide des quatre documents ci-dessous, indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. **Chaque réponse devra être justifiée**.

Affirmation 1 : Le budget du lycée permet de financer cinq vélos générateurs d'électricité (vélo, chargeur et livraison).

Affirmation 2 : Il faut pédaler pendant 24 minutes à intensité modérée pour recharger un téléphone portable à l'aide d'un vélo générateur d'électricité.

Affirmation 3 : On choisit au hasard un élève du lycée.
La probabilité que l'élève choisi soit un élève de première en sachant qu'il est favorable au projet est supérieure à un quart.

Affirmation 4 : Le projet des élèves de première va pouvoir être lancé.

Documents

Document 1 : Fiche d'un vélo générateur d'électricité

Tarifs pour l'installation de vélos générateurs d'électricité

- Coût d'un vélo sans chargeur : 300 €
- Coût du chargeur, pour chaque vélo : 45 €
- Coût de livraison par vélo : 60 €

Énergie produite par un vélo générateur d'électricité

Lorsqu'une personne pédale à intensité modérée pendant une heure, le dispositif permet de récupérer 100 kJ (kilojoules).

Document 2 : Énergie nécessaire pour charger quelques appareils

Appareils électroniques	Ordinateur portable	Casque audio	Téléphone portable	Montre connectée
Énergie moyenne nécessaire pour une charge complète	200 kJ	18 kJ	40 kJ	5 kJ

Document 3 : Résultats du sondage réalisé auprès des élèves du lycée sur les vélos générateurs d'électricité

	Favorable	Défavorable	Total
Seconde	260	170	430
Première	180	120	300
Terminale	120	150	270
Total	560	440	1000

Document 4 : Message de la proviseure du lycée aux élèves porteurs du projet

Objet : Lancement du projet "vélos générateurs d'électricité" – conditions à remplir

Chers élèves de première,

Ce projet ne pourra être lancé que si les **deux critères suivants sont remplis** :

- **plus de la moitié des élèves du lycée** doivent se déclarer favorables à cette initiative ;
- **au moins** 60 % **des élèves de première** doivent également y être **favorables**.

  Dans le cas où le projet serait validé, **le budget du lycée sera fixé à 2 000** e pour financer l'achat des vélos et des chargeurs ainsi que la livraison des vélos.

Bien cordialement,

La Proviseure

Corrigé

Affirmation 1 : Fausse.

Le budget total pour un vélo est égal à $300 + 45 + 60 = 405$ €(document n°1), soit plus de 400 €.
Donc, pour cinq vélos, le montant serait 2 025 e, supérieur à 2 000 €, qui est le montant maximum prévu par la proviseure (document n°4).
On ne pourra pas installer cinq vélos avec ce budget, l'affirmation est fausse.

Affirmation 2 : Vraie.

En pédalant pendant une heure (60 minutes), on récupère 100 kJ (document n°1).
Il y a une relation de proportionnalité entre la durée du pédalage et l'énergie récupérée.
Pour charger un téléphone portable, il faut 40 kJ (document n°2) :

durée	60	x
énergie	100	40

Il faut $\frac{40 \times 60}{100} = \frac{2\,400}{100} = 24$ minutes de pédalage pour récupérer 40 kJ, et ainsi pouvoir charger un téléphone portable, donc l'affirmation est vraie.

Affirmation 3 : Vraie.

Comme on choisit un élève au hasard, on est en situation d'équiprobabilité, donc les proportions sont assimilables à des probabilités.
Parmi les 560 élèves favorables au projet, 180 sont des élèves de première (document n°3), donc la probabilité recherchée est $\frac{180}{560} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$.
On se souvient que $7 \times 4 = 28$: le quart de 28 est donc 7, et donc $\frac{9}{28}$ est plus grand qu'un quart, l'affirmation est vraie.

Affirmation 4 :

Deux conditions doivent être remplies pour que le projet soit lancé (document n°4) :

- plus de la moitié des élèves du lycée doivent se déclarer favorables à cette initiative : c'est le cas, car le nombre d'élèves favorables est 560, ce qui est plus de la moitié des 1 000 élèves du lycée (document n°3) ;
- au moins 60 % des élèves de première doivent également y être favorables : c'est aussi le cas puisqu'il y a 300 élèves de première, dont 180 soit exactement 60 % sont favorables au projet (document n°3), en effet, 60 % de 100 élèves, c'est 60 élèves, donc 60 % de 300 élèves, c'est le triple, soit $60 \times 3 = 180$.

Les deux conditions sont remplies, le projet pourra être lancé et l'affirmation est vraie.

Exercice 5.

Un stock de 1 000 graines comporte des graines de basilic et des graines d'estragon. Une fois semées, certaines graines germent, d'autres ne germent pas.
On donne ci-dessous la répartition des 1 000 graines.

	Graines de basilic	Graines d'estragon	Total
Graines qui germent	x	100	250
Graines qui ne germent pas	450	y	750
Total	600	400	1 000

1. Déterminer les valeurs de x et y.

Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.

2. On sème au hasard une graine de ce stock.

On note les évènements :

- B : « la graine est une graine de basilic » ;
- E : « la graine est une graine d'estragon » ;
- G : « la graine germe » ;
- $\overline{G}$: l'évènement contraire de G.

a. Déterminer les probabilités $P(B)$ et $P(E)$.

b. Définir à l'aide d'une phrase l'évènement $E \cap G$, puis calculer sa probabilité.

c. Sachant que la graine semée a germé, quelle est la probabilité que ce soit une graine d'estragon ?

d. Sachant que la graine semée est une graine d'estragon, quelle est la probabilité qu'elle germe ?

e. Un jardinier affirme : « Le fait qu'une graine germe ne dépend pas du type de graine semée (basilic ou estragon). »

Cette affirmation est-elle vraie ?

Justifier la réponse.

Corrigé

1. $x = 600 - 450 = 150$

$y = 750 - 450 = 300$

Dans le contexte de l'exercice :

- x : il y a 150 graines de basilic qui germent.
- y : il y a 300 graines d'estragon qui ne germent pas.

2. On considère que chaque graine a la même probabilité d'être semée.

Hypothèse d'équiprobabilité : les proportions sont assimilables à des probabilités.

a. Il y a 1 000 graines, dont 600 de basilic, donc : $P(B) = \dfrac{600}{1\,000} = 0{,}6$.

Et il y a 400 graines d'estragon, donc : $P(E) = \dfrac{400}{1\,000} = 0{,}4$.

b. $E \cap G$ est l'évènement « La graine semée est une graine d'estragon et elle germe. »

100 graines sont des graines d'estragon qui germent, donc : $P(E \cap G) = \dfrac{100}{1\,000} = 0{,}1$.

c. Parmi les 250 graines qui germent, 100 sont des graines d'estragon, donc :

$P_G(E) = \dfrac{100}{250} = \dfrac{400}{1\,000} = 0{,}4$.

d. Parmi les 400 graines d'estragon, 100 germent, donc : $P_E(G) = \dfrac{100}{400} = \dfrac{1}{4}$.

e. L'affirmation du jardinier revient à dire que les évènements G et E sont indépendants.

Or $P_G(E) = P(E)$, ce qui prouve que les évènements G et E **sont** indépendants (ou, de façon équivalente que G et B sont indépendants, car B est l'évènement contraire de E).

Exercice 6.

Dans un lycée, on peut s'inscrire à deux clubs qui proposent des activités artistiques ou sportives.
On constate que :

- 40 % des élèves inscrits aux clubs ont choisi des activités artistiques ;
- parmi les élèves ayant choisi des activités artistiques, 20 % ont aussi choisi des activités sportives ;
- parmi les élèves n'ayant pas choisi des activités artistiques, 40 % ont choisi de faire des activités sportives.

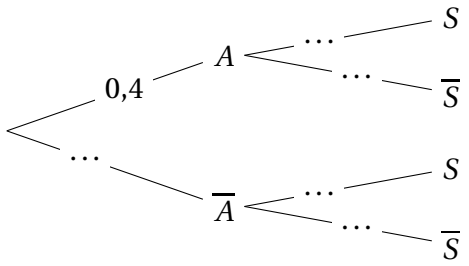
Parmi l'ensemble des élèves inscrits à ces clubs, on choisit un élève au hasard.
On note les événements suivants :

- A : « l'élève choisi est inscrit à une activité artistique » ;
- S : « l'élève choisi est inscrit à une activité sportive » ;

Pour un événement quelconque E, on note $\overline{E}$ l'événement contraire de E, $P(E)$ la probabilité de E et $P_F(E)$ la probabilité de E sachant l'événement F.

1. Déterminer $P_A(S)$ et $P_{\overline{A}}(S)$.

2. Recopier et compléter sur votre copie l'arbre de probabilité suivant :



3. Calculer $P(A \cap S)$ et $P(\overline{A} \cap S)$.

On admet que $P(S) = 0{,}32$.

4. Calculer $P_S(A)$.
Interpréter la réponse.

5. Les événements A et S sont-ils indépendants ?

Corrigé

Dans un lycée, on peut s'inscrire à deux clubs qui proposent des activités artistiques ou sportives.
On constate que :

- 40 % des élèves inscrits aux clubs ont choisi des activités artistiques ;
- parmi les élèves ayant choisi des activités artistiques, 20 % ont aussi choisi des activités sportives ;
- parmi les élèves n'ayant pas choisi des activités artistiques, 40 % ont choisi de faire des activités sportives.

Parmi l'ensemble des élèves inscrits à ces clubs, on choisit un élève au hasard.
On note les événements suivants :

- A : « l'élève choisi est inscrit à une activité artistique » ;
- S : « l'élève choisi est inscrit à une activité sportive » ;

Pour un événement quelconque E, on note $\overline{E}$ l'événement contraire de E, $P(E)$ la probabilité de E et $P_F(E)$ la probabilité de E sachant l'événement F.

1. Déterminer $P_A(S)$ et $P_{\overline{A}}(S)$

CORRECTION

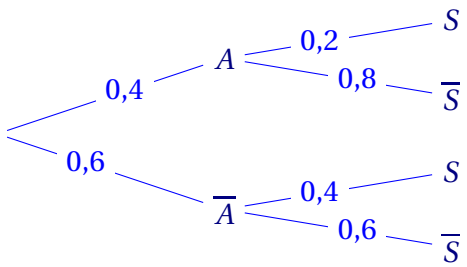
$P_A(S)$ est la probabilité qu'un élève, parmi ceux inscrits à une activité artistique, fasse aussi du sport : ils sont 20 % dans ce cas, donc $P_A(S) = 0{,}2$.

$P_{\overline{A}}(S)$ est la probabilité qu'un élève, parmi ceux ne faisant pas d'activité artistique, fasse du sport : ils sont 40 % dans ce cas, donc $P_{\overline{A}}(S) = 0{,}4$.

2. Recopier et compléter sur votre copie l'arbre de probabilité suivant :

CORRECTION

On détermine les valeurs manquantes :
$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}6$
$P_A(\overline{S}) = 1 - P_A(S) = 0{,}8$
et enfin $P_{\overline{A}}(\overline{S}) = 1 - P_{\overline{A}}(S) = 0{,}6$



3. Calculer $P(A \cap S)$ et $P(\overline{A} \cap S)$.

CORRECTION

La probabilité d'un chemin de l'arbre est le produit des probabilités des branches.

$P(A \cap S) = 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}08$. La probabilité qu'un élève choisi au hasard ait une activité artistique ET fasse du sport est 0,08.

De même $P(\overline{A} \cap S) = 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}24$: la probabilité qu'un élève choisi au hasard n'ait pas d'activité artistique mais fasse du sport est 0,24.

On admet que $P(S) = 0{,}32$.

4. Calculer $P_S(A)$. Interpréter la réponse.

CORRECTION

Règle des probabilités conditionnelles : $P_S(A) = \dfrac{P(A \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}08}{0{,}32} = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$.

Cela signifie que, parmi les élèves qui ont une activité sportive, un quart a également une activité artistique.

5. Les événements A et S sont-ils indépendants ?

CORRECTION

Deux événements A et S sont indépendants si et seulement si $P(A \cap S) = P(A) \times P(S)$.

Or $P(A) \times P(S) = 0{,}4 \times 0{,}32 = 0{,}128$, tandis que $P(A \cap S) = 0{,}08$: les deux événements ne sont donc pas indépendants.

Variante : ici, il est sans doute plus habile de comparer $P_A(S) = 0{,}2$, et $P_{\overline{A}}(S) = 0{,}4$, ce qui suffit pour conclure à la non indépendance des deux événements.

Exercice 7.

Dans un lycée, 120 élèves sont sportifs de haut niveau et sont séparés en deux sections : la section aquatique et la section judo.
Pour chaque section, les élèves peuvent être en seconde, en première ou en terminale.
La répartition de ces 120 élèves est donnée dans le tableau ci-dessous.

	Seconde	Première	Terminale	Total
Section judo			8	24
Section aquatique	40			
Total	50		14	120

On choisit au hasard un élève parmi les sportifs de haut niveau.
On considère les évènements suivants :

- S : « l'élève est en seconde »
- P : « l'élève est en première »
- T : « l'élève est en terminale »
- A : « l'élève est en section aquatique »
- J : « l'élève est en section judo »

Pour un évènement quelconque E : on note $P(E)$ la probabilité de E et $P_F(E)$ la probabilité de E sachant l'évènement F.

1. Reproduire le tableau ci-dessus en complétant les données manquantes.

Dans les questions qui suivent, les résultats seront donnés sous forme de fraction.

2. Décrire l'évènement $A \cap S$ à l'aide d'une phrase puis calculer sa probabilité.

3. On choisit au hasard un élève sportif en seconde, calculer la probabilité qu'il soit en section aquatique.

4. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement J.

b. Calculer $P_T(J)$.

c. Les évènements J et T sont-ils indépendants ?
Justifier votre réponse.

Corrigé

Puisqu'on choisit un élève au hasard parmi les sportifs de haut niveau, on est en situation d'équiprobabilité, et donc les proportions sont assimilables à des probabilités.

1. Voici le tableau complété :

	Seconde	Première	Terminale	Total
Section judo	$50-40=10$	$24-(10+8)=6$	8	24
Section aquatique	40	$56-6=50$	$14-8=6$	$40+50+6=96$
Total	50	$120-(50+14)=56$	14	120

2. $A \cap S$: "L'élève est en seconde ET en section aquatique" ;
$P(A \cap S) = \dfrac{40}{120} = \dfrac{1}{3}$.

3. On veut calculer la probabilité $P_S(A)$. Il y a 50 élèves en seconde, donc 40 sont en section aquatique.

On a donc : $P_S(A) = \dfrac{40}{50} = \dfrac{4}{5}$.

4. **a.** Il y a 24 élèves en section Judo : $P(J) = \dfrac{24}{120} = \dfrac{1}{5}$.

b. Parmi les 14 élèves de terminale, 8 sont en section judo. $P_T(J) = \dfrac{8}{14} = \dfrac{4}{7}$.

c. On remarque que : $P(J) \neq P_T(J)$, donc les évènements J et T ne sont pas indépendants.

Exercice 8.

Une compagnie aérienne mène une enquête de satisfaction auprès de ses clients. Les deux questions posées lors de cette enquête sont les suivantes :
« Avez-vous acheté votre billet d'avion en agence de voyage ou par internet ? »
« Êtes-vous satisfait des services proposés par notre compagnie ? ».

Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

	Billet acheté par internet	**Billet acheté en agence**	**Total**
Satisfait	720	180	900
Pas satisfait	80	20	100
Total	800	200	1 000

On choisit au hasard un client ayant répondu aux deux questions.
On considère les deux événements suivants :

S : « Le client est satisfait » ;

I : « Le client a acheté son billet par internet ».

1. Calculer la probabilité qu'un client soit satisfait.
2. Calculer la probabilité de l'événement $S \cap I$.
   Interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.
3. Calculer $P_S(I)$.
4. Les deux événements I et S sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
5. Le service marketing de la compagnie aérienne affirme que 90 % des clients qui ont acheté leur billet en agence sont satisfaits.
   Est-ce le cas ? Justifier la réponse.

Corrigé

Une compagnie aérienne mène une enquête de satisfaction auprès de ses clients. Les deux questions posées lors de cette enquête sont les suivantes :
« Avez-vous acheté votre billet d'avion en agence de voyage ou par internet ? »
« Êtes-vous satisfait des services proposés par notre compagnie ? ».

Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

	Billet acheté par internet	**Billet acheté en agence**	**Total**
Satisfait	720	180	900
Pas satisfait	80	20	100
Total	800	200	1 000

On choisit au hasard un client ayant répondu aux deux questions.
On considère les deux événements suivants :

S : « Le client est satisfait » ;

I : « Le client a acheté son billet par internet ».

On utilise l'hypothèse d'équiprobabilité : « chacun des clients à la même chance d'être choisi ».
On note Ω l'univers (les 1000 clients). Card(Ω) désigne le nombre d'éléments de Ω.

1. Calculer la probabilité qu'un client soit satisfait.
   $P(S) = \frac{\text{Card}(S)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{900}{1\,000} = \frac{9}{10} = 0{,}9.$
2. Calculer la probabilité de l'événement $S \cap I$.
   Interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.
   $P(S \cap I) = \frac{\text{Card}(S \cap I)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{720}{1\,000} = \frac{72}{100} = \frac{18}{25} = 0{,}72.$
   Il y a 72 % de chance de choisir un client satisfait **et** ayant acheté son billet sur Internet.
3. Calculer $P_S(I)$.
   On calcule la probabilité qu'on choisisse un client ayant acheté son billet sur Internet **sachant** qu'il était satisfait.
   $P_S(I) = \frac{\text{Card}(S \cap I)}{\text{Card}(S)} = \frac{720}{900} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$
4. Les deux événements I et S sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
   On calcule $P(I) = \frac{\text{Card}(I)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{800}{1\,000} = \frac{4}{5}$
   Comme $P_S(I) = P(I)$, on peut dire que les évènenents sont indépendants. On a bien dans ce cas $P(S \cap I) = P(S) \times P(I)$.
5. Le service marketing de la compagnie aérienne affirme que 90 % des clients qui ont acheté leur billet en agence sont satisfaits. Est-ce le cas ? Justifier la réponse.
   On calcule la probabilité qu'un client soit satisfait sachant qu'il a acheté son billet en agence.
   $P_{\overline{I}}(S) = \frac{\text{Card}(S \cap \overline{I})}{\text{Card}(\overline{I})} = \frac{180}{200} = \frac{90}{100} = 90\ \%$
   C'est bien le cas.

Exercice 9.

Les 200 adhérents d'une salle de sport ne pratiquent qu'une seule activité parmi les deux activités suivantes : le step et le crossfit. La répartition des adhérents est donnée dans le tableau suivant.

	Step	Crossfit	Total
Homme	20	80	100
Femme	60	40	100
Total	80	120	200

On choisit un adhérent au hasard parmi les 200 adhérents.
On considère les évènements suivants :

- F : « l'adhérent est une femme » ;
- H : « l'adhérent est un homme » ;
- S : « l'adhérent pratique le step » ;
- C : « l'adhérent pratique le crossfit ».

1. Déterminer la probabilité $P(F)$ de l'évènement F.

2. Déterminer la probabilité que l'adhérent soit un homme qui pratique le step.

3. Déterminer la probabilité de l'évènement $F \cap S$.

4. Les évènements F et S sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

5. On choisit au hasard une femme parmi les adhérents.
Quelle est la probabilité qu'elle pratique le crossfit ?

6. Déterminer la probabilité $P_C(F)$.

Corrigé

Les 200 adhérents d'une salle de sport ne pratiquent qu'une seule activité parmi les deux activités suivantes : le step et le crossfit. La répartition des adhérents est donnée dans le tableau suivant.

	Step	Crossfit	Total
Homme	20	80	100
Femme	60	40	100
Total	80	120	200

On choisit un adhérent au hasard parmi les 200 adhérents.
On considère les évènements suivants :

- F : « l'adhérent est une femme » ;
- H : « l'adhérent est un homme » ;
- S : « l'adhérent pratique le step » ;
- C : « l'adhérent pratique le crossfit ».

1. Déterminer la probabilité $P(F)$ de l'évènement F.

$P(F) = \dfrac{100}{200} = 0{,}5$

2. Déterminer la probabilité que l'adhérent soit un homme qui pratique le step.

$P(H \cap S) = \dfrac{20}{200} = 0{,}1$

3. Déterminer la probabilité de l'évènement $F \cap S$.

$P(F \cap S) = \dfrac{60}{200} = 0{,}3$

4. Les évènements F et S sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

$P(F \cap S) = 0{,}3$

$P(F) = 0{,}5$

$P_S(F) = \dfrac{60}{80} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75 \neq 0{,}5$

$P_S(F) \neq P(F)$, les deux évènements F et S ne sont pas indépendants.

5. On choisit au hasard une femme parmi les adhérents.
Quelle est la probabilité qu'elle pratique le crossfit ?
$P_F(C) = \frac{40}{100} = 0{,}4$

6. Déterminer la probabilité $P_C(F)$.
Il faut calculer la probabilité que l'adhérent soit une femme sachant qu'il pratique le crossfit :
$P_C(F) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$

Exercice 10.

Un vendeur de voitures possède un stock de 1 000 voitures dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau ci-dessous.

	Blanche	Noire	Rouge	TOTAL
Française	150	x	400	750
Étrangère	100	50	100	250
TOTAL	250	250	500	1 000

1. Indiquer ce que représente x et déterminer sa valeur.

2. Quel est le pourcentage de voitures noires parmi les voitures du stock ?

3. Quel est le pourcentage de voitures noires étrangères parmi les voitures du stock ?

4. Quel est le pourcentage de voitures blanches parmi les voitures françaises ?

5. Quel est le pourcentage de voitures françaises parmi les voitures blanches ?

6. Alice et Benoît jouent au jeu suivant :

— Alice choisit au hasard une voiture parmi les voitures Françaises. Elle remporte 1 euro si ce n'est pas une voiture rouge.

— Benoit choisit au hasard une voiture parmi les voitures Blanches. Il remporte 1 euro si c'est une voiture étrangère.

Lequel des deux a le plus de chance de remporter 1 euro ?

Corrigé

Un vendeur de voitures possède un stock de 1 000 voitures dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau ci-dessous.

	Blanche	Noire	Rouge	TOTAL
Française	150	x	400	750
Étrangère	100	50	100	250
TOTAL	250	250	500	1 000

1. Le nombre x représente le nombre de voitures françaises noires.
Il y a 250 voitures noires, dont 50 étrangères ; donc $x = 250 - 50 = 200$.

2. Il y a 1 000 voitures dans le stock dont 250 voitures noires.
Le pourcentage de voitures noires parmi les voitures du stock est donc égal à $\frac{250}{1\,000}$ c'est-à-dire $\frac{25}{100}$ soit 25 %.

3. Il y a 1 000 voitures dans le stock dont 50 voitures noires étrangères.

Le pourcentage de voitures noires étrangères parmi les voitures du stock est donc égal à $\frac{50}{1\,000}$ c'est-à-dire $\frac{5}{100}$ soit 5 %.

4. Il y a 750 voitures françaises dont 150 voitures blanches.

Le pourcentage de voitures blanches parmi les voitures françaises est donc égal à $\frac{150}{750}$ c'est-à-dire $\frac{1}{5}$ ou $\frac{20}{100}$ soit 20 %.

5. Il y a 250 voitures blanches dont 150 voitures françaises.

Le pourcentage de voitures françaises parmi les voitures blanches est donc égal à $\frac{150}{250}$ c'est-à-dire $\frac{15}{25}$ ou $\frac{60}{100}$ soit 60 %.

6. Alice et Benoît jouent au jeu suivant :

- Alice choisit au hasard une voiture parmi les voitures Françaises.
  Elle remporte 1 euro si ce n'est pas une voiture rouge.
  Parmi les 750 voitures françaises, il y en a $750 - 400 = 350$ qui ne sont pas rouges. La probabilité pour Alice de gagner est donc $\frac{350}{750}$.
- Benoit choisit au hasard une voiture parmi les voitures Blanches.
  Il remporte 1 euro si c'est une voiture étrangère.
  Parmi les 250 voitures blanches, il y en a 100 qui sont étrangères. La probabilité pour Benoit de gagner est donc $\frac{100}{250}$.

Or $\frac{100}{250} = \frac{300}{750} < \frac{350}{750}$, donc c'est Alice qui a le plus de chance de remporter 1 euro.

Exercice 11.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

Dans un lycée comptant 2 000 élèves, on donne la répartition des effectifs suivant le sexe et le choix de la LV1.

	Fille	Garçon
Anglais	712	728
Autre LV1	288	272

1. Un élève affirme « Dans ce lycée, il y a autant de filles que de garçons ». A-t-il raison ? Justifier.

On choisit au hasard, de manière équiprobable, un élève dans ce lycée.
On considère les évènements suivants :
F : « l'élève est une fille » ;
A : « l'élève a choisi Anglais pour LV1 ».
Dans les questions qui suivent, on donnera les résultats sous forme d'une fraction qu'il n'est pas demandé de simplifier.

2. Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap F$.
3. Déterminer la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement F est réalisé.
4. Les évènements A et F sont-ils indépendants ? Justifier.
5. On sait que l'élève choisi est un garçon.
   On considère l'affirmation suivante :
   « La probabilité qu'il ait choisi Anglais pour LV1 est plus de trois fois plus grande que la probabilité qu'il n'ait pas choisi Anglais pour LV1 ».
   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier.

Corrigé

Partie A

1. On complète le tableau des effectifs :

	Fille	Garçon	Total
Anglais	712	728	1 440
Autre LV1	288	272	560
Total	1 000	1 000	2 000

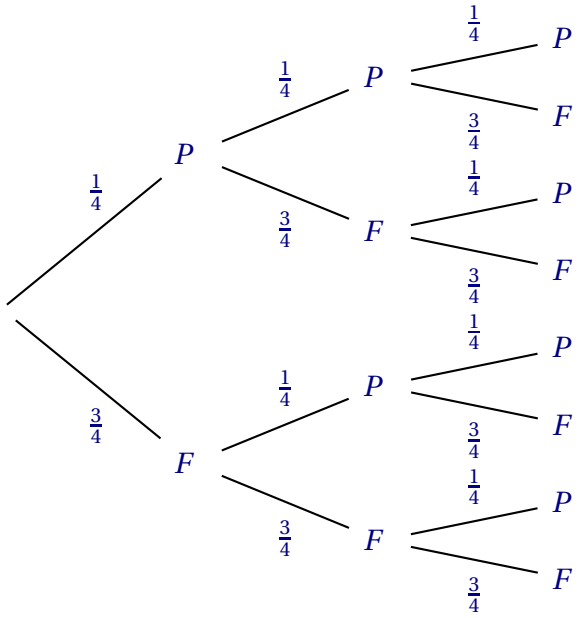
   Il y a donc autant de filles que de garçons.
2. 712 filles ont choisi l'Anglais, donc $p(A \cap F) = \dfrac{712}{2\,000}$.
3. On a $p_F(A) = \dfrac{p(F \cap A)}{p(F)} = \dfrac{p(A \cap F)}{p(F)} = \dfrac{\dfrac{712}{2\,000}}{\dfrac{1000}{2\,000}} = \dfrac{712}{1\,000}$.
4. On a $p(A) \times p(F) = \dfrac{712}{2\,000} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{712}{4\,000} = \dfrac{356}{2\,000}$.
   Donc $p(A) \times p(F) \neq p(A \cap F)$: les évènements A et F ne sont pas indépendants.
5. 728 élèves garçons ont choisi l'anglais et 272 ne l'ont pas choisi : or $728 \neq 3 \times 272$ car ce produit se termine par un 6.
   L'affirmation est fausse.

Exercice 12.

On dispose d'une pièce de monnaie truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{4}$.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir face.
2. On lance trois fois de suite cette pièce de monnaie, les trois lancers étant indépendants, et on note pour chaque lancer le résultat (pile ou face) obtenu.
   a. Représenter la situation par un arbre de probabilités.
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une fois pile lors de ces trois lancers ?
   c. Quelle est la probabilité de ne jamais obtenir pile ?

Corrigé

1. On a $p(P) = \frac{1}{4}$, donc $p(F) = 1 - p(P) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
2. 

3. La probabilité d'obtenir une fois Pile est :
   $p(PFF) + p(FPF) + p(FFP) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64} + \frac{9}{64} + \frac{9}{64} = \frac{27}{64}$.
4. La probabilité de ne jamais obtenir pile est égale à :
   $p(FFF) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$ (branche du bas).

Exercice 13.

Un village propose aux participants de la fête du sport deux épreuves : une randonnée et un cross. Il n'est pas possible de s'inscrire aux deux épreuves à la fois.
On dispose des informations suivantes :

— 90 % des participants ont choisi la randonnée, parmi eux, 5 % sont licenciés dans un club.

— 10 % des participants ont choisi le cross, parmi eux, 40 % sont licenciés dans un club.

Un journaliste interroge un participant au hasard.
On considère les évènements suivants :
R : « Le participant a choisi la randonnée »
L : « Le participant est licencié dans un club ».

1. Par simple lecture de l'énoncé, indiquer :
   a. La probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club sachant qu'il a choisi la randonnée.
   b. La probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club sachant qu'il a choisi le cross.

En prenant connaissance de ces deux probabilités, le journaliste estime que s'il choisit un participant parmi ceux qui sont licenciés dans un club, la probabilité qu'il ait effectué le cross sera largement supérieure à 50%. *L'objectif des questions suivantes est de vérifier si cette intuition est correcte.*

2. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
3. a. Déterminer la probabilité que le participant interrogé ait choisi le cross et soit licencié dans un club.
   b. Vérifier que la probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club est égale à $\frac{850}{10000}$, soit $8,5\%$.
4. Le journaliste interroge un participant licencié dans un club. Déterminer la probabilité que ce participant ait choisi le cross.
   L'intuition du journaliste est-elle correcte ?

Corrigé

Un village propose aux participants de la fête du sport deux épreuves : une randonnée et un cross. Il n'est pas possible de s'inscrire aux deux épreuves à la fois.
On dispose des informations suivantes :

- 90 % des participants ont choisi la randonnée, parmi eux, 5 % sont licenciés dans un club.
- 10 % des participants ont choisi le cross, parmi eux, 40 % sont licenciés dans un club.

Un journaliste interroge un participant au hasard.
On considère les évènements suivants :

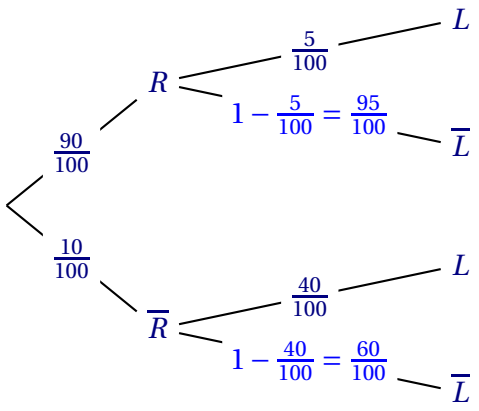
- R : « Le participant a choisi la randonnée »
- L : « Le participant est licencié dans un club ».

1. a. Parmi les participants qui ont choisi la randonnée, 5 % sont licenciés dans un club. Donc la probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club sachant qu'il a choisi la randonnée est $\frac{5}{100}$.

b. Parmi les participants qui ont choisi le cross, 40 % sont licenciés dans un club. Donc la probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club sachant qu'il a choisi le cross est $\frac{40}{100}$.

En prenant connaissance de ces deux probabilités, le journaliste estime que s'il choisit un participant parmi ceux qui sont licenciés dans un club, la probabilité qu'il ait effectué le cross sera largement supérieure à 50%. *L'objectif des questions suivantes est de vérifier si cette intuition est correcte.*

2. On représente la situation par un arbre de probabilité.



3. **a.** La probabilité que le participant interrogé ait choisi le cross et soit licencié dans un club est $p\left(\overline{R}\cap L\right)=\frac{10}{100}\times\frac{40}{100}=\frac{400}{10\,000}$.

b. La probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club est $p(L)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$p(L)=p(R\cap L)+p\left(\overline{R}\cap L\right)$

$=\frac{90}{100}\times\frac{5}{100}+\frac{400}{10\,000}=\frac{450}{10\,000}+\frac{400}{10\,000}=\frac{850}{10\,000}$, soit 8,5 %.

4. Le journaliste interroge un participant licencié dans un club.

La probabilité que ce participant ait choisi le cross est :

$p_L\left(\overline{R}\right)=\frac{p\left(\overline{R}\cap L\right)}{p(L)}=\frac{\frac{400}{10\,000}}{\frac{850}{10\,000}}=\frac{400}{850}$.

$\frac{400}{850}<0,5$ donc l'intuition du journaliste n'est pas correcte.

Exercice 14.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses. La justification est obligatoire.
Les deux questions sont indépendantes.

1. Un employé reçoit des appels téléphoniques.
On estime que la probabilité qu'un appel dure plus de cinq minutes est égale à 0,3.
On suppose que les durées des différents appels sont indépendantes.
Ce matin, l'employé reçoit deux appels.

Affirmation 1 :
La probabilité que les deux appels durent tous les deux plus de cinq minutes est égale à 0,09 .

Affirmation 2 :
La probabilité qu'un appel exactement sur les deux dure plus de cinq minutes est égale à 0,21 .

2. Le gérant d'une piscine s'intéresse à la présence de bactéries dans l'eau. Il effectue un prélèvement. Ce prélèvement montre que la concentration de bactéries est égale à 1 000 bactéries par millilitre. Le seuil maximal autorisé est égal à 1 500 bactéries par millilitre.
On admet que la concentration de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = 1,1^t$$

où $f(t)$ désigne la concentration, en milliers de bactéries par millilitre, et t désigne la durée, en heure, écoulée depuis que le prélèvement a été effectué.

Affirmation 3 : La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

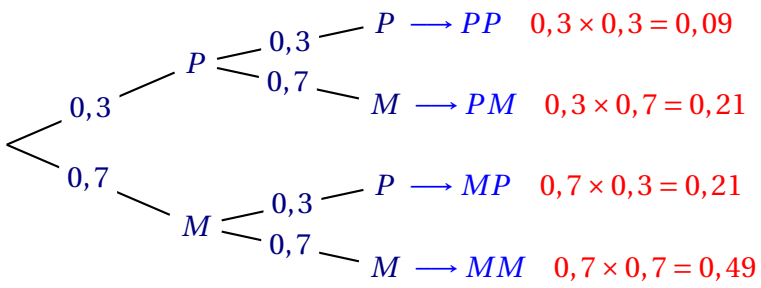
Affirmation 4 : La concentration de bactéries deux heures après le prélèvement est inférieure au seuil maximal autorisé.

Corrigé

1. Un employé reçoit des appels téléphoniques.
On estime que la probabilité qu'un appel dure plus de cinq minutes est égale à 0,3.
On suppose que les durées des différents appels sont indépendantes.
Ce matin, l'employé reçoit deux appels.

On représente la situation au moyen d'un arbre de probabilité en appelant :

- P l'événement « l'appel a duré plus de 5 minutes » ;
- M l'événement « l'appel n'a pas duré plus de 5 minutes ».



Affirmation 1 :

La probabilité que les deux appels durent tous les deux plus de cinq minutes est égale à 0,09.

L'événement « les deux appels durent tous les deux plus de cinq minutes » correspond à l'évènement PP dont la probabilité est : $0,3 \times 0,3 = 0,09$.

Affirmation 1 vraie

Affirmation 2 :

La probabilité qu'un appel exactement sur les deux dure plus de cinq minutes est égale à 0,21.

L'événement « un appel exactement sur les deux dure plus de cinq minutes » correspond à la réunion des évènements incompatibles PM et MP.
La probabilité de chacun de ces événements est $0,3 \times 0,7 = 0,21$, donc la probabilité cherchée est de $0,21 + 0,21 = 0,42$.

Affirmation 2 fausse

2. Le gérant d'une piscine s'intéresse à la présence de bactéries dans l'eau. Il effectue un prélèvement. Ce prélèvement montre que la concentration de bactéries est égale à 1 000 bactéries par millilitre. Le seuil maximal autorisé est égal à 1 500 bactéries par millilitre.

On admet que la concentration de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(t) = 1,1^t$, où $f(t)$ désigne la concentration, en milliers de bactéries par millilitre, et t désigne la durée, en heure, écoulée depuis que le prélèvement a été effectué.

Affirmation 3 :

La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

La fonction f est une fonction exponentielle de type $t \longmapsto a^t$, avec $a = 1,1$; or $1,1 > 1$ donc la fonction f est strictement croissante.

Affirmation 3 vraie

Affirmation 4 :

La concentration de bactéries deux heures après le prélèvement est inférieure au seuil maximal autorisé.

$f(2) = 1,1^2 = 1,21$; donc la concentration de bactéries deux heures après le prélèvement est de 1 210 bactéries, donc inférieure au seuil maximal autorisé.

Affirmation 4 vraie