

Corrigé

Suites géométriques et fonctions exponentielles

Reconnaître une croissance linéaire ou exponentielle

Exercice 1. Reconnaître une croissance exponentielle

Dans chaque cas, dire si la situation relève d'une croissance linéaire, exponentielle ou d'aucune des deux. Préciser la raison le cas échéant.

1. Un abonnement coûte 30 € la première année puis augmente de 2 € chaque année.
Linéaire (suite arithmétique de raison 2).
2. Le nombre d'abonnés d'une chaîne augmente de 12 % chaque mois.
Exponentielle (suite géométrique de raison 1,12).
3. La quantité d'un médicament dans le sang diminue de 20 % chaque heure.
Exponentielle (décroissante, raison 0,8).
4. Les termes 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48.
Exponentielle (raison 2).
5. Les termes 2 ; 5 ; 9 ; 14 ; 20.
Ni l'une ni l'autre : les écarts (3, 4, 5, 6) ne sont pas constants et les quotients non plus.
6. Les termes 1 000 ; 900 ; 810 ; 729.
Exponentielle décroissante (raison 0,9 : baisse de 10 % à chaque étape).
7. Un salarié reçoit une prime de 50 € chaque mois, versée sur un compte sans intérêts.
Linéaire (suite arithmétique de raison 50).
8. Une feuille de papier est pliée en deux plusieurs fois ; on s'intéresse à son épaisseur.
Exponentielle (l'épaisseur double à chaque pliage : raison 2).

9. Pour chaque situation exponentielle, préciser si la suite est croissante ou décroissante, en justifiant à l'aide de la raison.

Raisons 1, 12; 2; 2 : supérieures à 1, suites croissantes. Raisons 0,8 et 0,9 : comprises entre 0 et 1, suites décroissantes (premier terme positif).

Calculer des termes d'une suite géométrique et les représenter

Exercice 2. Calculer des termes

1. (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 3$. Calculer u_1 , u_2 , puis u_{10} .

$$u_1 = 15; u_2 = 45; u_{10} = 5 \times 3^{10} = 295\,245.$$

2. (v_n) est définie par $v_0 = 800$ et $v_{n+1} = 0,75 v_n$. Donner l'expression de v_n en fonction de n et calculer v_6 (arrondi au centième).

$$v_n = 800 \times 0,75^n; v_6 = 800 \times 0,75^6 \approx 142,38.$$

3. (w_n) est géométrique avec $w_0 = 2$ et $w_3 = 54$. Déterminer la raison.

$$w_3 = 2q^3 = 54 \text{ donc } q^3 = 27 \text{ et } q = 3.$$

4. Une ville compte 45 000 habitants en 2025 et sa population augmente de 1,8 % par an. Modéliser par une suite et estimer la population en 2035.

$$p_n = 45\,000 \times 1,018^n; \text{ en 2035, } n = 10 : p_{10} \approx 53\,789 \text{ habitants.}$$

5. (t_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et $t_4 = 12$. Calculer t_5 , puis t_0 .

$$t_5 = 6; t_0 = \frac{t_4}{0,5^4} = \frac{12}{0,0625} = 192.$$

6. Calculer la somme $S = 5 + 15 + 45 + \dots + 5 \times 3^6$ à l'aide d'un programme ou d'une calculatrice.

$$S = 5(1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729) = 5 \times 1\,093 = 5\,465.$$

7. Écrire une fonction Python `terme(u0, q, n)` qui renvoie u_n pour une suite géométrique.

```
def terme(u0, q, n):  
    return u0 * q**n
```

Exercice 3. Représentation graphique

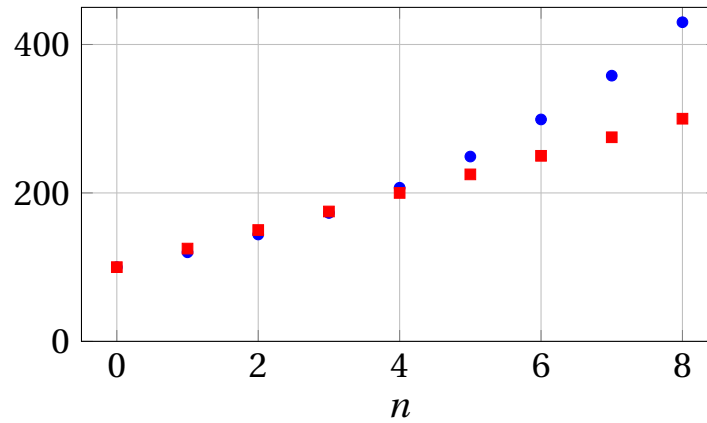
On considère les suites $u_n = 100 \times 1,2^n$ et $v_n = 100 + 25n$.

1. Compléter le tableau (arrondir à l'unité).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n									
v_n									

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	100	120	144	173	207	249	299	358	430
v_n	100	125	150	175	200	225	250	275	300

2. Représenter les deux suites dans un même repère.



3. À partir de quel rang u_n dépasse-t-il v_n ? Que peut-on dire à long terme?

Dès $n = 4$ ($207 > 200$). À long terme, la croissance exponentielle l'emporte toujours sur la croissance linéaire (modèle de Malthus).

4. Justifier que les points de (v_n) sont alignés, mais pas ceux de (u_n) .

$v_{n+1} - v_n = 25$ constant : les points sont sur la droite $y = 100 + 25x$. Pour (u_n) , les écarts 20; 24; 28,8... augmentent : les points ne sont pas alignés.

5. Calculer u_{20} et v_{20} . Commenter.

$u_{20} = 100 \times 1,2^{20} \approx 3834$ et $v_{20} = 600$: l'écart devient considérable.

Calculer un taux d'évolution moyen

Exercice 4. Taux d'évolution moyen

1. Le prix d'un article a augmenté de 10 % puis de 20 %. Quel est le taux d'évolution moyen par hausse?

$C = 1,1 \times 1,2 = 1,32$; $t_m = 1,32^{1/2} - 1 \approx 0,1489$ soit environ 14,89 % (et non 15 %).

2. Le chiffre d'affaires d'une entreprise est passé de 150 000 € à 210 000 € en 4 ans. Calculer le taux d'évolution annuel moyen.

$C = \frac{210000}{150000} = 1,4$; $t_m = 1,4^{1/4} - 1 \approx 0,0878$ soit environ 8,78 % par an.

3. Un capital de 5 000 € est placé au taux annuel de 4 % à intérêts composés. Quelle est sa valeur au bout de 3 mois? de 18 mois?

3 mois = 0,25 an : $5000 \times 1,04^{0,25} \approx 5049,27$ €. 18 mois : $5000 \times 1,04^{1,5} \approx 5302,98$ €.

4. Quel taux mensuel moyen correspond à une hausse annuelle de 6 %?

$1,06^{1/12} - 1 \approx 0,00487$ soit environ 0,487 % par mois.

5. Un prix baisse de 30 % puis augmente de 30 %. Retrouve-t-il sa valeur initiale? Calculer le taux d'évolution global.

$0,7 \times 1,3 = 0,91$: non, le prix a globalement baissé de 9 %.

6. La population d'un village est passée de 2 400 à 1 800 habitants en 10 ans. Calculer le taux d'évolution annuel moyen.

$C = \frac{1800}{2400} = 0,75$; $t_m = 0,75^{1/10} - 1 \approx -0,0284$ soit une baisse d'environ 2,84 % par an.

7. Avec ce taux, quelle population peut-on prévoir 5 ans plus tard?

$1800 \times 0,75^{0,5} \approx 1559$ habitants.

Exercice 5. Problèmes de seuil

1. Un médicament est injecté : 50 mg. Chaque heure, la quantité présente dans le sang diminue de 15 %. À partir de combien d'heures reste-t-il moins de 10 mg? (Utiliser la calculatrice ou l'algorithme ci-dessous.)

```
q = 50
n = 0
while q >= 10:
    q = q * 0.85
    n = n + 1
print(n)
```

$50 \times 0,85^9 \approx 11,58$ et $50 \times 0,85^{10} \approx 9,84$. Il faut 10 heures. Le programme affiche 10.

2. Le carbone 14 a une demi-vie d'environ 5 730 ans : sa quantité est divisée par 2 tous les 5 730 ans. Quelle proportion de carbone 14 reste-t-il au bout de 1 000 ans? de 20 000 ans?

Proportion restante au bout de t années : $0,5^{t/5730}$. Pour 1 000 ans : $0,5^{1000/5730} \approx 0,886$ (88,6 %). Pour 20 000 ans : $0,5^{20000/5730} \approx 0,089$ (8,9 %).

3. Lors d'une épidémie, chaque malade contamine en moyenne $R_0 = 2,5$ personnes par semaine. Au départ, il y a 10 malades. Estimer l'ordre de grandeur du nombre de nouveaux cas en semaine 10 si rien n'est fait.

$10 \times 2,5^{10} \approx 95\,367$: environ 100 000 nouveaux cas.

4. Un capital de 3 000 € est placé à 2,5 % par an. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, au bout de combien d'années il dépasse 4 000 €.

$3\,000 \times 1,025^{11} \approx 3\,936$ et $3\,000 \times 1,025^{12} \approx 4\,034$: au bout de 12 ans.

5. Modifier l'algorithme de la question 1 pour qu'il réponde à la question précédente.

```
c = 3000
n = 0
while c <= 4000:
    c = c * 1.025
    n = n + 1
print(n)          # affiche 12
```

- 6.** Une voiture perd 15 % de sa valeur chaque année. Au bout de combien d'années aura-t-elle perdu plus de la moitié de sa valeur?

$0,85^4 \approx 0,522$ et $0,85^5 \approx 0,444$: au bout de 5 ans.