

Probabilités conditionnelles

Calculer des probabilités conditionnelles à partir d'un tableau croisé

Exercice 1. À partir d'un tableau croisé

Dans un lycée de 800 élèves, on a relevé s'ils portent des lunettes et s'ils sont en seconde ou non.

	Lunettes (L)	Pas de lunettes ($\bar{L}$)	Total
Seconde (S)	90	210	300
Autre niveau ($\bar{S}$)	160	340	500
Total	250	550	800

On choisit un élève au hasard.

1. Calculer $P(L)$, $P(S)$ et $P(S \cap L)$.
2. Calculer $P_S(L)$ puis $P_L(S)$. Interpréter chaque résultat par une phrase.
3. Les événements S et L sont-ils indépendants?
4. Calculer $P(S \cup L)$ de deux façons.
5. Calculer $P_{\bar{S}}(L)$ et comparer à $P_S(L)$.
6. Calculer $P_{\bar{L}}(\bar{S})$ et interpréter.

Utiliser un arbre pondéré et la formule des probabilités totales

Exercice 2. Arbre pondéré

Une usine fabrique des composants sur deux machines. La machine A produit 70 % des composants, dont 2 % sont défectueux. La machine B produit le reste, dont 5 % sont défectueux. On choisit un composant au hasard ; on note A : « il provient de la machine A » et D : « il est défectueux ».

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
2. Calculer $P(A \cap D)$.
3. Montrer que $P(D) = 0,029$.
4. Un composant est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne de la machine B?
5. Calculer $P_D(A)$ et vérifier que $P_D(A) + P_D(B) = 1$.

6. L'usine produit 20 000 composants par jour. Combien de composants défectueux peut-on attendre?
7. On veut ramener $P(D)$ à 2 % en améliorant la machine B. Quel pourcentage de défauts doit-elle atteindre?

Exercice 3. Test médical : faux positifs

Une maladie touche 1 % de la population. Un test est positif pour 95 % des malades et pour 3 % des personnes non malades.

1. Construire l'arbre pondéré (événements M et T).
2. Calculer la probabilité qu'un test soit positif.
3. Une personne a un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade? Commenter.
4. Calculer la probabilité qu'une personne ayant un test négatif soit malade.
5. Reprendre la question 3 si la maladie touche 10 % de la population.

Étudier l'indépendance de deux événements

Exercice 4. Indépendance

1. On lance un dé équilibré. A : « obtenir un nombre pair », B : « obtenir un multiple de 3 », C : « obtenir au moins 4 ». Étudier l'indépendance de A et B , puis de A et C .
2. A et B sont indépendants avec $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,25$. Calculer $P(A \cap B)$ puis $P(A \cup B)$.
3. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. R : « obtenir un roi », C : « obtenir un cœur ». R et C sont-ils indépendants?
4. E et F vérifient $P(E) = 0,6$, $P(F) = 0,5$ et $P(E \cup F) = 0,8$. Sont-ils indépendants?
5. Démontrer que si $P_B(A) = P(A)$ (avec $P(B) \neq 0$), alors A et B sont indépendants.

Modéliser des épreuves indépendantes répétées

Exercice 5. Épreuves répétées

Un QCM comporte 4 questions indépendantes. Pour chacune, il y a 3 réponses dont une seule est juste. Un élève répond au hasard à toutes les questions.

1. Quelle est la probabilité de réussir une question?
2. Calculer la probabilité d'avoir les 4 réponses justes, puis aucune réponse juste.
3. Calculer la probabilité d'avoir au moins une réponse juste.
4. Combien de chemins de l'arbre mènent à exactement une réponse juste? En déduire la probabilité de cet événement.
5. Une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise 0. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 2 points?
6. On lance 3 fois une pièce équilibrée. Représenter la situation par un arbre et calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 « Pile ».
7. Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 dépasse 0,9?

