

Corrigé

Probabilités conditionnelles

Calculer des probabilités conditionnelles à partir d'un tableau croisé

Exercice 1. À partir d'un tableau croisé

Dans un lycée de 800 élèves, on a relevé s'ils portent des lunettes et s'ils sont en seconde ou non.

	Lunettes (L)	Pas de lunettes ($\bar{L}$)	Total
Seconde (S)	90	210	300
Autre niveau ($\bar{S}$)	160	340	500
Total	250	550	800

On choisit un élève au hasard.

1. Calculer $P(L)$, $P(S)$ et $P(S \cap L)$.

$$P(L) = \frac{250}{800} = 0,3125; P(S) = \frac{300}{800} = 0,375; P(S \cap L) = \frac{90}{800} = 0,1125.$$

2. Calculer $P_S(L)$ puis $P_L(S)$. Interpréter chaque résultat par une phrase.

$$P_S(L) = \frac{90}{300} = 0,3 : 30 \% \text{ des élèves de seconde portent des lunettes.}$$

$$P_L(S) = \frac{90}{250} = 0,36 : 36 \% \text{ des porteurs de lunettes sont en seconde.}$$

3. Les événements S et L sont-ils indépendants?

$P(S) \times P(L) = 0,375 \times 0,3125 \approx 0,117 \neq 0,1125$: ils ne sont pas indépendants (de peu).

4. Calculer $P(S \cup L)$ de deux façons.

Avec le tableau : $\frac{90+210+160}{800} = \frac{460}{800} = 0,575$. Avec la formule : $0,375 + 0,3125 - 0,1125 = 0,575$.

5. Calculer $P_{\bar{S}}(L)$ et comparer à $P_S(L)$.

$$P_{\bar{S}}(L) = \frac{160}{500} = 0,32, \text{ légèrement supérieur à } P_S(L) = 0,3.$$

6. Calculer $P_{\bar{L}}(\bar{S})$ et interpréter.

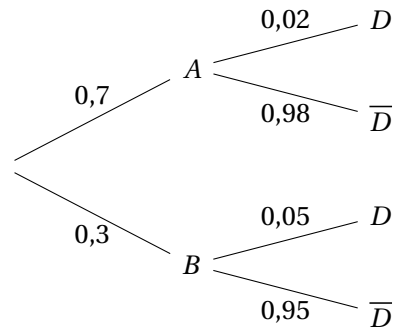
$$\frac{340}{550} \approx 0,618 : \text{environ } 61,8 \% \text{ des élèves sans lunettes ne sont pas en seconde.}$$

Utiliser un arbre pondéré et la formule des probabilités totales

Exercice 2. Arbre pondéré

Une usine fabrique des composants sur deux machines. La machine A produit 70 % des composants, dont 2 % sont défectueux. La machine B produit le reste, dont 5 % sont défectueux. On choisit un composant au hasard ; on note A : « il provient de la machine A » et D : « il est défectueux ».

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.



2. Calculer $P(A \cap D)$.

$$P(A \cap D) = 0,7 \times 0,02 = 0,014.$$

3. Montrer que $P(D) = 0,029$.

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0,014 + 0,3 \times 0,05 = 0,014 + 0,015 = 0,029.$$

4. Un composant est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne de la machine B ?

$$P_D(B) = \frac{0,015}{0,029} \approx 0,517.$$

5. Calculer $P_D(A)$ et vérifier que $P_D(A) + P_D(B) = 1$.

$$P_D(A) = \frac{0,014}{0,029} \approx 0,483 ; 0,483 + 0,517 = 1.$$

6. L'usine produit 20 000 composants par jour. Combien de composants défectueux peut-on attendre ?

$$0,029 \times 20\,000 = 580 \text{ composants.}$$

7. On veut ramener $P(D)$ à 2 % en améliorant la machine B. Quel pourcentage de défauts doit-elle atteindre ?

$$0,014 + 0,3p = 0,02 \iff p = 0,02 : \text{la machine B doit n'avoir que 2 \% de défauts.}$$

Exercice 3. Test médical : faux positifs

Une maladie touche 1 % de la population. Un test est positif pour 95 % des malades et pour 3 % des personnes non malades.

1. Construire l'arbre pondéré (événements M et T).

Premier niveau : M (0,01) et $\overline{M}$ (0,99). Après M : T (0,95), $\overline{T}$ (0,05). Après $\overline{M}$: T (0,03), $\overline{T}$ (0,97).

2. Calculer la probabilité qu'un test soit positif.

$$P(T) = 0,01 \times 0,95 + 0,99 \times 0,03 = 0,0095 + 0,0297 = 0,0392.$$

3. Une personne a un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade? Commenter.

$P_T(M) = \frac{0,0095}{0,0392} \approx 0,242$. Seulement 24 % des positifs sont malades : la maladie étant rare, les faux positifs sont nombreux. On fait donc souvent un second test.

4. Calculer la probabilité qu'une personne ayant un test négatif soit malade.

$P(\overline{T}) = 1 - 0,0392 = 0,9608$; $P_{\overline{T}}(M) = \frac{0,01 \times 0,05}{0,9608} \approx 0,00052$: un test négatif est très rassurant.

5. Reprendre la question 3 si la maladie touche 10 % de la population.

$P(T) = 0,1 \times 0,95 + 0,9 \times 0,03 = 0,122$; $P_T(M) = \frac{0,095}{0,122} \approx 0,779$. Le test est bien plus fiable quand la maladie est fréquente.

Étudier l'indépendance de deux événements

Exercice 4. Indépendance

1. On lance un dé équilibré. A : « obtenir un nombre pair », B : « obtenir un multiple de 3 », C : « obtenir au moins 4 ». Étudier l'indépendance de A et B , puis de A et C .

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, A \cap B = \{6\} : P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} : \text{indépendants.}$$

$$P(C) = \frac{1}{2}, A \cap C = \{4; 6\} : P(A \cap C) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} : \text{non indépendants.}$$

2. A et B sont indépendants avec $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,25$. Calculer $P(A \cap B)$ puis $P(A \cup B)$.

$$P(A \cap B) = 0,4 \times 0,25 = 0,1; P(A \cup B) = 0,4 + 0,25 - 0,1 = 0,55.$$

3. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. R : « obtenir un roi », C : « obtenir un cœur ». R et C sont-ils indépendants?

$$P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}, P(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, P(R \cap C) = \frac{1}{32} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} : \text{indépendants.}$$

4. E et F vérifient $P(E) = 0,6$, $P(F) = 0,5$ et $P(E \cup F) = 0,8$. Sont-ils indépendants?

$$P(E \cap F) = 0,6 + 0,5 - 0,8 = 0,3 = 0,6 \times 0,5 : \text{indépendants.}$$

5. Démontrer que si $P_B(A) = P(A)$ (avec $P(B) \neq 0$), alors A et B sont indépendants.

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = P(B) \times P(A).$$

Exercice 5. Épreuves répétées

Un QCM comporte 4 questions indépendantes. Pour chacune, il y a 3 réponses dont une seule est juste. Un élève répond au hasard à toutes les questions.

1. Quelle est la probabilité de réussir une question ?

$$p = \frac{1}{3}.$$

2. Calculer la probabilité d'avoir les 4 réponses justes, puis aucune réponse juste.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \approx 0,012; \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \approx 0,198.$$

3. Calculer la probabilité d'avoir au moins une réponse juste.

$$1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81} \approx 0,802.$$

4. Combien de chemins de l'arbre mènent à exactement une réponse juste ? En déduire la probabilité de cet événement.

4 chemins (la bonne réponse est à la question 1, 2, 3 ou 4), chacun de probabilité $\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$. Probabilité : $\frac{32}{81} \approx 0,395$.

5. Une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise 0. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 2 points ?

$$P(0) = \frac{16}{81}, P(1) = \frac{32}{81}, \text{ donc } P(\geq 2) = 1 - \frac{48}{81} = \frac{33}{81} \approx 0,407.$$

6. On lance 3 fois une pièce équilibrée. Représenter la situation par un arbre et calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 « Pile ».

8 issues équiprobables dont 3 contiennent exactement 2 « Pile » (PPF, PFP, FPP) : $\frac{3}{8}$.

7. Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 dépasse 0,9 ?

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9 \iff \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,1. \left(\frac{5}{6}\right)^{12} \approx 0,112 \text{ et } \left(\frac{5}{6}\right)^{13} \approx 0,093 : \text{ il faut 13 lancers.}$$