

Corrigé

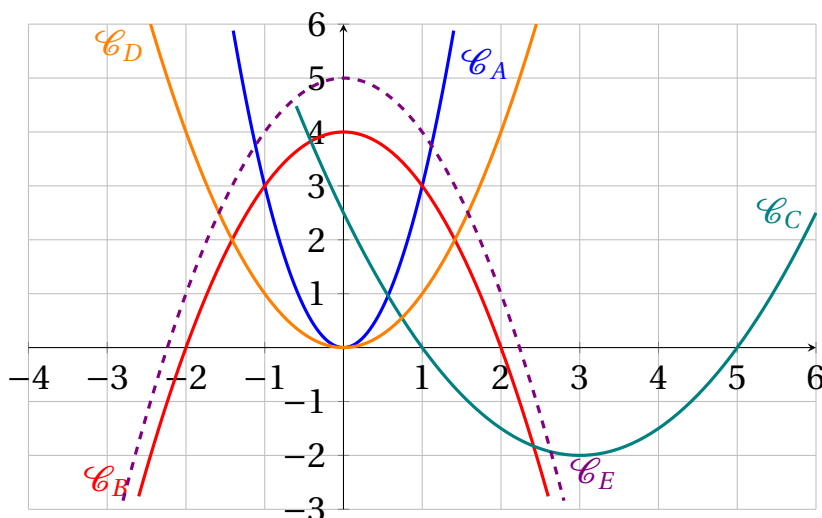
Modélisation quadratique

Reconnaître une parabole et lire ses caractéristiques

Exercice 1. Associer paraboles et expressions

On considère les fonctions suivantes et les courbes ci-dessous.

$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = -x^2 + 4 \quad f_3(x) = 3x^2 \quad f_4(x) = 0,5(x-1)(x-5) \\ f_5(x) = -(x+2)(x-2) + 1$$



1. Associer chaque fonction à sa courbe. Justifier.

$f_1 \rightarrow \mathcal{C}_D$ (sommet O, tournée vers le haut); $f_3 \rightarrow \mathcal{C}_A$ (même sommet mais plus resserrée car $3 > 1$); $f_2 \rightarrow \mathcal{C}_B$ (tournée vers le bas, sommet (0 ; 4)); $f_4 \rightarrow \mathcal{C}_C$ (racines 1 et 5); $f_5 \rightarrow \mathcal{C}_E$ ($f_5(x) = -x^2 + 5$: sommet (0 ; 5)).

2. Pour chacune des cinq paraboles, donner le signe du coefficient a et les coordonnées du sommet.

$f_1 : a = 1 > 0$, (0 ; 0); $f_2 : a = -1 < 0$, (0 ; 4); $f_3 : a = 3 > 0$, (0 ; 0); $f_4 : a = 0,5 > 0$, (3 ; -2); $f_5 : a = -1 < 0$, (0 ; 5).

3. Lire graphiquement les solutions de $f_2(x) = 0$ et vérifier par le calcul.

$$-x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = -2 \text{ ou } x = 2.$$

4. Déterminer par le calcul les points d'intersection de $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_D$.

$$x^2 = -x^2 + 4 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2} : \text{points } (-\sqrt{2}; 2) \text{ et } (\sqrt{2}; 2).$$

Exercice 2. Fonctions $ax^2 + c$

Pour chaque fonction, donner les coordonnées du sommet, l'axe de symétrie et le tableau de variations.

1. $f(x) = 4x^2$

Sommet $(0 ; 0)$, axe $x = 0$; $a > 0$: décroissante sur $] -\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$, minimum 0.

2. $g(x) = -3x^2 + 2$

Sommet $(0 ; 2)$, axe $x = 0$; $a < 0$: croissante sur $] -\infty ; 0]$, décroissante sur $[0 ; +\infty[$, maximum 2.

3. $h(x) = 0,5x^2 - 8$

Sommet $(0 ; -8)$, axe $x = 0$; $a > 0$: décroissante puis croissante, minimum -8.

4. $k(x) = -x^2 - 1$

Sommet $(0 ; -1)$, axe $x = 0$; $a < 0$: croissante puis décroissante, maximum -1.

5. $m(x) = \frac{x^2}{4} + 3$

Sommet $(0 ; 3)$, axe $x = 0$; $a > 0$: décroissante puis croissante, minimum 3.

6. $p(x) = 2 - 5x^2$

Sommet $(0 ; 2)$, axe $x = 0$; $a < 0$: croissante puis décroissante, maximum 2.

7. Pour chacune des fonctions g , h et p , résoudre l'équation $f(x) = 0$.

$g : x^2 = \frac{2}{3}, x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; $h : x^2 = 16, x = \pm 4$; $p : x^2 = 0,4, x = \pm\sqrt{0,4}$.

Exploiter la forme factorisée : racines, sommet, signe

Exercice 3. Forme factorisée : racines, sommet, signe

Pour chaque fonction : donner les racines, l'axe de symétrie, les coordonnées du sommet, le tableau de variations et le tableau de signes.

1. $f(x) = (x-2)(x-6)$

Racines 2 et 6; axe $x = 4$; sommet $(4; f(4)) = (4; -4)$. $a = 1 > 0$: décroissante sur $] -\infty; 4]$ puis croissante. Signe : + sur $] -\infty; 2[$, - sur $] 2; 6[$, + sur $] 6; +\infty[$.

2. $g(x) = -2(x+1)(x-3)$

Racines -1 et 3 ; axe $x = 1$; sommet $(1; g(1)) = (1; 8)$. $a = -2 < 0$: croissante sur $] -\infty; 1]$ puis décroissante. Signe : - sur $] -\infty; -1[$, + sur $] -1; 3[$, - sur $] 3; +\infty[$.

3. $h(x) = 3x(x+4)$

Racines 0 et -4 ; axe $x = -2$; sommet $(-2; h(-2)) = (-2; -12)$. $a > 0$: décroissante puis croissante. Signe : + à l'extérieur de $[-4; 0]$, - entre.

4. $k(x) = -(x-5)^2$

Une racine double : 5; axe $x = 5$; sommet $(5; 0)$. $a = -1 < 0$: croissante puis décroissante. $k(x) \leq 0$ pour tout x , nul uniquement en 5.

5. $m(x) = \frac{1}{2}(4-x)(x+2)$

$m(x) = -\frac{1}{2}(x-4)(x+2)$: $a = -\frac{1}{2} < 0$. Racines 4 et -2 ; axe $x = 1$; sommet $(1; m(1)) = (1; 4,5)$. Croissante puis décroissante. Signe : + entre -2 et 4, - à l'extérieur.

6. Déterminer la forme factorisée de la fonction du second degré q dont les racines sont -3 et 1 et telle que $q(0) = 6$.

$q(x) = a(x+3)(x-1)$ et $q(0) = -3a = 6$ donc $a = -2$: $q(x) = -2(x+3)(x-1)$.

7. Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$ puis $g(x) \geq 0$.

$f(x) < 0 \iff x \in]2; 6[$; $g(x) \geq 0 \iff x \in [-1; 3]$.

Déterminer le sommet à partir de la forme développée

Exercice 4. Forme développée $ax^2 + bx + c$

En résolvant $f(x) = c$, déterminer l'axe de symétrie et le sommet de chaque parabole.

1. $f(x) = x^2 - 8x + 3$

$$f(x) = 3 \iff x(x-8) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 8. \text{ Axe } x = 4; \text{ sommet } (4; 16 - 32 + 3) = (4; -13).$$

2. $g(x) = -2x^2 + 12x - 7$

$$g(x) = -7 \iff -2x(x-6) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 6. \text{ Axe } x = 3; \text{ sommet } (3; -18 + 36 - 7) = (3; 11).$$

3. $h(x) = 3x^2 + 6x$

$$h(x) = 0 \iff 3x(x+2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -2. \text{ Axe } x = -1; \text{ sommet } (-1; 3 - 6) = (-1; -3).$$

4. $k(x) = -x^2 + 5x + 1$

$$k(x) = 1 \iff -x(x-5) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 5. \text{ Axe } x = 2,5; \text{ sommet } (2,5; -6,25 + 12,5 + 1) = (2,5; 7,25).$$

5. $m(x) = 0,5x^2 - 3x + 2$

$$m(x) = 2 \iff 0,5x(x-6) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 6. \text{ Axe } x = 3; \text{ sommet } (3; 4,5 - 9 + 2) = (3; -2,5).$$

6. Dresser le tableau de variations de f et de g sur $\mathbb{R}$.

$f : a > 0$, décroissante sur $] -\infty ; 4]$, croissante sur $[4 ; +\infty[$, minimum -13 .

$g : a < 0$, croissante sur $] -\infty ; 3]$, décroissante sur $[3 ; +\infty[$, maximum 11 .

7. Vérifier que $f(x) = (x-4)^2 - 13$ en développant. Comment lit-on le sommet sur cette écriture?

$(x-4)^2 - 13 = x^2 - 8x + 16 - 13 = x^2 - 8x + 3$. La forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ donne directement le sommet $(\alpha; \beta) = (4; -13)$.

Modéliser une situation par une fonction du second degré

Exercice 5. Modélisation : le chiffre d'affaires

Une entreprise vend des gourdes. Si le prix unitaire est x euros ($5 \leq x \leq 35$), elle en vend $1\,200 - 30x$ par mois. On admet que le chiffre d'affaires est $R(x) = x(1\,200 - 30x) = -30x(x - 40)$.

1. Calculer $R(10)$ et $R(30)$. Que remarque-t-on?

$R(10) = 10 \times 900 = 9\,000$ € et $R(30) = 30 \times 300 = 9\,000$ €. Mêmes valeurs : 10 et 30 sont symétriques par rapport à l'axe.

2. Déterminer les racines de R et en déduire le prix qui rend le chiffre d'affaires maximal. Quel est ce maximum?

Racines 0 et 40; axe $x = 20$. $R(20) = 20 \times 600 = 12\,000$ €. Le chiffre d'affaires est maximal (12 000 €) pour un prix de 20 €.

3. Pour quels prix le chiffre d'affaires est-il supérieur ou égal à 9 000 €?

R est croissante sur $[5 ; 20]$ et décroissante sur $[20 ; 35]$; $R(x) = 9\,000$ pour $x = 10$ et $x = 30$. Donc pour $x \in [10 ; 30]$.

4. Combien de gourdes sont vendues au prix optimal?

$1\,200 - 30 \times 20 = 600$ gourdes.

5. Chaque gourde coûte 8 € à fabriquer. Exprimer le bénéfice $B(x) = (x - 8)(1\,200 - 30x)$ et déterminer ses racines.

$B(x) = (x - 8)(1\,200 - 30x) = -30(x - 8)(x - 40)$: racines 8 et 40.

6. En déduire le prix qui maximise le bénéfice et le bénéfice maximal.

Axe $x = 24$; $B(24) = 16 \times 480 = 7\,680$ €. Le bénéfice est maximal pour un prix de 24 € (et non 20 €).

Exercice 6. Modélisation : une arche

L'arche d'un pont est modélisée par la parabole d'équation $y = -0,08(x-5)(x-45)$ où x et y sont en mètres, l'axe des abscisses représentant la surface de l'eau.

1. Quelle est la largeur de l'arche au niveau de l'eau?

Les racines sont 5 et 45 : la largeur est $45 - 5 = 40$ m.

2. Quelle est la hauteur maximale de l'arche?

Axe $x = 25$; $y = -0,08 \times 20 \times (-20) = 32$ m.

3. Un bateau de 20 m de large et de 25 m de haut peut-il passer sous l'arche en restant centré?

Les bords du bateau sont en $x = 15$ et $x = 35$: $y = -0,08 \times 10 \times (-30) = 24$ m < 25 m. Non, il ne peut pas passer.

4. Quelle largeur maximale peut avoir un bateau de 25 m de haut pour passer en restant centré? (On pourra poser $x = 25 + t$.)

$y = -0,08(20+t)(t-20) = 0,08(400-t^2)$. $0,08(400-t^2) \geq 25 \iff t^2 \leq 87,5 \iff |t| \leq 9,35$ environ. Largeur maximale : environ $2 \times 9,35 \approx 18,7$ m.

5. Déterminer la forme développée de l'équation de l'arche.

$y = -0,08(x^2 - 50x + 225) = -0,08x^2 + 4x - 18$.