Application de la dérivation

Calculer une fonction dérivée

Exercice 1.

Calculer la dérivée de chaque fonction.

1. $f(x) = 5x - 3$
2. $g(x) = x^2 + 4x - 1$
3. $h(x) = -3x^2 + 6x$
4. $k(x) = x^3 - 2x^2 + x$
5. $m(x) = 4x^3 - 0,5x^2 + 10$
6. $p(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x$

Exercice 2.

Soit $f(x) = x^3 - 4x + 1$. Calculer $f'(x)$, puis $f'(2)$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

Exercice 3.

Calculer la dérivée de chaque fonction (on ne cherchera pas l'ensemble de dérivabilité).

1. $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2$
2. $g(x) = (3x - 1)(x^2 + 2)$
3. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
4. $k(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$
5. $m(x) = x\cos x$
6. $p(x) = 3x^2 + \dfrac{4}{x}$

Exercice 4.

Calculer la dérivée de chaque fonction.

1. $f(x) = (4x - 3)^2$
2. $g(x) = (1 - 2x)^3$
3. $h(t) = 5\cos(2t)$
4. $k(t) = 3\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$
5. $m(t) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}t - \dfrac{\pi}{3}\right)$
6. $p(x) = \dfrac{1}{3x + 2}$

Exercice 5. [Condensateur]

La charge d'un condensateur est $q(t) = 0{,}002\sin(100\pi t)$ (en coulombs, t en secondes). L'intensité du courant est $i(t) = q'(t)$.

1. Calculer $i(t)$.
2. Quelle est l'intensité maximale, au milliampère près ?

Étudier les variations d'une fonction

Exercice 6.

Étudier les variations des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$ et dresser leur tableau de variations.

1. $f(x) = x^2 - 8x + 3$
2. $g(x) = -2x^2 + 6x + 1$

Exercice 7.

Soit $f(x) = x^3 - 12x + 5$ sur $[-3;4]$.

1. Montrer que $f'(x) = 3(x-2)(x+2)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3. En déduire le maximum et le minimum de f sur $[-3;4]$.

Exercice 8.

Le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie sur $[0;10]$ est donné ci-dessous, avec $f(0) = 2$, $f(3) = 8$, $f(7) = 1$ et $f(10) = 5$.

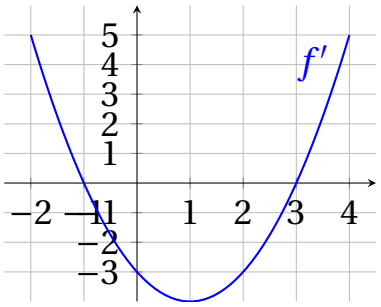
x	0		3		7		10
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

Dresser le tableau de variations de f et donner ses extremums.

Exercice 9.

On a représenté la courbe de la **dérivée** f' d'une fonction f définie sur $[-2;4]$.

1. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
2. En déduire les variations de f.



Résoudre un problème d'optimisation

Exercice 10. [Bénéfice]

Une entreprise fabrique x tonnes de produit ($0 \leqslant x \leqslant 8$). Son bénéfice, en milliers d'euros, est $B(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 5$.

1. Calculer $B'(x)$ et vérifier que $B'(x) = -3(x-1)(x-5)$.
2. Dresser le tableau de variations de B sur $[0;8]$.
3. Quelle production rend le bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

Exercice 11. [Coût marginal]

Le coût total de production de q objets est $C(q) = 0,01q^3 - 0,6q^2 + 15q + 100$ (en euros), pour $q \in [0;50]$. Le coût marginal est $C'(q)$.

1. Calculer $C'(q)$.
2. Déterminer la quantité pour laquelle le coût marginal est minimal.
3. Montrer que C est croissante sur $[0;50]$.

Exercice 12. [Boîte]

Dans une plaque carrée de 12 cm de côté, on découpe aux quatre coins des carrés de côté x pour fabriquer une boîte sans couvercle. Son volume est $V(x) = x(12-2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ pour $x \in [0;6]$.

1. Calculer $V'(x)$ et montrer que $V'(x) = 12(x-2)(x-6)$.
2. En déduire la valeur de x qui rend le volume maximal et ce volume.

Corrigé

