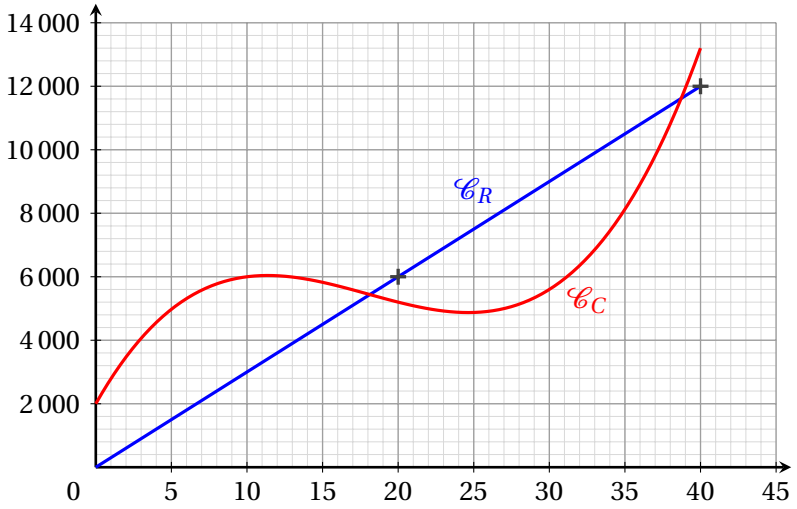
Épreuve anticipée de mathématiques
Première technologique
Fonctions et dérivation

Exercice 1.

Une entreprise peut produire entre 0 et 40 tonnes de compote par mois.
Le coût de production de x tonnes de compote, exprimé en euros, est donné par la fonction C définie sur $[0\,;\,40]$.
La recette réalisée pour x tonnes de compote vendues, exprimée en euros, est donnée par la fonction R définie sur $[0\,;\,40]$.
Dans cet exercice on s'intéresse à la différence entre la recette et le coût de production. Lorsque cette différence est positive on l'appelle le bénéfice.

Partie A – Étude graphique

Les représentations graphiques $\mathscr{C}_C$ et $\mathscr{C}_R$ des fonctions C et R sont données ci-dessous.



Vous répondrez aux trois questions suivantes en vous appuyant uniquement sur ce graphique.

1. Déterminer l'expression $R(x)$ de la recette réalisée pour x tonnes de compote vendues.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ? On donnera des valeurs approchées à l'entier près.
3. Avec la précision permise par le graphique, évaluer le bénéfice maximal réalisé par l'entreprise.

Partie B – Étude du résultat

On admet que le résultat réalisé pour x tonnes de compote fabriquées et vendues, exprimé en euro, est donné par la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;\,40]$ par :

$$B(x) = -x^3 + 54x^2 - 540x - 2\,000$$

On donne les valeurs suivantes :

$$B(0) = -2\,000\,; \quad B(6) = -3\,512\,; \quad B(30) = 3\,400\,; \quad B(40) = -1\,200$$

1. On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
Calculer $B'(x)$ et montrer que $B'(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$B'(x) = (-3x+18)(x-30)$$

2. Étudier le signe de B' sur l'intervalle $[0\ ;\ 40]$ et en déduire les variations de la fonction B sur ce même intervalle.

3. Pour quelle quantité de compote le bénéfice réalisé par l'entreprise est-il maximal ?

Corrigé

Partie A

1. $\mathscr{C}_R$ est une droite passant par l'origine : R est donc une fonction linéaire, de la forme $R(x) = ax$.
D'après les deux points de coordonnées $(20\ ;\ 6\,000)$ et $(40\ ;\ 12\,000)$ marqués sur le graphique :

$$a = \frac{12\,000 - 6\,000}{40 - 20} = \frac{6\,000}{20} = 300.$$

Pour tout x de $[0\ ;\ 40]$: $R(x) = 300x$.

2. L'entreprise réalise un bénéfice lorsque la recette dépasse le coût, c'est-à-dire lorsque $\mathscr{C}_R$ est au-dessus de $\mathscr{C}_C$.
Par lecture graphique, $\mathscr{C}_R$ est au-dessus de $\mathscr{C}_C$ entre les deux points d'intersection des courbes, d'abscisses environ 18 et 39. L'entreprise réalise donc un bénéfice pour x compris entre environ 18 et 39 tonnes.

3. Le bénéfice est maximal lorsque l'écart vertical entre $\mathscr{C}_R$ (au-dessus) et $\mathscr{C}_C$ (en dessous) est le plus grand.
Avec la précision permise par le graphique, cet écart est maximal pour $x \approx 30$; le bénéfice maximal est alors d'environ 3 400 €.

Partie B

Pour $x \in [0\ ;\ 40]$, $B(x) = -x^3 + 54x^2 - 540x - 2\,000$.

1. Pour tout réel x de $[0\ ;\ 40]$:

$$B'(x) = -3x^2 + 54 \times 2x - 540 = -3x^2 + 108x - 540.$$

D'autre part :

$$(-3x+18)(x-30) = -3x^2 - 90x + 18x - 540 = -3x^2 + 108x - 540.$$

Donc, pour tout x de $[0;40]$, $B'(x) = (-3x+18)(x-30)$.

2. $-3x + 18 = 0 \iff x = 6$ (coefficient $-3 < 0$: positif avant, négatif après) ;
$x - 30 = 0 \iff x = 30$ (coefficient $1 > 0$: négatif avant, positif après).

x	0		6		30		40
$-3x+18$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-30$		$-$			0	$+$	
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
B	$-2\,000$	↘	$-3\,512$	↗	$3\,400$	↘	$-1\,200$

La fonction B est décroissante sur $[0\,;\,6]$, croissante sur $[6\,;\,30]$, puis décroissante sur $[30\,;\,40]$.

3. D'après le tableau de variations, le bénéfice est maximal pour $x = 30$ tonnes de compote produites et vendues. Il vaut alors $B(30) = 3\,400$ (€).

Exercice 2.

Partie A

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = (12x - 480)(x - 10)$.

Établir le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Aide au calcul :

$480 = 40 \times 12$

Partie B

On s'intéresse dans cette partie à une usine qui fabrique des tracteurs. Chaque mois elle en vend entre 0 et 18. On note x le nombre de tracteurs vendus par mois.

On modélise alors le bénéfice de cette entreprise, **en centaines d'euros**, par la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;\,18]$ par

$$B(x) = 4x^3 - 300x^2 + 4\,800x - 10\,000.$$

1. Calculer $B(0)$.

2. On donne $B(18) = 2\,528$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. **a.** Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,18]$, calculer $B'(x)$ puis montrer que $B'(x) = f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie A.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;\,18]$.

c. À l'aide du tableau de variations, déterminer combien de tracteurs l'entreprise doit produire et vendre afin d'obtenir un bénéfice maximal. Quelle sera la valeur de ce bénéfice maximal ?

Corrigé

Partie A

Pour tout réel x, $f(x) = (12x - 480)(x - 10)$.

$12x - 480 = 0 \iff x = \dfrac{480}{12} = 40$ et $x - 10 = 0 \iff x = 10$.

Les deux coefficients de x (12 et 1) sont positifs : chaque facteur est négatif avant sa racine et positif après.

x	$-\infty$		10		40		$+\infty$
$12x - 480$		$-$		$-$	0	$+$	
$x - 10$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie B

Pour $x \in [0;18]$, $B(x) = 4x^3 - 300x^2 + 4800x - 10000$, où x est le nombre de tracteurs vendus par mois et $B(x)$ le bénéfice en centaines d'euros.

1. $B(0) = 4 \times 0 - 300 \times 0 + 4800 \times 0 - 10000 = -10000$.

Si l'usine ne vend aucun tracteur dans le mois, elle subit une perte de 10 000 centaines d'euros, soit 1 000 000 €.

2. Lorsque l'usine vend 18 tracteurs dans le mois, elle réalise un bénéfice de 2 528 centaines d'euros, soit 252 800 €.

3. a. Pour tout réel x de [0 ; 18] :

$$B'(x) = 4 \times 3x^2 - 300 \times 2x + 4800 = 12x^2 - 600x + 4800.$$

D'autre part :

$$f(x) = (12x - 480)(x - 10) = 12x^2 - 120x - 480x + 4800 = 12x^2 - 600x + 4800.$$

Donc, pour tout réel x de $[0;18]$, $B'(x) = f(x)$.

b. Le signe de $B'(x) = f(x)$ se lit dans le tableau de la partie A, restreint à l'intervalle $[0;18]$: seule la racine 10 s'y trouve ($40 > 18$).

$B(10) = 4000 - 30000 + 48000 - 10000 = 12000$.

x	0		10		18
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
B	-10000	↗	12000	↘	2528

c. D'après le tableau de variations, B atteint son maximum pour $x = 10$: l'entreprise doit produire et vendre **10 tracteurs** par mois. Le bénéfice maximal est alors $B(10) = 12\,000$ centaines d'euros, soit 1 200 000 €.

Exercice 3.

Soit la fonction f définie pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 200] par :

$$f(x) = -0{,}25x^2 + 30x - 500$$

1. Calculer l'image de 10 par la fonction f.

2. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 200],

$$f(x) = (-0{,}25x + 5)(x - 100)$$

3. Résoudre dans l'intervalle [0 ; 200] l'équation $f(x) = 0$.

4. Pour x dans l'intervalle [0 ; 200], déterminer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

5. Dans l'intervalle [0 ; 200], étudier le signe de f' et déterminer le tableau de variations de la fonction f.

Corrigé

1. $f(10) = -0{,}25 \times 10^2 + 30 \times 10 - 500 = -0{,}25 \times 100 + 300 - 500 = -225$: l'image de 10 par f est -225.

2. On développe $(-0{,}25x + 5)(x - 100) = -0{,}25x \times x - 0{,}25x \times (-100) + 5 \times x + 5 \times (-100)$.
Donc $(-0{,}25x + 5)(x - 100) = -0{,}25x^2 + 25x + 5x - 500 = f(x)$.
$(-0{,}25x + 5)(x - 100)$ est la forme factorisée de $f(x)$.

3. $f(x) = 0 \iff -0{,}25x + 5 = 0$ ou $x - 100 = 0$ (équation « produit nul »). Il y a deux solutions qui sont 20 et 100.

4. On a $f'(x) = -0{,}25 \times 2x + 30 = -0{,}5x + 30$.

5. f' est positive puis négative, et change de signe pour $x = 60$. f est donc croissante puis décroissante, et on peut construire son tableau de variations :

x	0		60		200
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	−500	↗	400	↘	−4500

NB : vraisemblablement, les valeurs prises par f ne sont pas exigibles dans le tableau de variations.

Pour $f(0)$, c'est quand même simple ...

Pour $f(60)$, $6\times 6=36$, donc $60^2=3\,600$, et $-0{,}25\times 3\,600=-900$ (le quart...) $3\times 6=18$, donc $30\times 60=1\,800$, on a donc « au final » $f(60)=-900+1\,800-500=400$.

Enfin pour $f(200)$, $2^2=4$, donc $200^2=40\,000$.

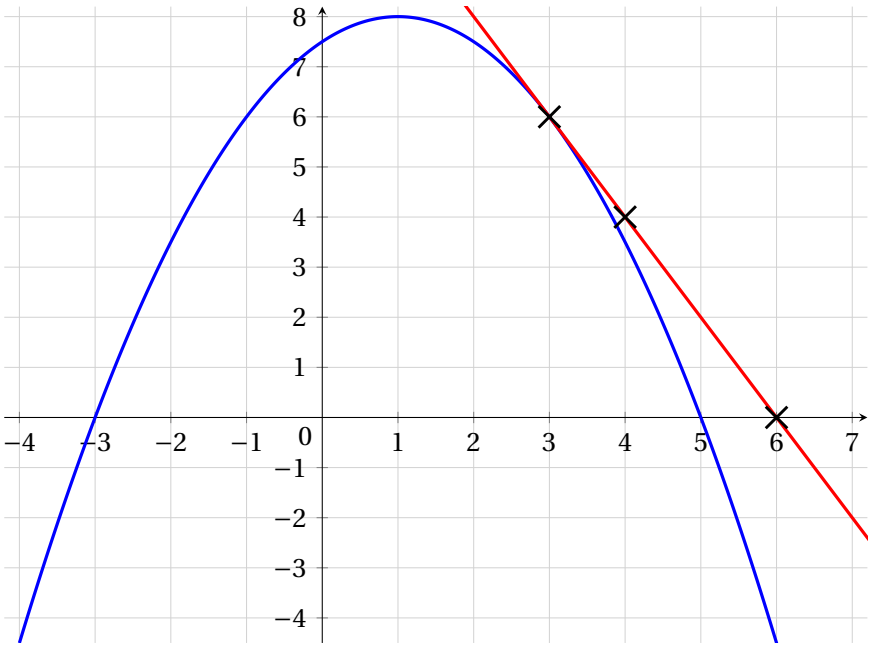
$-0{,}25\times 200^2=-10\,000$. $30\times 200=6\,000$, donc $f(200)=-10\,000+6\,000-500=-4\,500$.

Exercice 4.

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[-4;6]$ par

$$f(x)=-0{,}5x^2+x+7{,}5.$$

On note f' la fonction dérivée de f.
Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative de la fonction f et sa tangente au point d'abscisse 3 qui passe par les points de coordonnées (3;6), (4;4) et (6;0).



1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-4;6]$,

$$f(x)=(0{,}5x+1{,}5)(-x+5)$$

Les justifications demandées pour les trois questions suivantes peuvent se faire par des calculs ou par des lectures graphiques.

2. Déterminer le nombre dérivé en 3.

3. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

a. Affirmation a. : les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ sur $[-4;6]$ sont les nombres réels appartenant à l'intervalle $[-3;5]$.

b. Affirmation b. : $f'(x)$ est positif sur l'intervalle $[1;4]$.

Corrigé

1. On développe l'expression factorisée proposée :

$(0,5x+1,5)(-x+5) = 0,5x \times (-x) + 0,5x \times 5 + 1,5 \times (-x) + 1,5 \times 5$

On réduit les produits :

$(0,5x+1,5)(-x+5) = -0,5x^2 + 2,5x - 1,5x + 7,5$

On réduit les sommes :

$(0,5x+1,5)(-x+5) = -0,5x^2 + x + 7,5$

On obtient bien l'expression de $f(x)$ donnée dans le sujet.

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[-4;6]$,

$$f(x) = (0,5x+1,5)(-x+5) = -0,5x^2 + x + 7,5.$$

2. Le nombre dérivé en 3 est la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.

Par lecture graphique, $f'(3) = \dfrac{4-6}{4-3} = \dfrac{-2}{1} = -2$.

En donnant l'expression de la fonction dérivée : $f'(x) = -0,5 \times (2x) + 1 = -x + 1$.

On détermine $f'(3) = -3 + 1 = -2$.

3. a. Graphiquement, les points de la courbe d'ordonnée inférieure ou égal à 0 sont les points d'abscisse appartenant à $[-4;-3] \cup [5;6]$.

Algébriquement, on utilise la forme factorisée pour déterminer le signe.

$0,5x+1,5 = 0 \iff 0,5x = -1,5 \iff x = -3$ et $0,5x+1,5 > 0 \iff 0,5x > -1,5 \iff x > -3$

$-x+5 = 0 \iff x = 5$ et $-x+5 > 0 \iff 5 > x \iff x < 5$.

Sur l'intervalle $[-3;5]$, $0,5x+1,5 \geqslant 0$ et $-x+5 \geqslant 0$

donc le produit $(0,5x+1,5)(-x+5)$ est positif.

L'affirmation a est fausse.

b. Graphiquement, on voit que la fonction est décroissante sur l'intervalle $[1;4]$, donc le nombre dérivé $f'(x)$ est négatif sur l'intervalle $[1;4]$.

On a vu que $f'(3) = -2$ donc $f'(x)$ n'est pas positif sur l'intervalle $[1;4]$.

L'affirmation b est fausse.

Exercice 5.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse.
Dans tout l'exercice, on se place dans un repère orthonormé.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2(x+1)(x-3)(x-5).$$

Affirmation 1 : La fonction f est négative sur l'intervalle $[-1;3]$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = -3x^2 + 12x - 4.$$

On note $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative.

a. Affirmation 2 : L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 1 est :

$$y = 6x - 1$$

b. Affirmation 3 : La fonction h est croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

3. On considère la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

où x_1 et x_2 sont des réels.
On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.
On sait que :

- 2 est une racine de g ;
- la droite d'équation $x = 2{,}5$ est l'axe de symétrie de $\mathscr{C}_g$.

Affirmation 4 : $g(0) = 6$.

Corrigé

1. Affirmation 1 : Fausse.

On construit rapidement le tableau de signes de f :

x	$-\infty$		-1		3		5		$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc f est positive sur $[-1;3]$.

2. a. Affirmation 2 : Vraie.

Pour tout x réel, on a : $h'(x) = -6x + 12$,

donc $h'(1) = 6$: la pente de la tangente est 6.

Donc son équation est du type $y = 6x + b$, où b désigne l'ordonnée à l'origine.

Comme $h(1) = 5$, la tangente doit passer par ce point. On écrit $6 \times 1 + b = 5$, donc $b = -1$.

L'équation de la tangente en 1 est effectivement $y = 6x - 1$.

Remarque : On peut aussi utiliser directement la formule qui donne l'équation de la tangente : $y = h'(a)(x - a) + h(a)$

Ici, on veut la tangente au point d'abscisse 1, donc $a = 1$.

$y = h'(1)(x - 1) + h(1)$.

En remplaçant les valeurs connues : $y = 6(x - 1) + 5$

On simplifie : $y = 6x - 6 + 5$ soit $y = 6x - 1$.

b. Affirmation 3 : Fausse.

Sur $[2; +\infty[$, on a : $x \geqslant 2 \implies -6x \leqslant -12$ car $-6 < 0$

$\implies -6x + 12 \leqslant 0$

h' change de signe en 2 : la dérivée de h est négative sur $[2; +\infty[$, h est donc décroissante sur cet intervalle (elle est même strictement décroissante sur l'intervalle, car la dérivée ne s'annule que pour $x = 2$), c'est la stricte décroissance qui garantit que la fonction n'est pas croissante.

Remarque : On peut aussi ici justifier cela sans la fonction dérivée : on sait que la fonction h a un coefficient dominant strictement négatif (c'est -3), et donc, par propriété du cours, on sait que la fonction sera d'abord croissante, puis décroissante, avec un changement de variation pour $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-12}{2 \times (-3)} = 2$.

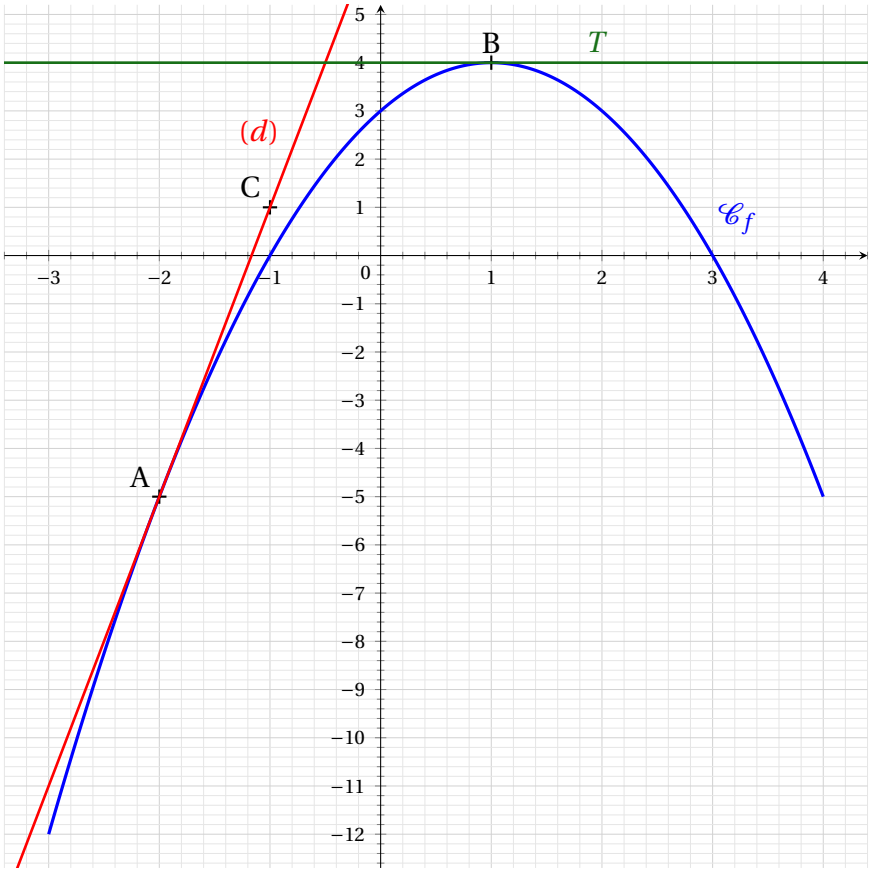
Sans même savoir où la fonction va changer de sens, on peut dire que de toutes façons, sur un intervalle non majoré, la fonction ne peut pas être croissante sur l'intervalle, à cause du coefficient dominant négatif.

3. Affirmation 4 : Vraie.

Puisque 2 est une racine de g et que l'axe de symétrie est la droite $x = 2{,}5$, cela signifie que l'autre racine de g est 3 : en effet les deux racines sont à la même distance de l'axe de symétrie.

Donc $g(x) = (x - 2)(x - 3)$ et $g(0) = (-2) \times (-3) = 6$.

Exercice 6.



On considère la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
On précise que :

— la droite (d) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A et passe par le point C ;

— la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

Par lecture graphique :

1. Déterminer $f(-2)$ et $f(1)$.

2. Déterminer $f'(-2)$ et $f'(1)$.

3. Résoudre l'équation $f(x)=0$.

4. Dresser le tableau de variation de f.

On admet que $f(x)=-x^2+2x+3$ sur l'intervalle $[-3\,;4]$.

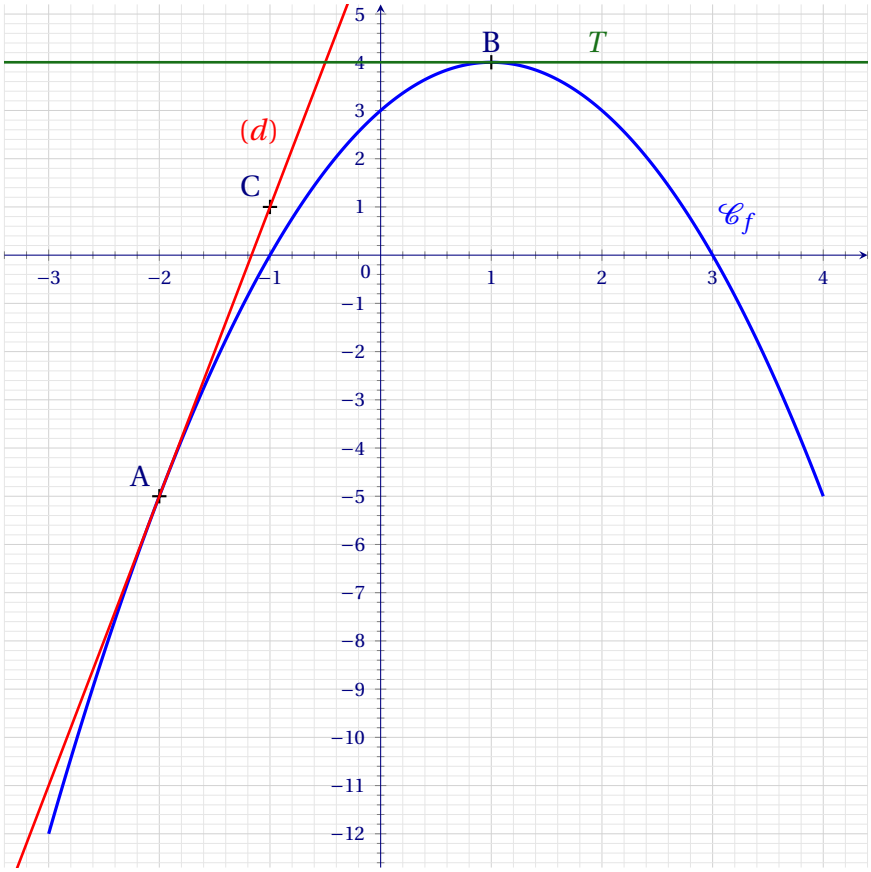
5. Retrouver par le calcul les résultats de la question 1.

6. a) Déterminer $f'(x)$ puis retrouver les résultats de la question 2.

b) Vérifier par le calcul que $f(x)=(x+1)(-x+3)$.
Retrouver les résultats de la question 3.

c) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-3\,;4]$.
En déduire les variations de la fonction f sur cet intervalle.

Corrigé



On considère la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
On précise que :

— la droite (d) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A et passe par le point C ;

— la tangente à C_f au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

Par lecture graphique :

1. Déterminer $f(-2)$ et $f(1)$.
2. Déterminer $f'(-2)$ et $f'(1)$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
4. Dresser le tableau de variation de f.

Solution :

1. $f(-2) = -5$ (coordonnées de A) et $f(1) = 4$ (coordonnées de B).
2. $f'(-2) = 6$ (pente de la droite (d) tangente de $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -2) et $f'(1) = 0$ (pente de la droite T tangente de $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 1).
3. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -1 et 3 car $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 3.
4.

x	-3		1		4
variation de $f(x)$	-12	↗	4	↘	-5

On admet que $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ sur l'intervalle $[-3\,;4]$.

5. Retrouver par le calcul les résultats de la question 1.

Solution :

$f(-2) = -(-2)^2 + 2 \times (-2) + 3 = -4 - 4 + 3 = -5$.

$f(1) = -1^2 + 2 \times 1 + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$.

6. a) Déterminer $f'(x)$ puis retrouver les résultats de la question 2.

Solution :

Pour tout x sur l'intervalle $[-3;4]$, $f'(x) = (-1) \times 2 \times x + 2 = -2x + 2$.

$f'(-2) = -2 \times (-2) + 2 = 4 + 2 = 6$.

$f'(1) = -2 \times 1 + 2 = -2 + 2 = 0$.

b) Vérifier par le calcul que $f(x) = (x+1)(-x+3)$.

Retrouver les résultats de la question 3.

Solution :

On développe l'expression $(x+1)(-x+3)$:

$(x+1)(-x+3) = x \times (-x) + 1 \times (-x) + x \times 3 + 1 \times 3$

On réduit les produits :

$(x+1)(-x+3) = -x^2 - x + 3x + 3$

On réduit les sommes :

$(x+1)(-x+3) = -x^2 + 2x + 3$

Ainsi on retrouve l'expression de $f(x)$. $f(x) = (x+1)(-x+3)$.

$(x+1)(-x+3) = 0 \iff (x+1) = 0$ ou $(-x+3) = 0$

$(x+1)(-x+3) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 3$

c) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-3\,;4]$.

En déduire les variations de la fonction f sur cet intervalle.

Solution :

$f'(x) = -2x + 2$

$-2x + 2 = 0 \iff x = 1$ et $-2x + 2 > 0 \iff 1 > x$ (comme le taux d'accroissements de la fonction affine $x \longmapsto -2x + 2$ vaut -2, alors $-2x + 2$ est positif pour les valeurs de x inférieures à la racine).

On établit le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-3\,;4]$:

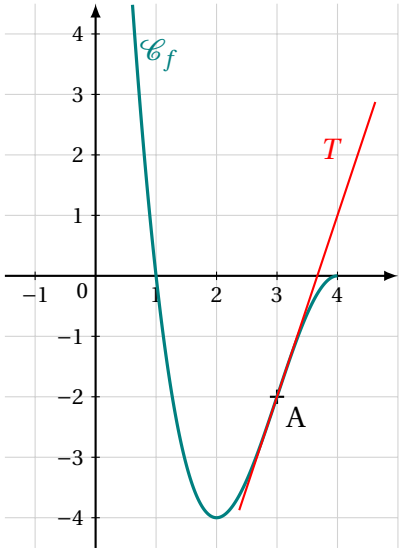
x	-3		1		4
signe de $f'(x) = -2x + 2$		$+$	0	$-$	

La fonction f est croissante sur les intervalles où $f'(x) \geqslant 0$, donc sur l'intervalle $[-3\,;1]$.

La fonction f est décroissante sur les intervalles où $f'(x) \leqslant 0$, donc sur l'intervalle $[1\,;4]$.

Exercice 7.

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;4]$, dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous.
La droite T est la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.



1. Par lecture graphique, déterminer :
   - **a.** l'image de 3 par la fonction f ;
   - **b.** le nombre dérivé $f'(3)$.
2. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par :

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 16$$

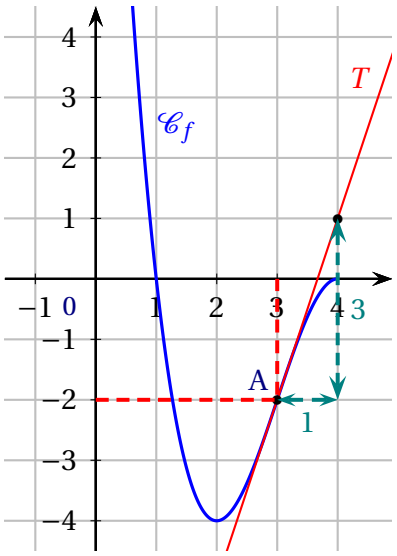
   - **a.** Calculer $f(0)$.
   - **b.** Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.
     Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;4]$, en détaillant les calculs.
   - **c.** Vérifier que pour tout réel x,

$$f'(x) = -3(x-2)(x-4).$$

   - **d.** Étudier le signe de $f'(x)$ et établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;4]$, en y faisant figurer les extrémums.
   - **e.** Quel est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;4]$?
     En quelle valeur est-il atteint ?

Corrigé

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;4]$, dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous.
La droite T est la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.



1. Par lecture graphique, déterminer :
   - **a.** l'image de 3 par la fonction f ;
     Le point A de la courbe d'abscisse 3 a pour ordonnée -2 ; donc : $f(3) = -2$.
   - **b.** le nombre dérivé $f'(3)$.
     Le nombre dérivé $f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente T au point d'abscisse 3.
     La droite T passe par le point $(3\,;-2)$ et, par lecture graphique, par le point $(4\,;1)$.
     Son coefficient directeur est donc :
     $\dfrac{1-(-2)}{4-3} = \dfrac{3}{1} = 3$.
     Ainsi : $f'(3) = 3$.

2. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;4]$ par :

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 16$$

a. Calculer $f(0)$.

On calcule : $f(0) = -0^3 + 9 \times 0^2 - 24 \times 0 + 16 = 16$.

b. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.

Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0;4]$, en détaillant les calculs.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0;4]$:

$$f'(x) = -1 \times 3x^2 + 9 \times 2x - 24 + 0 = -3x^2 + 18x - 24.$$

c. Vérifier que pour tout réel x,

$$f'(x) = -3(x-2)(x-4).$$

On développe le deuxième produit, on réduit, on développe le premier produit, on réduit :

$$-3(x-2)(x-4) = -3(x^2 - 4x - 2x + 8) = -3(x^2 - 6x + 8) = -3x^2 + 18x - 24.$$

On retrouve bien l'expression de $f'(x)$ donnée.

3. **a.** Étudier le signe de $f'(x)$ et établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$, en y faisant figurer les extrémums.

On utilise la forme factorisée : $f'(x) = -3(x-2)(x-4)$.

Le facteur $x-2$ est nul en 2, le facteur $x-4$ est nul en 4.

$x-2 > 0$ pour $x > 2$, $x-4 > 0$ pour $x > 4$

Calculons les valeurs utiles :

On a déjà : $f(0) = 16$,

$$f(2) = -2^3 + 9 \times 2^2 - 24 \times 2 + 16 = -8 + 36 - 48 + 16 = -4,$$

$$f(4) = -4^3 + 9 \times 4^2 - 24 \times 4 + 16 = -64 + 144 - 96 + 16 = 0.$$

On obtient :

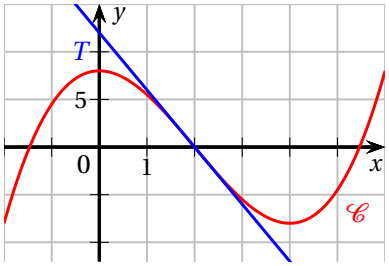
x	0		2		4
-3		$-$		$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
f	16	↘	-4	↗	0

b. Quel est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$?
En quelle valeur est-il atteint ?
D'après le tableau de variation, le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$ est $y=-4$, il est atteint pour $x=2$.

Exercice 8.

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;\,6]$.

Sa courbe représentative, notée $\mathscr{C}$ est donnée ci-contre.



— On sait que la courbe $\mathscr{C}$ passe par les points de coordonnées $(0\,;\,8)$, $(2\,;\,0)$ et $(4\,;\,-8)$.

— On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x=2$.

— On sait que la tangente T coupe l'axe des ordonnées en $y=12$.

On note f' la fonction dérivée de f.

1. **a.** Déterminer les valeurs de $f(2)$ et $f'(2)$.

b. Donner une équation de la tangente T.

c. Recopier et compléter le tableau de variation ci-dessous en utilisant le graphique.

x	-2		0		4		6
variations de f							

2. On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[-2\,;\,6]$ par

$$f(x)=0{,}5x^3-3x^2+8.$$

a. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;\,6]$, on a $f'(x)=1{,}5x(x-4)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et retrouver le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;\,6]$.

3. On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,2]$ on a $f(x)\leqslant -6x+12$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T sur l'intervalle $[0\,;\,2]$?

Corrigé

1. **a.** • La courbe C contient le point de coordonnées $(0\,;2)$, donc $f(2)=0$.

• La tangente T contient les points $(0\,;12)$ et $(2\,;0)$; son coefficient directeur égal au nombre dérivé $f'(2)$ est donc $\dfrac{0-12}{2-0}=\dfrac{-12}{2}=-6$.

b. L'ordonnée à l'origine est égale à 12 et le coefficient directeur est égal à -6, donc : $M(x\,;\,y)\in T$ si $y=-6x+12$.

c.

x	-2		0		4		6
Variations de f		↗	8	↘	-8	↗	

2. **a.** f est une fonction polynôme dérivable pour tout réel x et :
$f'(x)=3\times 0{,}5\times x^2-2\times 3x=1{,}5x^2-6x=1{,}5x(x-4)$.

b. On établit le tableau de signes de cette fonction dérivée :

x	-2		0		4		6
$1{,}5x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. $f(x)\leqslant -6x+12$ sur l'intervalle $[0\,;2]$: géométriquement la courbe C est au-dessous de la tangente T (en rouge) sur l'intervalle $[0\,;2]$.

Exercice 9.

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=-x^2+6x-5$.

1. Calculer l'image de 0 et de 3 par la fonction f.

2. Montrer que, pour tout réel x, on a : $(x-1)(5-x)=-x^2+6x-5$.

3. En déduire les antécédents de 0 par la fonction f.

4. Montrer que pour tout réel x, on a : $4-(x-3)^2=-x^2+6x-5$.

5. Est-il possible de trouver un réel x, tel que $f(x)>4$? Justifier.

6. Réaliser un schéma donnant l'allure la courbe de la fonction f sur lequel apparaîtront les résultats des questions **1., 3. et 5.**

Corrigé

$f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

1. $f(0) = 0 + 0 - 5 = -5$;
   $f(3) = -3^2 + 6 \times 3 - 5 = -9 + 18 - 5 = 4$.
2. Pour tout réel x, $(x-1)(5-x) = 5x - x^2 - 5 + x = -x^2 + 6x - 5 = f(x)$.
3. D'après la factorisation précédente : $f(1) = 0 \times 4 = 0$ et $f(5) = 4 \times 0 = 0$: soit 0 a deux antécédents 1 et 5.
4. Quel que soit le réel x , $4 - (x-3)^2 = 4 - \left(x^2 + 9 - 6x\right) = 4 - x^2 - 9 + 6x = -x^2 + 6x - 5 = f(x)$.
5. Quel que soit le réel x, $(x-3)^2 \geqslant 0$, donc $-(x-3)^2 \leqslant 0$ et en ajoutant 4 à chaque membre de cette inéquation :
   $4 - (x-3)^2 \leqslant 4$ ou encore $f(x) \leqslant 4$: la plus grande valeur de la fonction f est donc 4 : il n'existe pas de réel x tel que $f(x) > 4$.
6. 