Épreuve anticipée de mathématiques
Première technologique
Suites

Exercice 1.

Cet exercice contient quatre affirmations.
Pour chaque affirmation, répondre par VRAI ou FAUX, en justifiant la réponse.

Au 1er janvier 2025, un étang contient 3 000 m^3 d'eau.
Chaque année, l'étang perd 10 % de son volume d'eau.
On modélise l'évolution du volume d'eau de cet étang par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité d'eau, en mètre cube, contenue dans l'étang, le 1er janvier de l'année $2025+n$.
Ainsi, on a $u_0 = 3\,000$.
La feuille de calcul ci-contre donne les valeurs des premiers termes de cette suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	3000
3	1	2700
4	2	2430
5	3	2187
6	4	1968,3
7	5	1771,47
8	6	1594,323
9	7	1434,8907
10	8	1291,40163
11	9	1162,26147
12	10	1046,03532
13	11	941,431788
14	12	847,288609
15	13	762,559748

1. **Affirmation**
   Pour obtenir les termes de la suite (u_n), la formule saisie dans la cellule B3 puis étirée vers le bas est : `= 0,90 * A3`
2. **Affirmation**
   La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0,90$ et de 1er terme $u_0 = 3\,000$.

Au 1er janvier 2025, un second étang contient quant à lui 4 000 m^3 d'eau. Chaque année, cet étang perd 20 % de son volume d'eau initial mais il est naturellement alimenté par un cours d'eau qui augmente son volume d'eau de 140 m^3 par an.
On peut également modéliser l'évolution du volume d'eau de cet étang par une suite (v_n) où, pour tout entier naturel n, v_n désigne la quantité d'eau, en mètre cube, contenue dans l'étang, le 1er janvier de l'année $2025+n$.
Ainsi, on a $v_0 = 4\,000$.
La feuille de calcul ci-contre donne les valeurs des premiers termes de cette suite (v_n).

	A	B
1	n	v_n
2	0	4000
3	1	
4	2	2812
5	3	2389,6
6	4	2051,68
7	5	1781,344
8	6	1565,0752
9	7	1392,06016
10	8	1253,64813
11	9	1142,9185
12	10	1054,3348
13	11	983,467842
14	12	926,774273
15	13	881,419419

3. **Affirmation**
   On a $v_1 = 3\,340$.
4. **Affirmation**
   Les volumes des deux étangs passeront simultanément en dessous de 1 000 m^3 à partir de 2036.

Corrigé

Premier étang : $u_0 = 3\,000$, perte de 10 % du volume chaque année. Second étang : $v_0 = 4\,000$, perte de 20 % du volume chaque année, compensée par un apport de 140 m^3 par an.

1. **Affirmation fausse.**
   Perdre 10 % de son volume chaque année revient à multiplier le volume de l'année précédente par 0,90. La formule doit donc faire référence à la valeur de u_n de la ligne précédente (colonne B), et non à la colonne A qui contient les valeurs de n. La formule correcte est `= 0,90 * B2`.

2. **Affirmation fausse.**
   $u_1 - u_0 = 2\,700 - 3\,000 = -300$.
   $u_2 - u_1 = 2\,430 - 2\,700 = -270$.
   La différence de deux termes consécutifs n'est pas constante donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

3. **Affirmation vraie.**
   Perdre 20 % du volume revient à multiplier par 0,8 ; l'apport annuel de 140 m^3 s'ajoute ensuite :
   $$v_1 = 0,8 \times v_0 + 140 = 0,8 \times 4\,000 + 140 = 3\,200 + 140 = 3\,340.$$

4. **Affirmation vraie.**
   Pour le premier étang : $u_{10} \approx 1\,046 \geqslant 1\,000$ et $u_{11} \approx 941 < 1\,000$.
   Pour le second étang : $v_{10} \approx 1\,054 \geqslant 1\,000$ et $v_{11} \approx 983 < 1\,000$.
   Dans les deux cas, c'est au rang $n = 11$, c'est-à-dire à partir de l'année $2025 + 11 = 2036$, que le volume d'eau passe sous 1 000 m^3.

Exercice 2.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de raison $r = 5$ et telle que $u_5 = 10$.
   Affirmation : $u_7 = 250$.

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 + 1$.
   Affirmation : la suite (u_n) est une suite géométrique.

3. Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = 5x^2 - 2x + 3$.
   Affirmation : une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est donnée par :
   $$y = 8x - 2.$$

4. Avec la chaleur et la surpêche, une association de pêcheurs constate chaque année que le nombre de truites présentes dans l'étang de leur commune diminue de 15 %. À partir de 2024, pour enrayer ce phénomène, ils décident de réintroduire chaque année 100 truites dans l'étang. Pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de truites en $2024 + n$.
   Affirmation : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,15\,u_n + 100$.

Corrigé

1. **Affirmation fausse.**
   Dans une suite arithmétique de raison r, on passe d'un terme au suivant en ajoutant r :
   $$u_6 = u_5 + 5 = 15 \qquad \text{et} \qquad u_7 = u_6 + 5 = 20.$$

2. **Affirmation fausse.**
   On calcule les premiers termes : $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 9$, $u_3 = 19$.
   $$\frac{u_1}{u_0} = 3, \qquad \frac{u_2}{u_1} = 3 \qquad \text{mais} \qquad \frac{u_3}{u_2} = \frac{19}{9} \neq 3.$$
   Le quotient de deux termes consécutifs n'est pas constant : la suite (u_n) n'est pas géométrique.

3. **Affirmation vraie.**
   L'équation de la tangente au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
   $f(1) = 5 - 2 + 3 = 6$; $f'(x) = 10x - 2$, donc $f'(1) = 8$. La tangente a pour équation
   $$y = 8(x-1) + 6$$
   $$y = 8x - 8 + 6$$
   $$y = 8x - 2$$

4. **Affirmation fausse.**
   Une diminution de 15 % correspond au coefficient multiplicateur $1 - \dfrac{15}{100} = 0,85$.
   Chaque année, il reste 85 % des truites de l'année précédente, auxquelles on ajoute les 100 truites réintroduites : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,85u_n + 100$.

Exercice 3.

Au 1er janvier 2025, une réserve d'eau naturelle contient 3 000 m^3 d'eau.
Une étude indique que la réserve perd chaque année 10 % du volume d'eau qu'elle avait en début d'année.

On modélise l'évolution du volume d'eau de cette réserve par une suite (u_n), où u_n désigne la quantité d'eau, exprimée en mètres cubes, contenue dans la réserve au 1er janvier de l'année $2025+n$.
On a donc $u_0 = 3\,000$.

1. Montrer que $u_1 = 2\,700$.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.
4. Dans la feuille de calcul suivante on a calculé les premiers termes de la suite (u_n). Le format des cellules de la ligne 2 permet d'afficher les nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 700	2 430	2 187	1 968	1 771	1 594	1 435

Quelle formule a été saisie en cellule C2 afin d'obtenir, par glisser-coller vers la droite, les premiers termes de la suite (u_n) ?

5. Pour assurer la sécurité de la lutte contre les incendies on estime que la réserve doit contenir au moins 2 000 m^3.

D'après le tableau précédent, à partir de quelle année la quantité d'eau dans la réserve deviendra insuffisante ?

Corrigé

1. Chaque année, le volume diminue de 10%. Comme 10% de 3 000 c'est 300 (le dixième), le volume de la réserve sera égal à $3\,000 - 300 = 2\,700$ au 1er janvier 2026, et donc $u_1 = 2\,700$.

2. Enlever 10% d'une quantité revient à multiplier celle-ci par $1 - \dfrac{10}{100} = 0{,}9$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n$.

3. (u_n) est donc une suite géométrique (relation de récurrence multiplicative), et sa raison est 0,9.

4. On a utilisé dans la cellule **C2** la relation de récurrence, pour écrire `=0,9*B2`.

5. D'après le tableau, la quantité d'eau devient inférieure à 2 000 m^3 pour $n = 4$: c'est donc à partir du 1er janvier 2029 que la quantité d'eau dans la réserve deviendra insuffisante.

Exercice 4.

Une personne souhaite emprunter 10 000 €, remboursables en six versements annuels.
Un établissement de crédit propose les deux formules.

- **Formule 1 :** Le premier versement est 1 025 € et les versements annuels suivants augmentent de 400 € chaque année par rapport au versement précédent.
- **Formule 2 :** le premier versement est 1 550 € et les versements annuels suivants augmentent de 10 % chaque année par rapport au versement précédent.

Partie A

On se place dans le cas de la **formule 1**.
Étant donné un entier naturel n, on appelle u_n le versement, exprimé en euros, de l'année $2025 + n$.
On a $u_0 = 1\,025$.

1. Calculer u_1.

2. Donner la nature de la suite (u_n) et donner sa raison.

3. Donner la valeur du dernier versement u_5.

Partie B

On se place dans le cas de la **formule 2**.

Étant donné un entier naturel n, on appelle v_n le versement, exprimé en euros, de l'année $2025+n$.

On a $v_0 = 1\,550$.

1. Quel calcul permet d'obtenir $v_1 = 1\,705$?
2. Quelle est la nature de la suite (v_n) et donner sa raison.

Partie C

La feuille de calcul suivante présente, pour chaque année et pour chaque formule, le cumul des montants remboursés depuis le début du crédit.

Le montant final en gras dans le tableau, en ligne 7, correspond à la somme des 10 000 € empruntés et des intérêts perçus par l'établissement de crédit.

	A	B	C
1	n	**Formule 1**	**Formule 2**
2	0	1 025,00 €	1 550,00 €
3	1	2 450,00 €	3 255,00 €
4	2	4 275,00 €	5 130,50 €
5	3	6 500,00 €	7 193,55 €
6	4	9 125,00 €	9 462,91 €
7	5	**12 150,00 €**	**11 959,20 €**

Quelle est la formule la plus avantageuse pour la personne qui emprunte ?

Justifier.

Corrigé

Partie A

1. On a : $u_1 = u_0 + 400 = 1\,025 + 1\,025 = 1\,425$.
2. Pour calculer un terme de la suite (u_n) on ajoute 400 au terme précédent. Ainsi (u_n) est une suite **arithmétique** de raison 400.
3.

n	u_n	calcul
0	1 025	
1	1 425	1 025 + 400
2	1 825	1 425 + 400
3	2 225	1 825 + 400
4	2 625	2 225 + 400
5	3 025	2 625 + 400

Le dernier versement u_5 est une somme de 3 025 e.

Partie B

1. Augmenter de 10 % c'est multiplier par $1,1$.
$v_1 = 1,1 \times 1\,550 = 1\,550 + 155 = 1\,705$.

2. Pour calculer un terme de la suite (v_n) on multiplie le terme précédent par $1,1$.
Ainsi (v_n) est une suite **géométrique** de raison $1,1$.

Partie C

Pour la formule 1 les intérêts sont égaux à $12\,150{,}00 - 10\,000{,}00 = 2\,150{,}00$ *e*.
Pour la formule 2 les intérêts sont égaux à $11\,959{,}20 - 10\,000{,}00 = 1\,959{,}20$ *e*.
$1\,929{,}20 < 2\,150$. Ainsi la formule 2 est plus avantageuse pour l'emprunteur car le montant des intérêts est moins important.

Exercice 5.

Au 1er janvier 2025, une famille installe des éoliennes domestiques qui produiront une quantité d'énergie de 3 000 kWh en 2025.
On constate que chaque année, la quantité d'énergie produite par cette installation baisse de 5 %.
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note u_n la quantité d'énergie (en kWh) produite par l'installation durant l'année $(2025 + n)$.
On a donc $u_0 = 3000$.

1. a. Quelle sera la quantité d'énergie produite par l'installation durant l'année 2026 ?

Détailler les calculs.

b. Justifier que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0,95 \times u_n.$$

c. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Préciser sa raison.

À l'aide d'un tableur, on a obtenu les valeurs successives des termes de la suite (u_n).
On donne ci-contre un extrait de la feuille de calculs.

2. Vous répondrez aux questions suivantes à l'aide du tableau ci-contre.

a. Déterminer à partir de quelle année la quantité d'énergie produite sera inférieure à 1 000 kWh.

b. Après 25 ans de fonctionnement, le fabricant affirme que la quantité d'énergie produite s'élèvera à plus de 30 % de la quantité produite initialement.

Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?

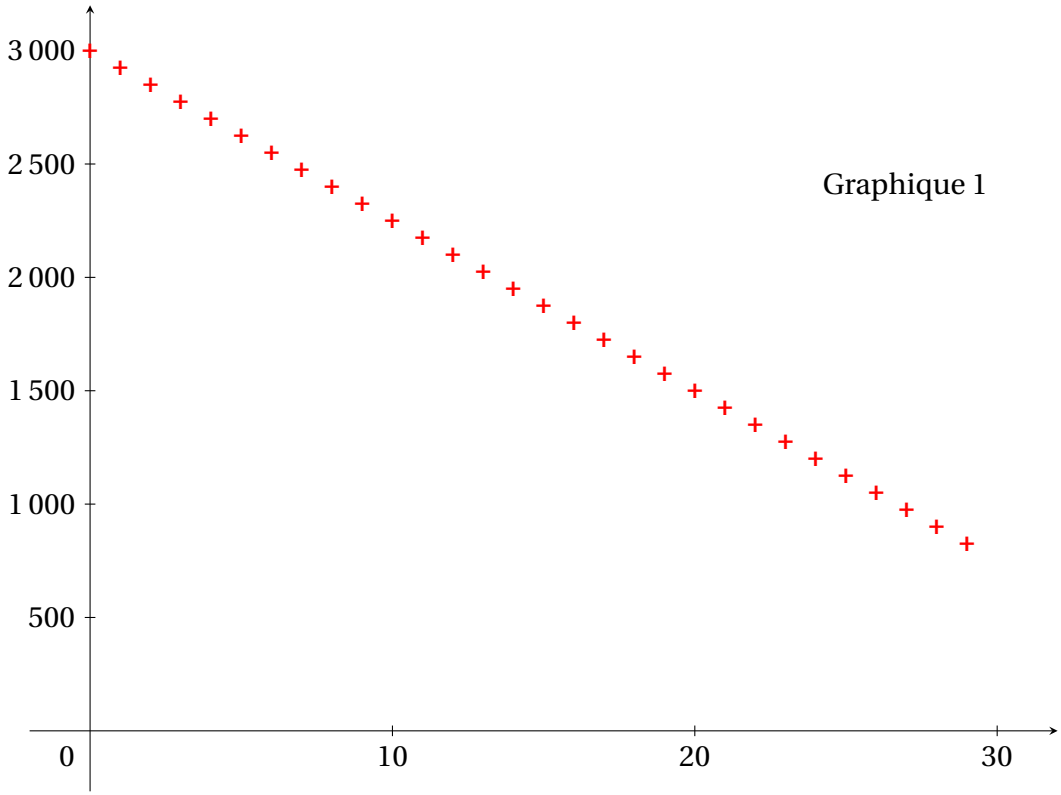
Justifier.

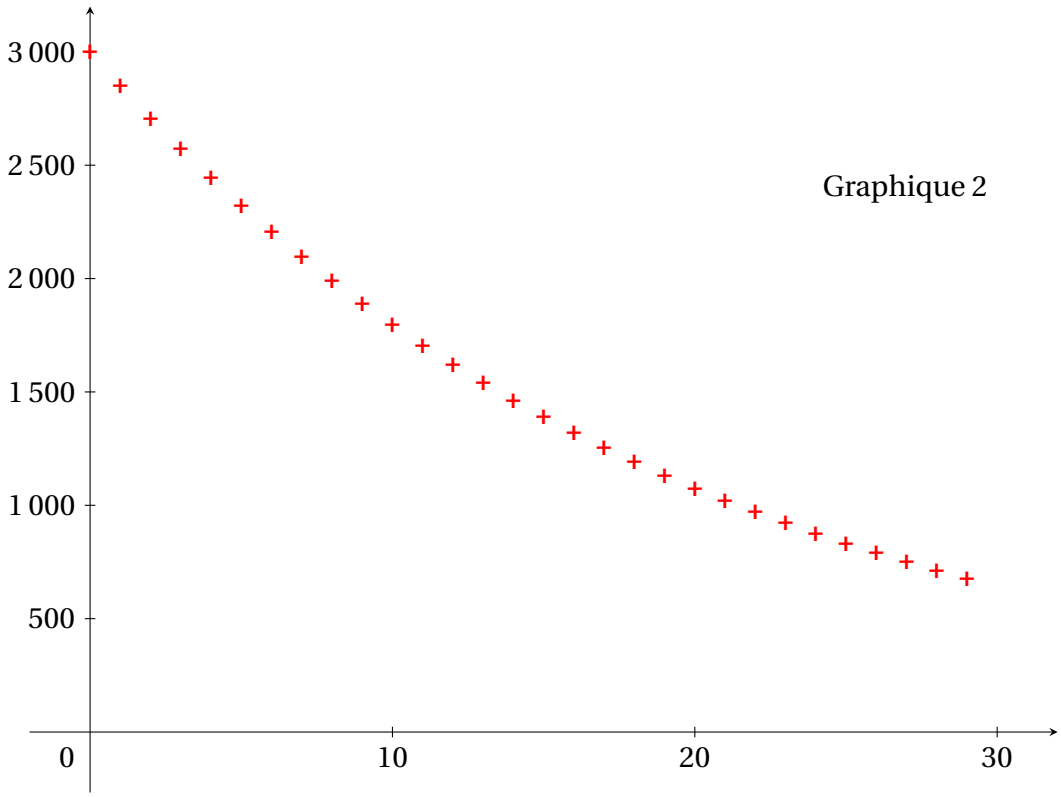
	A	B
1	Valeur de n	Valeur de u_n
2	0	3000,00
3	1	
4	2	2707,50
5	3	2572,13
6	4	2443,52
7	5	2321,34
8	6	2205,28
9	7	2095,01
10	8	1990,26
11	9	1890,75
12	10	1796,21
13	11	1706,40
14	12	1621,08
15	13	1540,03
16	14	1463,02
17	15	1389,87
18	16	1320,38
19	17	1254,36
20	18	1191,64
21	19	1132,06
22	20	1075,46
23	21	1021,68
24	22	970,60
25	23	922,07
26	24	875,97
27	25	832,17
28	26	790,56
29	27	751,03
30	28	713,48
31	29	677,81
32	30	643,92
33	31	611,72
34	32	581,13

3. On a représenté ci-dessous deux suites.

Indiquer le graphique correspondant à la représentation de la suite (u_n).

Justifier votre réponse.





Corrigé

1. a. En 2026, la production diminue de 5 % par rapport à celle de 2025, elle est donc multipliée par 0,95.

$3\,000 \times 0,95 = 3 \times 1000 \times 0,95 = 3 \times 950 = 3 \times (1\,000 - 50) = 3\,000 - 150 = 2\,850$.

La production en 2026 sera donc de 2 850 kWh.

b. Diminuer une quantité de 5 % revient à multiplier celle-ci par 0,95.

Puisque la production de l'année $n+1$ baisse de 5 % par rapport à celle de l'année n, on a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95 \times u_n$.

c. La relation de récurrence de la suite (u_n) est celle d'une suite géométrique de raison 0,95.

2. a. On lit dans le tableau (ligne 24) que la valeur de u_n est inférieure à 1 000 lorsque n devient supérieur ou égal à 22.

$2025 + 22 = 2047$.

C'est donc à partir de 2047 que la production sera inférieure à 1 000 kWh.

b. D'après le tableau (ligne 27), la production sera de 832,17 kWh au bout de 25 années, soit environ 28 % de la quantité initiale, donc l'affirmation du fabricant est fausse.

3. Le graphique 1 ne peut pas représenter (u_n). En effet, les points sont alignés, ce qui caractérise une suite arithmétique, alors que (u_n) est une suite géométrique.

C'est donc le graphique 2 qui représente (u_n).

Exercice 6.

Une salle de sport propose deux offres d'abonnement :
Abonnement n°1 : 250 € en 2026 puis une augmentation de 30 € par an.
Abonnement n°2 : 200 € en 2026 puis une augmentation de 10% par an.
Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A : Abonnement n°1.

Pour tout entier naturel n, on note a_n le montant de l'abonnement n°1 pour l'année $2026 + n$.
On a ainsi $a_0 = 250$.

1. a) Calculer le montant de l'abonnement pour 2027.

b) Calculer a_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+1} en fonction de a_n.

3. En déduire la nature de la suite (a_n) et préciser sa raison.

PARTIE B : Abonnement n°2.

Pour tout entier naturel n, on note b_n le montant de l'abonnement n°2 pour l'année $2026 + n$.
On a ainsi $b_0 = 200$.

1. Justifier que le montant de l'abonnement en 2027 s'élève à 220 €.

2. Exprimer, pour tout entier naturel n, b_{n+1} en fonction de b_n.

3. En déduire la nature de la suite (b_n) et préciser sa raison.

PARTIE C : Comparaison des offres

Pour tout entier naturel n on note $c_n = a_n - b_n$.

Les premiers termes des suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont donnés sur la feuille de calcul ci-contre.

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	250 €	200 €	50 €
3	1	280 €	220 €	60 €
4	2	310 €	242,00 €	68 €
5	3	340 €	266,20 €	73,80 €
6	4	370 €	292,82 €	77,18 €
7	5	400 €	322,10 €	77,90 €
8	6	430 €	354,31 €	75,69 €
9	7	460 €	389,74 €	70,26 €
10	8	490 €	428,72 €	61,28 €
11	9	520 €	471,59 €	48,41 €
12	10	550 €	518,75 €	31,25 €
13	11	580 €	570,62 €	9,38 €
14	12	610 €	627,69 €	−17,69 €
15	13	640 €	690,45 €	−50,45 €
16	14	670 €	759,50 €	−89,50 €

1. Quelle formule, destinée à être étirée vers le bas, doit-on écrire dans la cellule D2 ?
2. À partir de quelle année le montant de l'abonnement n°2 devient-il plus élevé que le montant de l'abonnement n°1 ?

Corrigé

Une salle de sport propose deux offres d'abonnement :
Abonnement n°1 : 250 € en 2026 puis une augmentation de 30 € par an.
Abonnement n°2 : 200 € en 2026 puis une augmentation de 10% par an.
Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A : Abonnement n°1.

Pour tout entier naturel n, on note a_n le montant de l'abonnement n°1 pour l'année $2026+n$.
On a ainsi $a_0 = 250$.

1. a) Calculer le montant de l'abonnement pour 2027.
   b) Calculer a_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+1} en fonction de a_n.
3. En déduire la nature de la suite (a_n) et préciser sa raison.

Solution :

1. a) $2027 = 2026+1$ on doit déterminer $a_1 = a_0 + 30 = 250 + 30 = 280$. En 2027 l'abonnement n°1 sera 30 € plus cher qu'en 2026, soit $250+30=280$.
   b) $a_2 = a_1 + 30 = 280 + 30 = 310$. En 2028 ($2028 = 2026+2$), l'abonnement n°1 sera de 310 €.
2. Pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = a_n + 30$.
3. (a_n) est une suite arithmétique de raison 30 (on passe d'un terme au suivant en ajoutant le même nombre 30).

PARTIE B : Abonnement n°2.

Pour tout entier naturel n, on note b_n le montant de l'abonnement n°2 pour l'année $2026+n$.
On a ainsi $b_0 = 200$.

1. Justifier que le montant de l'abonnement en 2027 s'élève à 220 €.
2. Exprimer, pour tout entier naturel n, b_{n+1} en fonction de b_n.
3. En déduire la nature de la suite (b_n) et préciser sa raison.

Solution :

1. Augmenter de 10 % revient à multiplier par 1,1. $200 \times 1{,}1 = 220$. En 2027 après l'augmentation de 10 %, le montant de l'abonnement s'élève à 220 €.
2. Pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 1{,}1 \times b_n$.
3. (b_n) est une suite géométrique de raison 1,1 (on passe d'un terme au suivant en multipliant par le même nombre 1,1).

PARTIE C : Comparaison des offres

Pour tout entier naturel n on note $c_n = a_n - b_n$.

Les premiers termes des suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont donnés sur la feuille de calcul ci-contre.

1. Quelle formule, destinée à être étirée vers le bas, doit-on écrire dans la cellule D2 ?
2. À partir de quelle année le montant de l'abonnement n°2 devient-il plus élevé que le montant de l'abonnement n°1 ?

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	250 €	200 €	50 €
3	1	280 €	220 €	60 €
4	2	310 €	242,00 €	68 €
5	3	340 €	266,20 €	73,80 €
6	4	370 €	292,82 €	77,18 €
7	5	400 €	322,10 €	77,90 €
8	6	430 €	354,31 €	75,69 €
9	7	460 €	389,74 €	70,26 €
10	8	490 €	428,72 €	61,28 €
11	9	520 €	471,59 €	48,41 €
12	10	550 €	518,75 €	31,25 €
13	11	580 €	570,62 €	9,38 €
14	12	610 €	627,69 €	−17,69 €
15	13	640 €	690,45 €	−50,45 €
16	14	670 €	759,50 €	−89,50 €

Solution :

1. Dans la cellule D2, on saisit la formule `= B2 - C2`
2. En D14 on observe que la valeur est négative. À partir de $n = 12$, $c_n < 0$. Cela signifie qu'à partir de 2038 (2038 = 2026 + 12), l'abonnement n°1 sera plus intéressant que l'abonnement n°2.

Exercice 7.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant la réponse.
Toutes les affirmations sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
   Affirmation 1 : $u_3 = 47$.

2. Mathétix anime une chaîne vidéo sur le thème des mathématiques.
   Il observe qu'entre deux mois consécutifs, il perd un dixième de ses abonnés mais il en gagne 200.
   On modélise cette évolution par la suite (V_n), avec V_n le nombre d'abonnés le n-ième mois.
   Affirmation 2 : On a : $V_{n+1} = 1{,}1V_n + 200$ pour tout entier naturel n.

3. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n+4}{3}$.
   Affirmation 3 : La suite (w_n) est une suite arithmétique de premier terme 4 et de raison $\dfrac{1}{3}$.

4. On interroge 200 élèves sur leur moyen de transport pour venir au lycée.

	Filles	**Garçons**	**Total**
Bus	90		150
Autre	15	35	50
Total	105	95	200

   On utilisera ce tableau pour les affirmations 4 et 5.
   On choisit un élève au hasard.

   Affirmation 4 : La probabilité qu'il se rende au lycée en bus est de $\dfrac{3}{4}$.

   Affirmation 5 : Sachant que l'élève a pris le bus, la probabilité que ce soit un garçon est de 0,6.

Corrigé

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
   Affirmation 1 : $u_3 = 47$.
   On calcule les premiers termes de la suite :

$$u_1 = 2u_0 + 1 = 2 \times 5 + 1 = 11,$$

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 2 \times 11 + 1 = 23,$$

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 2 \times 23 + 1 = 47.$$

   L'affirmation 1 est donc **vraie**.

2. Mathétix anime une chaîne vidéo sur le thème des mathématiques.
Il observe qu'entre deux mois consécutifs, il perd un dixième de ses abonnés mais il en gagne 200.
On modélise cette évolution par la suite (V_n), avec V_n le nombre d'abonnés le n-ième mois.
Affirmation 2 : On a : $V_{n+1} = 1{,}1V_n + 200$ pour tout entier naturel n.
Perdre un dixième de ses abonnés revient à conserver les neuf dixièmes, c'est-à-dire multiplier par :

$$1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0{,}9.$$

Puis Mathétix gagne 200 abonnés. On a donc, pour tout entier naturel n :

$$V_{n+1} = 0{,}9V_n + 200.$$

La formule proposée $V_{n+1} = 1{,}1V_n + 200$ correspondrait à une augmentation de 10 %, et non à une perte d'un dixième.
L'affirmation 2 est donc **fausse**.

3. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n+4}{3}$.
Affirmation 3 : La suite (w_n) est une suite arithmétique de premier terme 4 et de raison $\dfrac{1}{3}$.
Le premier terme de la suite (w_n) est : $w_0 = \dfrac{0+4}{3} = \dfrac{4}{3}$, et non 4.
L'affirmation 3 est donc **fausse**.

4. On interroge 200 élèves sur leur moyen de transport pour venir au lycée.

	Filles	**Garçons**	**Total**
Bus	90		150
Autre	15	35	50
Total	105	95	200

On utilisera ce tableau pour les affirmations 4 et 5.
On choisit un élève au hasard.

Affirmation 4 : La probabilité qu'il se rende au lycée en bus est de $\dfrac{3}{4}$.
La probabilité qu'un élève choisi au hasard se rende au lycée en bus est :

$$P(B) = \frac{150}{200} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}.$$

L'affirmation 4 est donc **vraie**.

Affirmation 5 : Sachant que l'élève a pris le bus, la probabilité que ce soit un garçon est de 0,6.
On trouve d'abord la valeur manquante dans case du tableau : il y a 150 élèves qui prennent le bus, dont 90 filles. Il y a donc $150 - 90 = 60$ garçons qui prennent le bus.
La probabilité cherchée est donc :

$$P_B(G) = \frac{60}{150} = \frac{2}{5} = 0{,}4 \neq 0{,}6.$$

L'affirmation 5 est donc **fausse**.

Exercice 8.

Une biologiste désire étudier l'évolution de la population de singes sur une île.
En 2025, elle estime qu'il y a 1 000 singes sur l'île.

A. Premier modèle

Chaque année, la population de singes baisse de 10 %.

1. Montrer qu'en 2026, il y aura 900 singes sur l'île.
2. Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de singes sur l'île pour l'année $2025+n$.
   On a donc $u_0 = 1\,000$.
   a. Indiquer ce que représente u_2 et calculer sa valeur.
   b. Déterminer la nature de la suite (u_n) et préciser sa raison.
   c. Donner les variations de cette suite.
3. Selon ce modèle, la population de singes est-elle menacée d'extinction ? Justifier.

B. Second modèle

On admet que l'évolution du nombre de singes est modélisée par la suite (v_n) ainsi définie :

$$\begin{cases} v_{n+1} = 0,9v_n + 150 \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \\ v_0 = 1\,000 \end{cases},$$

où v_n désigne le nombre de singes sur l'île pour l'année $2025+n$.

1. Avec ce modèle, quelle sera la population de singes en 2026 ?
   Détailler le calcul.
2. La feuille de calcul ci-contre donne les valeurs arrondies à l'unité des premiers termes de la suite (v_n).
   Quelle formule, destinée à être étirée vers le bas, faut-il saisir dans la cellule B3 pour obtenir les termes de la suite (v_n) ?
3. Indiquer en quelle année, la population de singes dépassera pour la première fois 1 400 individus.

	A	B
1	n	v_n
2	0	1 000
3	1	1 050
4	2	1 095
5	3	1 136
6	4	1 172
7	5	1 205
8	6	1 234
9	7	1 261
10	8	1 285
11	9	1 306
12	10	1 326
13	11	1 343
14	12	1 359
15	13	1 373
16	14	1 386
17	15	1 397
18	16	1 407
19	17	1 417
20	18	1 425
21	19	1 432

Corrigé
Premier modèle

1. Effectuer une baisse de 10 % revient à multiplier par $1 - \dfrac{10}{100} = \dfrac{90}{100} = 0,9$.
   Il y aura un an plus tard en 2026 : $1\,000 \times 0,9 = 900$ (singes).

2. **a.** u_2 est égal au nombre de singes en 2025 + 2. Comme $u_2 = u_1 \times 0,9$ et que $u_1 = 900$, on a $u_2 = 900 \times 0,9 = 810$ (singes).

   b. On a donc d'une année $2025 + n$ à l'année suivante $2025 + n + 1$: $u_{n+1} = 0,9u_n$: cette égalité montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme 1 000.

   c. Comme $0 < 0,9 < 1$, la suite (u_n) est décroissante.

3. La suite est décroissante et chaque année 10 % de la population disparait : à terme la population va diminuer (de plus en plus lentement) mais sera inférieure à 1 : la population est menacée d'extinction.

Second modèle

1. la population en 2026 est :
   $v_2 = 0,9 \times v_1 + 150 = 0,9 \times 1\,000 + 150 = 900 + 150 = 1\,050$ (singes).
2. On saisit dans la case B3 : `=0.9*B2+150`.
3. On lit dans le tableau $v_{16} \approx 1417 > 1\,400$.
   La population devrait dépasser 1 400 individus en 2025 + 16 = 2041.

Exercice 9.

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant la réponse.

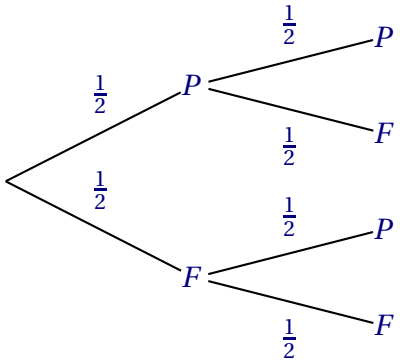
1. On considère une suite arithmétique (u_n) de raison $r = \frac{1}{2}$.
   On sait que $u_{50} = 1\,000$.
   Affirmation 1 : $u_{60} = 1\,005$.
2. On considère une suite géométrique (u_n) de raison q positive.
   On sait que $u_{100} = 5$ et que $u_{102} = 20$.
   Affirmation 2 : $u_{99} = 2,5$.
3. **Affirmation 3 :** Il est possible de trouver au moins un réel x tel que $x + x = x^2$.
4. On lance deux pièces équilibrées.
   On gagne si les deux pièces tombent du même côté, c'est-à-dire si elles tombent toutes les deux sur PILE ou si elles tombent toutes les deux sur FACE.
   Affirmation 4 : On a une chance sur quatre de gagner.

Corrigé

1. On passe de u_{50} à u_{60} en ajoutant 10 fois $r = \frac{1}{2}$, soit $10 \times \frac{1}{2} = 5$. Donc $u_{60} = 1\,000 + 5 = 1\,005$.
2. O a $u_{101} = u_{100} \times q$ et $u_{102} = u_{101} \times q$, donc :
   $u_{102} = u_{100} \times q \times q = u_{100} \times q^2$ ou avec les données de l'énoncé :
   $20 = 5 \times q^2$, soit $4 = q^2$ et $q = 2$ puisque la raison est positive.
   Donc $u_{100} = u_{99} \times q$, soit $5 = u_{99} \times 2$, d'où l'on obtient $u_{99} = 2,5$.

3. $x+x=x^2$ ou $2x=x^2$ ou $2x-x^2=0$ ou en factorisant x :
$x(2-x)=0$, donc $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ 2-x & = & 0 \end{array}\right.$: il y a donc deux solutions : $x=0$ et $x=2$.

4. Avec P : « la pièce tombe sur pile » et F : « la pièce tombe sur face on peut dresser l'arbre suivant :



On a donc $p(PP)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ et de même :
$p(FF)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.
La probabilité de gagner est donc égale à : $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$