Corrigé
Dérivation

Calculer un taux de variation et un nombre dérivé

Exercice 1.

Soit $f(x) = x^2 - 3x$.

1. Calculer le taux de variation de f entre 1 et 4.
2. Montrer que le taux de variation entre 2 et $2+h$ vaut $1+h$.
3. En déduire $f'(2)$.
4. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie le taux de variation de f entre 2 et $2+h$. Que renvoient `taux(0.1)`, `taux(0.01)` et `taux(0.001)` ? Est-ce cohérent avec la question 3 ?

```
def f(x):
    return x**2 - 3*x
def taux(h):
    return ( ... - ... ) / h
```

1. $\frac{f(4)-f(1)}{3} = \frac{4-(-2)}{3} = 2$.
2. $f(2+h) = 4+4h+h^2-6-3h = h^2+h-2$, $f(2) = -2$: $\frac{h^2+h}{h} = h+1$.
3. $h+1 \to 1$: $f'(2) = 1$.
4. Le taux de variation entre 2 et $2+h$ est $\big(f(2+h) - f(2)\big)/h$:

```
def f(x):
    return x**2 - 3*x
def taux(h):
    return (f(2 + h) - f(2)) / h
```

On obtient (aux erreurs d'arrondi de Python près) 1,1 ; 1,01 ; 1,001, c'est-à-dire $1+h$: ces valeurs se rapprochent de $f'(2) = 1$.

Exercice 2.

Par la même méthode, calculer :

1. $f'(1)$ pour $f(x) = 2x^2$ **2.** $g'(-1)$ pour $g(x) = x^3$ **3.** $k'(2)$ pour $k(x) = \dfrac{1}{x}$

1. $\frac{2(1+h)^2-2}{h} = 4+2h \to 4$.

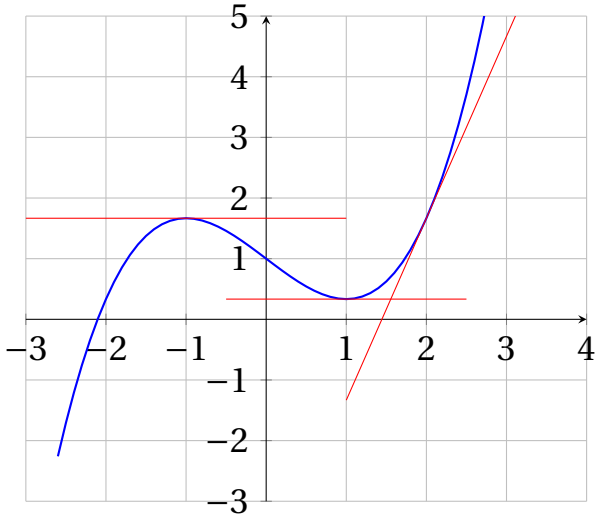
2. $\frac{(-1+h)^3+1}{h} = 3-3h+h^2 \to 3$.

3. $\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h} = \frac{-1}{2(2+h)} \to -\frac{1}{4}$.

Lire et utiliser le nombre dérivé, déterminer une tangente

Exercice 3.

La courbe de f et trois de ses tangentes sont tracées. Lire $f(-1)$, $f'(-1)$, $f(1)$, $f'(1)$, $f(2)$ et $f'(2)$.



$f(-1) \approx 1,67$, $f'(-1) = 0$ (tangente horizontale) ; $f(1) \approx 0,33$, $f'(1) = 0$; $f(2) \approx 1,67$, $f'(2) = 3$.

Exercice 4.

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a dans chaque cas.

1. $f(1) = 2$ et $f'(1) = 3$
2. $f(0) = -1$ et $f'(0) = 0,5$
3. $f(-2) = 4$ et $f'(-2) = -1$
4. $f(3) = 0$ et $f'(3) = 0$

1. $y = 3(x-1)+2 = 3x-1$.
2. $y = 0,5x-1$.
3. $y = -(x+2)+4 = -x+2$.
4. $y = 0$ (tangente horizontale confondue avec l'axe des abscisses).

Exercice 5.

Soit $f(x) = x^2+1$.

1. Montrer que, pour $h \neq 0$, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2+h$. En déduire $f'(1)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

1. $f(1+h)-f(1) = 1+2h+h^2+1-2 = 2h+h^2$, donc le taux vaut $2+h$, qui tend vers 2 : $f'(1) = 2$.
2. $f(1) = 2$: $y = 2(x-1)+2 = 2x$.

Exercice 6.

Soit $g(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

1. Montrer que $\dfrac{g(2+h)-g(2)}{h} = \dfrac{-1}{2(2+h)}$. En déduire $g'(2)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.

1. $\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} = \frac{2-(2+h)}{2(2+h)} = \frac{-h}{2(2+h)}$; on divise par h. Quand h tend vers 0, on obtient $g'(2) = -\frac{1}{4}$.
2. $y = -\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x+1$.

Exercice 7. [Vitesse instantanée]

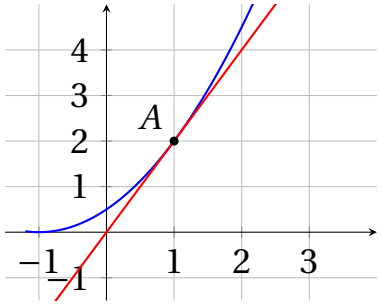
Une balle lâchée du haut d'une tour parcourt $d(t) = 4,9t^2$ mètres en t secondes.

1. Calculer sa vitesse moyenne entre $t = 2$ et $t = 3$.
2. Montrer que $\dfrac{d(2+h)-d(2)}{h} = 19,6+4,9h$. En déduire sa vitesse instantanée à $t = 2$.

1. $\frac{44,1-19,6}{1} = 24,5$ m/s.
2. $d(2+h)-d(2) = 4,9(4h+h^2) = 19,6h+4,9h^2$: le taux vaut $19,6+4,9h$, qui tend vers 19,6 m/s.

Exercice 8.

On a tracé la courbe d'une fonction f et sa tangente T au point A d'abscisse 1.



1. Lire $f(1)$.
2. Lire le coefficient directeur de T. En déduire $f'(1)$.
3. Donner l'équation réduite de T.

1. $f(1) = 2$.
2. T passe par $(0;0)$ et $(1;2)$: coefficient directeur 2, donc $f'(1) = 2$.
3. $y = 2x$.

Utiliser l'approximation affine

Exercice 9.

On donne $f(x) = x^3$.

1. Calculer $f(2)$ et $f'(2)$ à l'aide du taux de variation, sachant que $\dfrac{(2+h)^3-8}{h} = 12+6h+h^2$.
2. En déduire une valeur approchée de $2,01^3$ et de $1,98^3$. Comparer avec la calculatrice.

1. $f(2) = 8$; quand h tend vers 0, $12+6h+h^2$ tend vers 12 : $f'(2) = 12$.
2. $2,01^3 \approx 8+12\times 0,01 = 8,12$ (exact : 8,120601) ; $1,98^3 \approx 8-12\times 0,02 = 7,76$ (exact : 7,762392).

Exercice 10. [Dilatation]

La longueur (en m) d'une barre métallique en fonction de la température θ (en °C) est $L(\theta)$. On sait que $L(20) = 2$ et $\dfrac{dL}{d\theta}(20) = 2,4 \times 10^{-5}$.

1. Donner une valeur approchée de la longueur à 30 °C.
2. De combien de millimètres la barre s'allonge-t-elle environ entre 20 °C et 50 °C ?

1. $L(30) \approx 2 + 2,4 \times 10^{-5} \times 10 = 2,00024$ m.
2. $\Delta L \approx 2,4 \times 10^{-5} \times 30 = 7,2 \times 10^{-4}$ m, soit environ $0,72$ mm.