Corrigé
Primitives

Vérifier et utiliser la définition

Exercice 1.

Dans chaque cas, vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. $F(x) = x^4 - 3x^2 + 7$ et $f(x) = 4x^3 - 6x$.
2. $F(t) = 5\sin(3t)$ et $f(t) = 15\cos(3t)$.
3. $F(x) = (2x+1)^2$ et $f(x) = 8x + 4$.

1. $F'(x) = 4x^3 - 6x = f(x)$.
2. $F'(t) = 5 \times 3\cos(3t) = 15\cos(3t)$.
3. $F(x) = 4x^2 + 4x + 1$ donc $F'(x) = 8x + 4$.

Exercice 2.

$F(x) = x^2 + 3x$ et $G(x) = x^2 + 3x - 8$. Montrer que F et G sont deux primitives d'une même fonction f à préciser. Que vaut $F(x) - G(x)$?

$F'(x) = G'(x) = 2x + 3 = f(x)$. $F(x) - G(x) = 8$: les deux primitives diffèrent d'une constante.

Calculer des primitives

Exercice 3.

Déterminer une primitive de chaque fonction sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 7$
2. $f(x) = 4x + 3$
3. $f(x) = x^2 - 5x + 1$
4. $f(x) = 6x^5 - 2x^3$
5. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$
6. $f(x) = (x-1)(x+2)$

1. $F(x) = 7x$
2. $F(x) = 2x^2 + 3x$
3. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + x$
4. $F(x) = x^6 - \frac{x^4}{2}$
5. $F(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}$
6. $x^2 + x - 2 : F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$

Exercice 4.

Déterminer une primitive de chaque fonction sur $\mathbb{R}$.

1. $f(t) = \cos t$
2. $f(t) = \sin t$
3. $f(t) = 4\cos(2t)$
4. $f(t) = 6\sin(3t)$
5. $f(t) = 10\cos\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$
6. $f(t) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$

1. $F(t) = \sin t$
2. $F(t) = -\cos t$
3. $F(t) = 2\sin(2t)$
4. $F(t) = -2\cos(3t)$
5. $F(t) = \frac{1}{10\pi}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$
6. $F(t) = -\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

Exercice 5.

Déterminer la primitive F de f vérifiant la condition donnée.

1. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ et $F(1) = 0$.
2. $f(t) = \cos(2t)$ et $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.
3. $f(x) = x - 4$ et $F(2) = -1$.

1. $F(x) = x^3 - x^2 + x + k$; $F(1) = 1 + k = 0 : F(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.
2. $F(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) + k$; $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + k = 1 : F(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{2}$.
3. $F(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + k$; $F(2) = 2 - 8 + k = -1 : k = 5$.

Exercice 6. [Mouvement]

Un mobile se déplace sur un axe. Sa vitesse (en m/s) à l'instant t (en s) est $v(t) = -2t + 8$. La position $x(t)$ est une primitive de v et $x(0) = 5$.

1. Déterminer $x(t)$.
2. À quel instant le mobile s'arrête-t-il ? Quelle est alors sa position ?

1. $x(t) = -t^2 + 8t + 5$.
2. $v(t) = 0 \iff t = 4$ s ; $x(4) = -16 + 32 + 5 = 21$ m.

Utiliser la méthode d'Euler

Exercice 7.

On considère le problème : $y' = t^2$ et $y(0) = 0$.

1. Appliquer la méthode d'Euler avec un pas $h = 0,5$ pour obtenir une valeur approchée de $y(2)$. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Déterminer la solution exacte et comparer.

1. $y_{n+1} = y_n + 0,5\,t_n^2$:

t_n	0	0,5	1	1,5	2
y_n	0	0	0,125	0,625	1,75

2. $y(t) = \dfrac{t^3}{3}$, $y(2) = \dfrac{8}{3} \approx 2,67$. L'approximation 1,75 est grossière : il faut un pas plus petit.

Exercice 8. [Charge d'un condensateur]

L'intensité (en A) qui traverse un circuit est $i(t) = \cos(t)$ et la charge q du condensateur vérifie $q'(t) = i(t)$ avec $q(0) = 0$.

1. Compléter l'algorithme de la méthode d'Euler (pas $h = 0,1$) pour calculer une valeur approchée de $q(1)$.

```
from math import cos
t, q, h = 0, 0, 0.1
for k in range (.....):
    q = .....
    t = t + h
print(q)
```

2. Le programme affiche 0,8638 (arrondi). Déterminer la valeur exacte de $q(1)$ et comparer.

1. `range(10)` et `q = q + h * cos(t)`.
2. $q(t) = \sin t$, $q(1) = \sin 1 \approx 0,8415$. L'écart est d'environ 0,02.