Corrigé
Fonctions trigonométriques

Étudier les fonctions cosinus et sinus

Exercice 1.

1. Montrer que la fonction $f(x) = \cos(2x)$ est paire et périodique de période π.
2. Montrer que $g(x) = x\sin x$ est paire et que $h(x) = \sin x + \sin(3x)$ est impaire.

1. $f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x)$; $f(x+\pi) = \cos(2x+2\pi) = \cos(2x)$.
2. $g(-x) = (-x)\sin(-x) = x\sin x$; $h(-x) = -\sin x - \sin(3x) = -h(x)$.

Exercice 2.

La hauteur d'eau (en m) dans un port est modélisée par $h(t) = 5 + 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$, où t est le temps en heures après minuit.

1. Calculer $h(0)$, $h(3)$, $h(6)$.
2. Quelle est la période de la marée ? Les hauteurs minimale et maximale ?
3. Un bateau a besoin d'au moins 6 m d'eau. Pendant quelles heures peut-il entrer au port entre 0 h et 12 h ?

1. $h(0) = 7$; $h(3) = 5$; $h(6) = 3$.
2. Période 12 h ; minimum 3 m, maximum 7 m.
3. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right) \geqslant \frac{1}{2} \iff \dfrac{\pi}{6}t \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{3}\,;\,2\pi\right] \iff t \in [0\,;\,2] \cup [10\,;\,12]$.

Exercice 3.

Justifier, à l'aide des angles associés, que :

1. la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe de la fonction sinus (on calculera $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+h\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-h\right)$) ;
2. le point de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction cosinus.

1. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right) = \cos h$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right) = \cos h$: les points d'abscisses $\frac{\pi}{2} \pm h$ ont la même ordonnée, d'où la symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{2}$.
2. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right) = -\sin h$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right) = \sin h$: les ordonnées sont opposées, d'où la symétrie de centre $\left(\frac{\pi}{2}\,;\,0\right)$.

Exercice 4.

Pour chaque fonction, donner l'amplitude, la pulsation, la période et la phase à l'origine.

1. $f(t) = 3\cos(2t)$
2. $g(t) = 5\sin\left(\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$
3. $h(t) = 0{,}5\cos\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{3}\right)$
4. $k(t) = 12\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$

1. $A = 3$, $\omega = 2$, $T = \pi$, $\varphi = 0$.
2. $A = 5$, $\omega = \pi$, $T = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
3. $A = 0{,}5$, $\omega = 100\pi$, $T = 0{,}02$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.
4. $A = 12$, $\omega = \frac{\pi}{6}$, $T = 12$, $\varphi = 0$.

Exercice 5. [Courant alternatif]

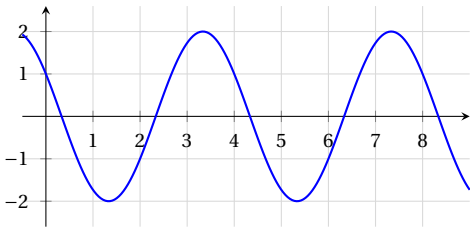
Aux États-Unis, la tension du secteur a une valeur maximale de 170 V et une fréquence de 60 Hz. On la modélise par $u(t) = A\sin(\omega t)$.

1. Déterminer A, la période T et la pulsation ω.
2. Calculer $u(0{,}002)$ au volt près.
3. Combien de fois la tension atteint-elle sa valeur maximale en une seconde ?

1. $A = 170$; $T = \frac{1}{60} \approx 0{,}0167$ s ; $\omega = 2\pi \times 60 = 120\pi$ rad/s.
2. $u(0{,}002) = 170\sin(0{,}24\pi) \approx 116$ V.
3. 60 fois (une fois par période).

Exercice 6. [Lecture graphique]

La courbe ci-contre représente une fonction $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ avec $A > 0$, $\omega > 0$.



1. Lire l'amplitude A et la période T. En déduire ω.
2. Lire $f(0)$. En déduire $\cos\varphi$, puis une valeur de φ sachant que f est décroissante en 0 (on admet que cela impose $\sin\varphi > 0$).

1. $A = 2$; $T = 4$; $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

2. $f(0) = 1$ donc $2\cos\varphi = 1$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$; avec $\sin\varphi > 0$: $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Ainsi $f(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 7. [Ressort]

La position (en cm) d'une masse accrochée à un ressort est $x(t) = 4\cos(5t)$, t en secondes.

1. Entre quelles positions la masse oscille-t-elle ?

2. Calculer la période au centième de seconde près et la fréquence.

3. Résoudre $x(t) = 2$ pour $t \in \left[0\,;\,\dfrac{2\pi}{5}\right]$.

1. Entre -4 cm et 4 cm.

2. $T = \frac{2\pi}{5} \approx 1{,}26$ s ; $f = \frac{5}{2\pi} \approx 0{,}80$ Hz.

3. $\cos(5t) = \frac{1}{2}$ avec $5t \in [0\,;\,2\pi]$: $5t = \frac{\pi}{3}$ ou $5t = \frac{5\pi}{3}$, donc $t = \frac{\pi}{15}$ ou $t = \frac{\pi}{3}$.