Corrigé
Application de la dérivation

Calculer une fonction dérivée

Exercice 1.

Calculer la dérivée de chaque fonction.

1. $f(x) = 5x - 3$

2. $g(x) = x^2 + 4x - 1$

3. $h(x) = -3x^2 + 6x$

4. $k(x) = x^3 - 2x^2 + x$

5. $m(x) = 4x^3 - 0,5x^2 + 10$

6. $p(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x$

1. $f'(x) = 5$. 2. $g'(x) = 2x + 4$. 3. $h'(x) = -6x + 6$. 4. $k'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. 5. $m'(x) = 12x^2 - x$. 6. $p'(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Exercice 2.

Soit $f(x) = x^3 - 4x + 1$. Calculer $f'(x)$, puis $f'(2)$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

$f'(x) = 3x^2 - 4$, $f'(2) = 8$, $f(2) = 1$: $y = 8(x-2) + 1 = 8x - 15$.

Étudier les variations d'une fonction

Exercice 3.

Étudier les variations des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$ et dresser leur tableau de variations.

1. $f(x) = x^2 - 8x + 3$

2. $g(x) = -2x^2 + 6x + 1$

1. $f'(x) = 2x - 8$, négatif avant 4, positif après : minimum $f(4) = -13$.

2. $g'(x) = -4x + 6$, positif avant $1,5$, négatif après : maximum $g(1,5) = 5,5$.

Exercice 4.

Soit $f(x) = x^3 - 12x + 5$ sur $[-3;4]$.

1. Montrer que $f'(x) = 3(x-2)(x+2)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3. En déduire le maximum et le minimum de f sur $[-3;4]$.

1. $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4) = 3(x-2)(x+2)$.
2. Positif sur $[-3;-2]$ et $[2;4]$, négatif sur $[-2;2]$. $f(-3) = 14$, $f(-2) = 21$, $f(2) = -11$, $f(4) = 21$.
3. Maximum 21 (en -2 et en 4), minimum -11 (en 2).

Exercice 5.

Le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie sur $[0;10]$ est donné ci-dessous, avec $f(0) = 2$, $f(3) = 8$, $f(7) = 1$ et $f(10) = 5$.

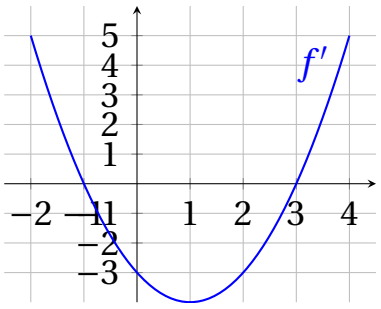
x	0		3		7		10
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

Dresser le tableau de variations de f et donner ses extremums.

Croissante sur $[0;3]$, décroissante sur $[3;7]$, croissante sur $[7;10]$. Maximum 8 en 3, minimum 1 en 7.

Exercice 6.

On a représenté la courbe de la **dérivée** f' d'une fonction f définie sur $[-2;4]$.



1. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
2. En déduire les variations de f.

$f'(x) = (x+1)(x-3)$: positive sur $[-2;-1]$ et $[3;4]$, négative sur $[-1;3]$. f est croissante, puis décroissante, puis croissante.

Résoudre un problème d'optimisation

Exercice 7. [Bénéfice]

Une entreprise fabrique x tonnes de produit ($0 \leqslant x \leqslant 8$). Son bénéfice, en milliers d'euros, est $B(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 5$.

1. Calculer $B'(x)$ et vérifier que $B'(x) = -3(x-1)(x-5)$.
2. Dresser le tableau de variations de B sur $[0;8]$.
3. Quelle production rend le bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

1. $B'(x) = -3x^2 + 18x - 15 = -3(x^2 - 6x + 5) = -3(x-1)(x-5)$.
2. B décroissante sur $[0;1]$, croissante sur $[1;5]$, décroissante sur $[5;8]$. $B(0) = -5$, $B(1) = -12$, $B(5) = 20$, $B(8) = -61$.
3. 5 tonnes, bénéfice 20 000 €.

Exercice 8. [Coût marginal]

Le coût total de production de q objets est $C(q) = 0,01q^3 - 0,6q^2 + 15q + 100$ (en euros), pour $q \in [0;50]$. Le coût marginal est $C'(q)$.

1. Calculer $C'(q)$.
2. Déterminer la quantité pour laquelle le coût marginal est minimal.
3. Montrer que C est croissante sur $[0;50]$.

1. $C'(q) = 0,03q^2 - 1,2q + 15$.
2. Polynôme de degré 2 avec $a > 0$: minimum en $-\frac{-1,2}{0,06} = 20$; $C'(20) = 3$.
3. Le minimum de C' vaut $3 > 0$, donc $C'(q) > 0$ et C est croissante.

Exercice 9. [Boîte]

Dans une plaque carrée de 12 cm de côté, on découpe aux quatre coins des carrés de côté x pour fabriquer une boîte sans couvercle. Son volume est $V(x) = x(12-2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ pour $x \in [0;6]$.

1. Calculer $V'(x)$ et montrer que $V'(x) = 12(x-2)(x-6)$.
2. En déduire la valeur de x qui rend le volume maximal et ce volume.

1. $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x-2)(x-6)$.
2. V' positive sur $[0;2]$, négative sur $[2;6]$: maximum $V(2) = 2 \times 64 = 128$ cm³.