# Corrigé
# Généralités sur les fonctions

## Calculer une image, déterminer un antécédent

**Exercice 1.**

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Calculer $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$f(0) = 1$ ; $f(2) = -1$ ; $f(-1) = 5$ ; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{4}$.

**Exercice 2.**

Soit $g(x) = 4x - 7$. Déterminer l'antécédent de 5, puis celui de 0.

$4x - 7 = 5 \iff x = 3$ ; $4x - 7 = 0 \iff x = \frac{7}{4}$.

**Exercice 3.**

Une entreprise fabrique des vélos. Le coût de production de $q$ vélos est $C(q) = q^2 + 40q + 500$ (en euros), pour $q$ entre 0 et 60.

1. Calculer $C(0)$ et interpréter.
2. Calculer le coût de production de 20 vélos.
3. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau.

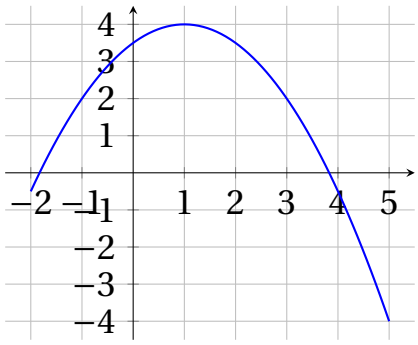
| $q$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C(q)$ | | | | | | | |

1. $C(0) = 500$ : coûts fixes (même sans production).
2. $C(20) = 400 + 800 + 500 = 1\,700$ €.
3. 500 ; 1 000 ; 1 700 ; 2 600 ; 3 700 ; 5 000 ; 6 500.

## Lire graphiquement images, antécédents et solutions

### Exercice 4.

La courbe ci-contre représente une fonction $h$ définie sur $[-2;5]$.




1. Lire $h(-2)$, $h(0)$ et $h(3)$.
2. Lire le ou les antécédents de 2.
3. Résoudre graphiquement $h(x) = 0$ puis $h(x) > 0$.
4. Dresser le tableau de variations de $h$.

$h(x) = -0,5(x-1)^2 + 4$.

1. $h(-2) = -0,5$ ; $h(0) = 3,5$ ; $h(3) = 2$.
2. $-1$ et 3.
3. $h(x) = 0$ pour $x \approx -1,8$ et $x \approx 3,8$ ; $h(x) > 0$ sur $]-1,8;3,8[$ environ.
4. Croissante sur $[-2;1]$, décroissante sur $[1;5]$, maximum 4 en 1 ; $h(5) = -4$ .

## Calculer et interpréter un taux de variation

### Exercice 5.

Calculer le taux de variation de $f(x) = x^2 - 3x + 1$ entre 1 et 4, puis entre $-2$ et 0.

Compléter la fonction Python `taux(a, b)` pour qu'elle renvoie le taux de variation de $f$ entre $a$ et $b$. Que renvoient `taux(1, 4)` et `taux(-2, 0)` ?

```
def f(x):
    return x**2 - 3*x + 1
def taux(a, b):
    return ...
```

$\frac{f(4)-f(1)}{3} = \frac{5-(-1)}{3} = 2$ ; $\frac{f(0)-f(-2)}{2} = \frac{1-11}{2} = -5$.

Le taux de variation entre $a$ et $b$ est $\big(f(b) - f(a)\big)/(b-a)$ :

```
def f(x):
    return x**2 - 3*x + 1
def taux(a, b):
    return (f(b) - f(a)) / (b - a)
```

`taux(1, 4)` renvoie `2.0` et `taux(-2, 0)` renvoie `-5.0`, comme ci-dessus.

### Exercice 6.

Reprendre la fonction coût de l'exercice 3. Calculer le taux de variation de $C$ entre 10 et 20, puis entre 40 et 50. Interpréter.

$\frac{1700-1000}{10} = 70$ et $\frac{5000-3700}{10} = 130$ : chaque vélo supplémentaire coûte en moyenne 70 € entre 10 et 20 vélos, et 130 € entre 40 et 50.

### Exercice 7.

Le nombre d'abonnés d'une chaîne vidéo est passé de 12 500 le 1er janvier à 18 100 le 1er août (7 mois plus tard). Calculer le taux de variation mensuel moyen.

$\frac{18100-12500}{7} = 800$ abonnés par mois en moyenne.

### Exercice 8.

La population d'une ville (en milliers d'habitants) est donnée en fonction de l'année.

| Année | 2000 | 2005 | 2010 | 2020 |
|---|---|---|---|---|
| Population | 42 | 45,5 | 47 | 46 |

Calculer les taux de variation entre deux dates consécutives du tableau. Sur quelle période la population a-t-elle augmenté le plus vite ?

$0,7$ ; $0,3$ ; $-0,1$ millier d'habitants par an : la croissance la plus rapide a lieu entre 2000 et 2005.

## Étudier le sens de variation d'une fonction

### Exercice 9.

Dresser le tableau de variations d'une fonction $f$ définie sur $[0;10]$ telle que : $f(0) = 3$, $f$ décroît jusqu'à $f(4) = -2$, puis croît jusqu'à $f(10) = 6$. Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ admet-elle ?

Décroissante sur $[0;4]$ de 3 à $-2$, croissante sur $[4;10]$ de $-2$ à 6. L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions.

### Exercice 10.

Les taux de variation d'une fonction $g$ entre deux valeurs quelconques de $[0;5]$ sont tous négatifs. Que peut-on dire de $g$ ? Comparer $g(1)$ et $g(3)$.

$g$ est décroissante sur $[0;5]$ donc $g(1) \geqslant g(3)$.

**Exercice 11. [Avec la calculatrice]**

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ sur $[0;5]$. À l'aide de la calculatrice, tracer la courbe de $f$, conjecturer son tableau de variations et donner son maximum et son minimum sur $[0;5]$.

Croissante sur $[0;1]$, décroissante sur $[1;3]$, croissante sur $[3;5]$. $f(0) = 0$, $f(1) = 4$, $f(3) = 0$, $f(5) = 20$ : maximum 20 (en 5), minimum 0 (en 0 et en 3).