Corrigé
Fonctions polynômes de degré 2

Reconnaître une fonction polynôme de degré 2

Exercice 1.

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions polynômes de degré 2 ? Préciser alors a, b et c.

1. $f(x) = 3x^2 - x + 5$
2. $g(x) = 4 - x^2$
3. $h(x) = 2x + 7$
4. $k(x) = (x-1)(x+4)$
5. $m(x) = x^3 + x^2$
6. $p(x) = (x+2)^2 - x^2$

f : $a = 3$, $b = -1$, $c = 5$. g : $a = -1$, $b = 0$, $c = 4$. h : non (degré 1). $k = x^2 + 3x - 4$: $a = 1$, $b = 3$, $c = -4$. m : non (degré 3). $p = 4x + 4$: non (degré 1).

Déterminer le sommet et les variations

Exercice 2.

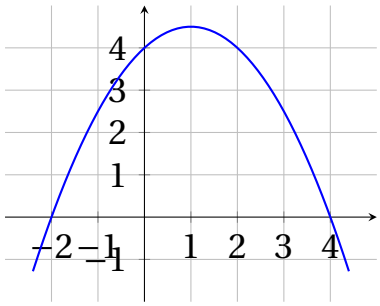
Pour chaque fonction, donner l'allure de la parabole, les coordonnées du sommet et le tableau de variations.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 5$
2. $g(x) = -x^2 + 4x + 1$
3. $h(x) = 2x^2 + 8x$
4. $k(x) = -0,5x^2 + 3x - 2$

1. $a > 0$, $\alpha = 3$, $f(3) = -4$: décroissante puis croissante, minimum -4.
2. $a < 0$, $\alpha = 2$, $g(2) = 5$: croissante puis décroissante, maximum 5.
3. $a > 0$, $\alpha = -2$, $h(-2) = -8$: minimum -8.
4. $a < 0$, $\alpha = 3$, $k(3) = 2,5$: maximum $2,5$.

Exercice 3.

La parabole ci-contre représente une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$.



1. Lire les coordonnées du sommet et l'équation de l'axe de symétrie.
2. Le coefficient a est-il positif ou négatif?
3. Lire les racines de f.
4. Dresser le tableau de signes de f.

$f(x) = -0,5(x-1)^2 + 4,5 = -0,5(x+2)(x-4)$.

1. $S(1;4,5)$; axe $x = 1$.
2. Négatif (parabole tournée vers le bas).
3. -2 et 4.
4. $f(x) < 0$ sur $]-\infty;-2[\cup]4;+\infty[$, $f(x) > 0$ sur $]-2;4[$.

Exercice 4.

Une parabole passe par les points $A(-1;7)$ et $B(5;7)$. Quelle est l'équation de son axe de symétrie?

$x = \frac{-1+5}{2} = 2$.

Exploiter la forme factorisée

Exercice 5.

Pour chaque fonction, donner les racines, l'abscisse du sommet, puis le tableau de signes.

1. $f(x) = (x-2)(x-6)$
2. $g(x) = -3(x+1)(x-5)$
3. $h(x) = 2x(x+4)$
4. $k(x) = -(x-3)^2$

1. Racines 2 et 6, $\alpha = 4$; $f > 0$ à l'extérieur, < 0 sur $]2;6[$.
2. Racines -1 et 5, $\alpha = 2$; $g < 0$ à l'extérieur, > 0 sur $]-1;5[$.
3. Racines -4 et 0, $\alpha = -2$; $h > 0$ à l'extérieur, < 0 sur $]-4;0[$.
4. Racine double 3, $\alpha = 3$; $k(x) \leqslant 0$ pour tout x.

Exercice 6.

Développer $f(x) = 2(x-1)(x-4)$. Calculer les coordonnées du sommet avec la forme factorisée, puis vérifier avec $-\frac{b}{2a}$.

$f(x) = 2x^2 - 10x + 8$. $\alpha = \frac{1+4}{2} = 2,5$ et $-\frac{-10}{4} = 2,5$. $f(2,5) = 2 \times 1,5 \times (-1,5) = -4,5$.

Exercice 7.

Déterminer la forme factorisée de la fonction polynôme de degré 2 dont les racines sont -3 et 2 et dont la courbe passe par le point $(0;12)$.

$f(x) = a(x+3)(x-2)$ et $f(0) = -6a = 12$ donc $a = -2$: $f(x) = -2(x+3)(x-2)$.

Exercice 8.

Résoudre les inéquations : $(x-1)(x+2) > 0$ et $-2(x-3)(x-7) \geqslant 0$.

$S_1 =]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$; $S_2 = [3;7]$.

Résoudre un problème

Exercice 9. [Bénéfice]

Une entreprise fabrique entre 0 et 60 objets par jour. Son bénéfice (en euros) est $B(x) = -2(x-10)(x-50)$.

1. Pour quelles quantités l'entreprise est-elle bénéficiaire ?
2. Combien d'objets doit-elle fabriquer pour un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

1. $B(x) > 0$ entre les racines : $x \in]10;50[$.
2. $\alpha = 30$, $B(30) = -2 \times 20 \times (-20) = 800$ €.

Exercice 10. [Lancer]

La hauteur (en m) d'un ballon lancé est $h(t) = -5t^2 + 10t + 1,8$ où t est le temps en secondes.

1. Quelle est la hauteur initiale ?
2. À quel instant le ballon atteint-il sa hauteur maximale ? Quelle est cette hauteur ?

1. $h(0) = 1,8$ m.
2. $\alpha = -\frac{10}{-10} = 1$ s ; $h(1) = 6,8$ m.

Exercice 11. [Enclos]

Avec 40 m de grillage, on construit un enclos rectangulaire. On note x la longueur d'un côté.

1. Montrer que l'aire est $A(x) = x(20 - x)$.
2. Déterminer les dimensions de l'enclos d'aire maximale.

1. L'autre côté mesure $\frac{40-2x}{2} = 20 - x$.
2. Racines 0 et 20 : $\alpha = 10$; carré de 10 m de côté, aire 100 m².