Corrigé
Variables aléatoires

Modéliser une répétition d'épreuves de Bernoulli

Exercice 1.

Une machine produit des pièces dont 5 % sont défectueuses. On prélève successivement 2 pièces ; on admet que les prélèvements sont indépendants.

1. Construire l'arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que les deux pièces soient défectueuses.
3. Calculer la probabilité qu'exactement une pièce soit défectueuse.
4. Calculer la probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse.

1. Branches D : 0,05 et $\overline{D}$: 0,95 à chaque niveau.
2. $0,05^2 = 0,0025$.
3. $2 \times 0,05 \times 0,95 = 0,095$.
4. $0,95^2 = 0,9025$.

Exercice 2.

Un QCM comporte 3 questions ; chacune a 4 réponses dont une seule est juste. Un élève répond au hasard.

1. Quelle est la probabilité de répondre juste à une question ?
2. À l'aide d'un arbre, calculer la probabilité d'avoir les 3 bonnes réponses, puis aucune.
3. Calculer la probabilité d'avoir au moins une bonne réponse.

1. 0,25.
2. $0,25^3 = 0,015625$; $0,75^3 = 0,421875$.
3. $1 - 0,421875 = 0,578125$.

Exercice 3.

Dans une ville, 60 % des habitants sont favorables à un projet. On interroge 3 habitants au hasard (on assimile à des tirages indépendants). Calculer la probabilité qu'exactement 2 d'entre eux soient favorables.

3 chemins ($FF\overline{F}$, $F\overline{F}F$, $\overline{F}FF$) : $3 \times 0,6^2 \times 0,4 = 0,432$.

Déterminer une loi de probabilité

Exercice 4.

Reprendre l'exercice 1. On note X le nombre de pièces défectueuses. Donner la loi de probabilité de X.

$P(X=0)=0,9025$; $P(X=1)=0,095$; $P(X=2)=0,0025$.

Exercice 5.

Un jeu consiste à lancer un dé équilibré. On gagne 6 € si on obtient 6, 2 € si on obtient 5, et on perd 1 € sinon. On note G le gain.

1. Donner la loi de G.
2. Calculer $P(G>0)$.

1. $P(G=6)=\frac{1}{6}$; $P(G=2)=\frac{1}{6}$; $P(G=-1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.
2. $\frac{1}{3}$.

Exercice 6.

La loi d'une variable aléatoire Y est donnée ci-dessous. Calculer a.

y_i	0	10	20	50
$P(Y=y_i)$	0,5	0,25	a	0,05

$a=1-0,8=0,2$.

Calculer et interpréter une espérance

Exercice 7.

Calculer l'espérance de G (exercice 5). Le jeu est-il favorable au joueur ?

$E(G)=1+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\approx 0,67$ € : favorable.

Exercice 8.

Calculer $E(Y)$ pour l'exercice 6 et $E(X)$ pour l'exercice 4. Interpréter $E(X)$.

$E(Y)=2,5+4+2,5=9$. $E(X)=0,095+0,005=0,1$: en moyenne 0,1 pièce défectueuse sur 2 prélevées.

Exercice 9. [Tombola]

Une association vend 200 billets à 2 €. Elle offre un lot de 100 €, deux lots de 30 € et dix lots de 5 €. On note G le gain algébrique d'un acheteur (prix du billet déduit).

1. Donner la loi de G.
2. Calculer $E(G)$ et interpréter.
3. Quel devrait être le prix du billet pour que le jeu soit équitable ?

1. $G \in \{98; 28; 3; -2\}$ avec probabilités $0,005$; $0,01$; $0,05$; $0,935$.
2. $E(G) = 0,49 + 0,28 + 0,15 - 1,87 = -0,95$: l'acheteur perd en moyenne $0,95$ € (l'association gagne $0,95$ € par billet).
3. Gain moyen hors prix du billet : $\frac{210}{200} = 1,05$ €, donc le billet devrait coûter $1,05$ €.

Utiliser la loi de Bernoulli

Exercice 10.

Dans chaque cas, justifier que X suit une loi de Bernoulli, préciser son paramètre et son espérance.

1. On lance un dé équilibré ; $X = 1$ si on obtient un multiple de 3, $X = 0$ sinon.
2. On choisit un client ; $X = 1$ s'il a une carte de fidélité (35 % des clients), $X = 0$ sinon.

Deux issues codées 1 et 0. 1. $p = \frac{1}{3}$, $E(X) = \frac{1}{3}$. 2. $p = 0,35$, $E(X) = 0,35$.

Exercice 11.

X suit une loi de Bernoulli et $E(X) = 0,15$. Donner la loi de X.

$P(X = 1) = 0,15$ et $P(X = 0) = 0,85$.

Simuler des échantillons et observer la fluctuation

Exercice 12.

On utilise la fonction `frequence(n, p)` du cours avec $p = 0,3$.

1. Exécuter `frequence(100, 0.3)` plusieurs fois. Obtient-on toujours le même résultat ? Pourquoi ?
2. On simule 500 échantillons de taille 100. L'écart type de la série des fréquences obtenues est $s \approx 0,046$. Entre quelles valeurs doivent se trouver environ 95 % des fréquences ?
3. Comment évolue la fluctuation si on prend des échantillons de taille 1 000 ?
4. La fonction `frequence(n, p)` simule un échantillon de taille n (succès de probabilité p) et renvoie la fréquence des succès. Compléter son code.

```
from random import random
def frequence(n, p):
    k = 0
    for i in range(n):
        if random() < ... :
            k = ...
    return ...
```

1. Non : c'est la fluctuation d'échantillonnage.
2. Entre $0,3 - 2 \times 0,046 = 0,208$ et $0,392$.
3. Elle diminue : les fréquences sont plus proches de $0,3$.
4. `random() < p` est vrai avec une probabilité p : on compte les succès puis on divise par n.

```
from random import random
def frequence(n, p):
    k = 0
    for i in range(n):
        if random() < p:
            k = k + 1
    return k / n
```