

Arithmétique

Multiples, diviseurs et critères de divisibilité

Exercice 1. Appartenance à $\mathbb{N}$ et à $\mathbb{Z}$

Compléter avec $\in$ ou $\notin$.

$$\begin{array}{ccccccccc} -7 \dots \mathbb{N} & -7 \dots \mathbb{Z} & \frac{18}{6} \dots \mathbb{N} & \frac{7}{2} \dots \mathbb{Z} & \sqrt{16} \dots \mathbb{N} & & & & \\ & -\frac{20}{4} \dots \mathbb{Z} & 10^{-1} \dots \mathbb{Z} & \frac{-36}{-9} \dots \mathbb{N} & \sqrt{2} \dots \mathbb{Z} & & & & \\ & 2^5 \dots \mathbb{N} & 0 \dots \mathbb{N} & \frac{-15}{4} \dots \mathbb{Z} & (-3)^2 \dots \mathbb{N} & & & & \end{array}$$

Exercice 2. Multiples et diviseurs

1. 91 est-il un multiple de 7? 7 est-il un diviseur de 84? 6 divise-t-il 124?
2. Donner la liste de tous les diviseurs positifs de 36, puis de 45.
3. En déduire les diviseurs communs à 36 et 45, puis le plus grand d'entre eux.
4. Donner les multiples de 12 compris entre 100 et 160.
5. Sans poser de division, dire si 2 745 est divisible par 2, 3, 5, 9.
6. Même question pour 10 512 et pour 7 030.
7. Trouver le chiffre c pour que le nombre $4c8$ (écrit avec les chiffres 4, c et 8) soit divisible par 9.
8. Trouver toutes les valeurs du chiffre c pour que le nombre $25c$ soit divisible par 3. Lesquelles le rendent aussi divisible par 2?

Exercice 3. Division euclidienne

1. Effectuer la division euclidienne de 247 par 12 et écrire l'égalité obtenue sous la forme $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.
2. Même question pour 1 000 divisé par 37.
3. Un fleuriste dispose de 158 roses. Il fait des bouquets de 12 roses. Combien de bouquets complets peut-il faire? Combien de roses reste-t-il?
4. Combien de roses lui manque-t-il pour faire un bouquet de plus?
5. Le reste de la division d'un entier n par 5 est 3. Quels sont les restes possibles de la division de n par 10?
6. Aujourd'hui nous sommes samedi. Quel jour de la semaine serons-nous dans 100 jours?

Exercice 4. Parité

1. Montrer que la somme de deux nombres pairs est paire.
2. Montrer que la somme de deux nombres impairs est paire.
3. Montrer que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire.
4. Montrer que le produit de deux nombres impairs est impair.
5. Soit n un entier. Montrer que $n(n + 1)$ est toujours pair.
6. Le carré d'un nombre pair est-il pair? Le démontrer.
7. Le carré d'un nombre impair est-il impair? Le démontrer.
8. En déduire que si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 5. Démontrer

1. Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
2. La somme de quatre entiers consécutifs est-elle toujours un multiple de 4?
3. Montrer en revanche que la somme de cinq entiers consécutifs est toujours un multiple de 5.
4. Montrer que si a et b sont des multiples de 5 alors $3a - 2b$ est un multiple de 5.
5. Montrer que la différence des carrés de deux entiers consécutifs est toujours impaire.
6. Montrer que la somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7. Le produit d'un multiple de 7 par un entier quelconque est-il un multiple de 7?
7. Montrer que le produit de deux entiers consécutifs augmenté de leur somme, $n(n + 1) + n + (n + 1)$, est égal à $(n + 1)^2 + n$, puis tester avec $n = 4$.

Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers

Exercice 6. Nombres premiers

1. Donner la liste des nombres premiers inférieurs à 50.
2. Les nombres 51, 57, 91 et 97 sont-ils premiers? Justifier.
3. Décomposer en produit de facteurs premiers : 84 ; 150 ; 1 001.
4. Décomposer en produit de facteurs premiers : 360 ; 525 ; 2 024.
5. Le nombre $2^3 \times 3 \times 5^2$ est-il divisible par 6? par 9? par 50?
6. Trouver le plus petit entier $k > 0$ tel que $84k$ soit le carré d'un entier.

Fractions irréductibles et problèmes

Exercice 7. Fractions et problèmes

1. En utilisant la décomposition en facteurs premiers, rendre irréductible la fraction $\frac{84}{150}$.
2. Rendre irréductibles les fractions $\frac{360}{525}$ et $\frac{1\,001}{143}$.
3. Calculer et donner le résultat sous forme irréductible : $\frac{5}{12} + \frac{7}{18}$.
4. Deux bus partent en même temps d'une gare. Le premier repasse toutes les 12 minutes, le second toutes les 18 minutes. Au bout de combien de temps repasseront-ils ensemble pour la première fois?
5. S'ils partent à 7 h 00, combien de fois repasseront-ils ensemble entre 7 h 00 (exclu) et 10 h 00 (inclus)?
6. Un pâtissier dispose de 84 macarons et de 60 chouquettes. Il veut faire le plus grand nombre de sachets identiques en utilisant tout. Combien de sachets fera-t-il? Que contiendra chaque sachet?
7. Un rectangle mesure 150 cm sur 84 cm. On veut le paver avec des carrés identiques les plus grands possible, dont le côté est un nombre entier de centimètres. Quel est le côté des carrés? Combien en faut-il?

Corrigé

