

Corrigé

Arithmétique

Multiples, diviseurs et critères de divisibilité

Exercice 1. Appartenance à $\mathbb{N}$ et à $\mathbb{Z}$

Compléter avec $\in$ ou $\notin$.

$$\begin{array}{ccccccccc} -7 \dots \mathbb{N} & -7 \dots \mathbb{Z} & \frac{18}{6} \dots \mathbb{N} & \frac{7}{2} \dots \mathbb{Z} & \sqrt{16} \dots \mathbb{N} & & & & \\ & -\frac{20}{4} \dots \mathbb{Z} & 10^{-1} \dots \mathbb{Z} & \frac{-36}{-9} \dots \mathbb{N} & \sqrt{2} \dots \mathbb{Z} & & & & \\ & 2^5 \dots \mathbb{N} & 0 \dots \mathbb{N} & \frac{-15}{4} \dots \mathbb{Z} & (-3)^2 \dots \mathbb{N} & & & & \end{array}$$

$-7 \notin \mathbb{N}$; $-7 \in \mathbb{Z}$; $\frac{18}{6} = 3 \in \mathbb{N}$; $\frac{7}{2} = 3,5 \notin \mathbb{Z}$; $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$; $-\frac{20}{4} = -5 \in \mathbb{Z}$; $10^{-1} = 0,1 \notin \mathbb{Z}$.
 $\frac{-36}{-9} = 4 \in \mathbb{N}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ (ce n'est pas un entier); $2^5 = 32 \in \mathbb{N}$; $0 \in \mathbb{N}$; $\frac{-15}{4} = -3,75 \notin \mathbb{Z}$;
 $(-3)^2 = 9 \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Multiples et diviseurs

1. 91 est-il un multiple de 7? 7 est-il un diviseur de 84? 6 divise-t-il 124?
 $91 = 13 \times 7$: oui. $84 = 12 \times 7$: oui. $124 = 6 \times 20 + 4$: non.
2. Donner la liste de tous les diviseurs positifs de 36, puis de 45.
 $36 : 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36$. $45 : 1; 3; 5; 9; 15; 45$.
3. En déduire les diviseurs communs à 36 et 45, puis le plus grand d'entre eux.
Diviseurs communs : 1; 3; 9. Le plus grand est 9.
4. Donner les multiples de 12 compris entre 100 et 160.
108; 120; 132; 144; 156.
5. Sans poser de division, dire si 2 745 est divisible par 2, 3, 5, 9.
Chiffre des unités 5 : divisible par 5, pas par 2. Somme des chiffres : $2 + 7 + 4 + 5 = 18$: divisible par 3 et par 9.
6. Même question pour 10 512 et pour 7 030.
 $10\,512$: se termine par 2 donc divisible par 2 mais pas par 5; somme des chiffres $1 + 0 + 5 + 1 + 2 = 9$: divisible par 3 et par 9.

7030 : se termine par 0 donc divisible par 2 et par 5 ; somme des chiffres $7 + 0 + 3 + 0 = 10$: ni par 3, ni par 9.

7. Trouver le chiffre c pour que le nombre $4c8$ (écrit avec les chiffres 4, c et 8) soit divisible par 9.

$4 + c + 8 = 12 + c$ doit être multiple de 9, donc $c = 6$: 468.

8. Trouver toutes les valeurs du chiffre c pour que le nombre $25c$ soit divisible par 3. Lesquelles le rendent aussi divisible par 2 ?

$2 + 5 + c = 7 + c$ doit être multiple de 3 : $c \in \{2; 5; 8\}$ (252 ; 255 ; 258). Divisibles aussi par 2 : 252 et 258.

Exercice 3. Division euclidienne

1. Effectuer la division euclidienne de 247 par 12 et écrire l'égalité obtenue sous la forme $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

$247 = 12 \times 20 + 7$: quotient 20, reste 7.

2. Même question pour 1 000 divisé par 37.

$1\,000 = 37 \times 27 + 1$: quotient 27, reste 1.

3. Un fleuriste dispose de 158 roses. Il fait des bouquets de 12 roses. Combien de bouquets complets peut-il faire ? Combien de roses reste-t-il ?

$158 = 12 \times 13 + 2$: 13 bouquets et il reste 2 roses.

4. Combien de roses lui manque-t-il pour faire un bouquet de plus ?

Il faudrait $12 \times 14 = 168$ roses : il en manque $168 - 158 = 10$.

5. Le reste de la division d'un entier n par 5 est 3. Quels sont les restes possibles de la division de n par 10 ?

$n = 5k + 3$. Si k est pair, $k = 2p$ et $n = 10p + 3$: reste 3. Si k est impair, $k = 2p + 1$ et $n = 10p + 8$: reste 8.

6. Aujourd'hui nous sommes samedi. Quel jour de la semaine serons-nous dans 100 jours ?

$100 = 7 \times 14 + 2$: dans 100 jours on sera deux jours après samedi, c'est-à-dire lundi.

Parité et démonstrations avec le calcul littéral

Exercice 4. Parité

1. Montrer que la somme de deux nombres pairs est paire.
 $a = 2k$ et $b = 2k'$ avec $k, k' \in \mathbb{Z}$: $a + b = 2(k + k')$ est pair.
2. Montrer que la somme de deux nombres impairs est paire.
 $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$: $a + b = 2k + 2k' + 2 = 2(k + k' + 1)$ est pair.
3. Montrer que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire.
 $a = 2k$ et $b = 2k' + 1$: $a + b = 2(k + k') + 1$ est impair.
4. Montrer que le produit de deux nombres impairs est impair.
 $ab = (2k + 1)(2k' + 1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(2kk' + k + k') + 1$ est impair.
5. Soit n un entier. Montrer que $n(n + 1)$ est toujours pair.
Si n est pair, $n = 2k$ et $n(n + 1) = 2k(n + 1)$ est pair. Si n est impair, $n + 1$ est pair : $n + 1 = 2k$ et $n(n + 1) = 2kn$ est pair.
6. Le carré d'un nombre pair est-il pair? Le démontrer.
 $n = 2k$ donc $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$: oui, il est pair.
7. Le carré d'un nombre impair est-il impair? Le démontrer.
 $n = 2k + 1$ donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$: oui, il est impair.
8. En déduire que si n^2 est pair, alors n est pair.
Si n était impair, d'après la question précédente n^2 serait impair. Donc si n^2 est pair, n ne peut pas être impair : il est pair.

Exercice 5. Démontrer

1. Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1) : \text{c'est un multiple de 3.}$$

2. La somme de quatre entiers consécutifs est-elle toujours un multiple de 4?

$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6$. Pour $n = 0$: 6 n'est pas multiple de 4. Donc non.

3. Montrer en revanche que la somme de cinq entiers consécutifs est toujours un multiple de 5.

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10 = 5(n + 2) : \text{multiple de 5.}$$

4. Montrer que si a et b sont des multiples de 5 alors $3a - 2b$ est un multiple de 5.

$$a = 5k, b = 5k' : 3a - 2b = 15k - 10k' = 5(3k - 2k').$$

5. Montrer que la différence des carrés de deux entiers consécutifs est toujours impaire.

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 : \text{impair.}$$

6. Montrer que la somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7. Le produit d'un multiple de 7 par un entier quelconque est-il un multiple de 7?

$$7k + 7k' = 7(k + k') : \text{multiple de 7. } 7k \times m = 7(km) : \text{oui.}$$

7. Montrer que le produit de deux entiers consécutifs augmenté de leur somme, $n(n + 1) + n + (n + 1)$, est égal à $(n + 1)^2 + n$, puis tester avec $n = 4$.

$$n(n + 1) + 2n + 1 = n^2 + n + 2n + 1 = n^2 + 3n + 1 \text{ et } (n + 1)^2 + n = n^2 + 2n + 1 + n = n^2 + 3n + 1 : \text{égalité vérifiée. Avec } n = 4 : 20 + 9 = 29 \text{ et } 25 + 4 = 29.$$

Exercice 6. Nombres premiers

1. Donner la liste des nombres premiers inférieurs à 50.

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47.

2. Les nombres 51, 57, 91 et 97 sont-ils premiers? Justifier.

$51 = 3 \times 17$, $57 = 3 \times 19$, $91 = 7 \times 13$: non premiers. 97 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 (et $11^2 > 97$) : 97 est premier.

3. Décomposer en produit de facteurs premiers : 84; 150; 1 001.

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$; $150 = 2 \times 3 \times 5^2$; $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$.

4. Décomposer en produit de facteurs premiers : 360; 525; 2 024.

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$; $525 = 3 \times 5^2 \times 7$; $2\,024 = 2^3 \times 11 \times 23$.

5. Le nombre $2^3 \times 3 \times 5^2$ est-il divisible par 6? par 9? par 50?

Il vaut 600. Il contient 2×3 : divisible par 6. Il ne contient qu'un seul facteur 3 : pas divisible par 9. Il contient 2×5^2 : divisible par 50.

6. Trouver le plus petit entier $k > 0$ tel que $84k$ soit le carré d'un entier.

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$: il faut des exposants pairs, donc $k = 3 \times 7 = 21$ et $84 \times 21 = 1\,764 = 42^2$.

Exercice 7. Fractions et problèmes

1. En utilisant la décomposition en facteurs premiers, rendre irréductible la fraction $\frac{84}{150}$.

$$\frac{84}{150} = \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 5^2} = \frac{2 \times 7}{5^2} = \frac{14}{25}.$$

2. Rendre irréductibles les fractions $\frac{360}{525}$ et $\frac{1001}{143}$.

$$\frac{360}{525} = \frac{2^3 \times 3^2 \times 5}{3 \times 5^2 \times 7} = \frac{2^3 \times 3}{5 \times 7} = \frac{24}{35}; \quad \frac{1001}{143} = \frac{7 \times 11 \times 13}{11 \times 13} = 7.$$

3. Calculer et donner le résultat sous forme irréductible : $\frac{5}{12} + \frac{7}{18}$.

Le plus petit multiple commun de 12 et 18 est 36 : $\frac{15}{36} + \frac{14}{36} = \frac{29}{36}$.

4. Deux bus partent en même temps d'une gare. Le premier repasse toutes les 12 minutes, le second toutes les 18 minutes. Au bout de combien de temps repasseront-ils ensemble pour la première fois?

On cherche le plus petit multiple commun de 12 et 18 : $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$, donc $2^2 \times 3^2 = 36$. Au bout de 36 minutes.

5. S'ils partent à 7 h 00, combien de fois repasseront-ils ensemble entre 7 h 00 (exclu) et 10 h 00 (inclus) ?

De 7 h à 10 h il y a 180 minutes et $180 = 36 \times 5$: ils repassent ensemble 5 fois : à 7 h 36, 8 h 12, 8 h 48, 9 h 24 et 10 h 00.

6. Un pâtissier dispose de 84 macarons et de 60 chouquettes. Il veut faire le plus grand nombre de sachets identiques en utilisant tout. Combien de sachets fera-t-il? Que contiendra chaque sachet?

On cherche le plus grand diviseur commun de $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$: $2^2 \times 3 = 12$. Il fera 12 sachets contenant chacun 7 macarons et 5 chouquettes.

7. Un rectangle mesure 150 cm sur 84 cm. On veut le paver avec des carrés identiques les plus grands possible, dont le côté est un nombre entier de centimètres. Quel est le côté des carrés? Combien en faut-il?

Plus grand diviseur commun de 150 et 84 : $2 \times 3 = 6$. Côté 6 cm ; il faut $\frac{150}{6} \times \frac{84}{6} = 25 \times 14 = 350$ carrés.