

Corrigé

Équations de droites

Déterminer un vecteur directeur et une équation cartésienne

Exercice 1. Vecteur directeur

1. Donner un vecteur directeur de chacune des droites suivantes : $d_1 : 2x - 3y + 1 = 0$ $d_2 : -x + 4y = 0$ $d_3 : y = 5x - 2$ $d_4 : x = 3$.

$$d_1 : \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad d_2 : \vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ (ou } \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}); \quad d_3 : \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad d_4 : \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Même question pour $d_5 : y = -4$ $d_6 : 5x + 2y - 7 = 0$ $d_7 : y = -\frac{2}{3}x + 1$.

$$d_5 : \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad d_6 : \vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad d_7 : \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. Le vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur directeur de d_1 ? de d_6 ?

$$\vec{w} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} : \text{oui pour } d_1. \det(\vec{w}; \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}) = -6 \times 5 - (-2) \times (-4) = -38 \neq 0 : \text{non pour } d_6.$$

4. Donner un vecteur directeur de la droite (AB) avec $A(1 ; 4)$ et $B(-3 ; 6)$, puis un deuxième vecteur directeur dont l'abscisse vaut 2.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}; \text{ en multipliant par } -\frac{1}{2} : \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Équation cartésienne

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(2 ; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = (x - 2) \times 1 - 4 \times (y + 1) = x - 2 - 4y - 4 = 0, \text{ soit } x - 4y - 6 = 0.$$

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) avec $B(-1 ; 3)$ et $C(2 ; -3)$.

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}. \det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = (x + 1) \times (-6) - 3(y - 3) = -6x - 6 - 3y + 9 = 0, \text{ soit } -6x - 3y + 3 = 0, \text{ ou encore } 2x + y - 1 = 0.$$

3. Le point $E(5 ; -9)$ appartient-il à la droite (BC) ? Et le point $F(-2 ; 4)$?

$$2 \times 5 + (-9) - 1 = 0 : \text{oui, } E \in (BC). \quad 2 \times (-2) + 4 - 1 = -1 \neq 0 : F \notin (BC).$$

4. Déterminer le point de (BC) d'abscisse 10, puis le point de (BC) d'ordonnée 0.

$$x = 10 : 20 + y - 1 = 0 \text{ donc } y = -19 : (10 ; -19). \quad y = 0 : 2x - 1 = 0 \text{ donc } x = \frac{1}{2} : (\frac{1}{2} ; 0).$$

5. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $G(0 ; 5)$ et parallèle à la droite $d : 3x - y + 2 = 0$.

$$\text{Vecteur directeur de } d : \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ La parallèle a une équation } 3x - y + c = 0 ; G \text{ donne } -5 + c = 0, c = 5 : 3x - y + 5 = 0.$$

6. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $H(-2 ; 1)$ et parallèle à l'axe des ordonnées.

$$\text{Vecteur directeur } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{équation } x = -2, \text{ soit } x + 2 = 0.$$

Déterminer l'équation réduite d'une droite

Exercice 3. Équation réduite

Déterminer l'équation réduite de la droite :

1. passant par $A(0 ; 4)$ et de pente -3 ;

$$y = -3x + 4.$$

2. passant par $B(2 ; 7)$ et de pente $\frac{1}{2}$;

$$y = \frac{1}{2}x + p \text{ et } 7 = \frac{1}{2} \times 2 + p \text{ donc } p = 6 : y = \frac{1}{2}x + 6.$$

3. passant par $C(1 ; -2)$ et $D(4 ; 7)$;

$$m = \frac{7 - (-2)}{4 - 1} = 3 ; -2 = 3 \times 1 + p \text{ donc } p = -5 : y = 3x - 5.$$

4. passant par $G(-2 ; 3)$ et $H(4 ; 0)$;

$$m = \frac{0 - 3}{4 - (-2)} = -\frac{1}{2} ; 0 = -\frac{1}{2} \times 4 + p \text{ donc } p = 2 : y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

5. passant par $E(-3 ; 5)$ et $F(-3 ; -1)$;

Les deux points ont la même abscisse : la droite est parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x = -3$ (pas d'équation réduite de la forme $y = mx + p$).

6. passant par $K(1 ; 6)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$;

$$\text{Pente } m = \frac{-8}{2} = -4; 6 = -4 + p \text{ donc } p = 10 : y = -4x + 10.$$

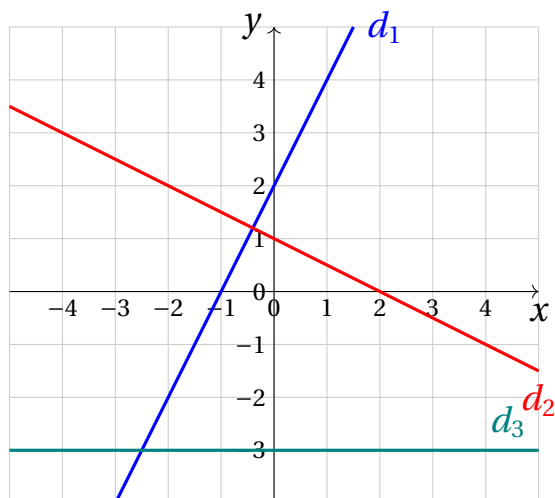
7. d'équation cartésienne $6x - 2y + 8 = 0$;

$$-2y = -6x - 8 \text{ donc } y = 3x + 4.$$

8. d'équation cartésienne $4x + 5y - 10 = 0$.

$$5y = -4x + 10 \text{ donc } y = -\frac{4}{5}x + 2.$$

Exercice 4. Lecture graphique et tracé



1. Lire graphiquement la pente et l'ordonnée à l'origine de d_1 , d_2 et d_3 . En déduire leurs équations réduites.

$$d_1 \text{ passe par } (0 ; 2) \text{ et } (1 ; 4) : y = 2x + 2.$$

$$d_2 \text{ passe par } (0 ; 1) \text{ et } (2 ; 0) : y = -\frac{1}{2}x + 1.$$

$$d_3 \text{ est horizontale : } y = -3.$$

2. Donner une équation cartésienne de d_1 et de d_2 .

$$d_1 : 2x - y + 2 = 0; \quad d_2 : x + 2y - 2 = 0.$$

3. Tracer dans le repère les droites $d_4 : y = x - 2$ et $d_5 : x + 3y - 3 = 0$.
 d_4 passe par $(0 ; -2)$ et $(2 ; 0)$. d_5 a pour équation réduite $y = -\frac{1}{3}x + 1$: elle passe par $(0 ; 1)$ et $(3 ; 0)$.
4. Tracer la droite d_6 passant par $(-4 ; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis donner son équation réduite.
 d_6 passe par $(-4 ; 1)$, $(-2 ; 2)$, $(0 ; 3)$: $y = \frac{1}{2}x + 3$.
5. Lire graphiquement les coordonnées du point d'intersection de d_1 et d_2 , puis le vérifier par le calcul.
Graphiquement environ $(-0,4 ; 1,2)$. Par le calcul : $2x + 2 = -\frac{1}{2}x + 1 \iff \frac{5}{2}x = -1 \iff x = -0,4$ et $y = 2 \times (-0,4) + 2 = 1,2$.

Étudier la position relative de deux droites

Exercice 5. Parallèles ou sécantes ?

Dans chaque cas, dire si les droites sont parallèles ou sécantes. Si elles sont sécantes, déterminer leur point d'intersection.

1. $d : y = 3x - 1$ et $d' : y = -2x + 9$
Pentes différentes : sécantes. $3x - 1 = -2x + 9 \iff x = 2, y = 5$. Intersection : $(2 ; 5)$.
2. $d : y = 4x + 2$ et $d' : 8x - 2y + 5 = 0$
 $d' : y = 4x + 2,5$. Même pente 4 : les droites sont parallèles (et distinctes car $2 \neq 2,5$).
3. $d : 2x + y - 4 = 0$ et $d' : x - y + 1 = 0$
 $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\det = -1 \times 1 - 1 \times 2 = -3 \neq 0$, sécantes.
En additionnant les équations : $3x - 3 = 0$ donc $x = 1$, puis $y = x + 1 = 2$. Intersection : $(1 ; 2)$.
4. $d : 3x - 6y + 1 = 0$ et $d' : -x + 2y + 4 = 0$

$\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\det = 6 \times (-1) - (-2) \times 3 = 0$: parallèles. Elles sont distinctes car $(0 ; -2) \in d'$ mais $3 \times 0 - 6 \times (-2) + 1 = 13 \neq 0$.

5. $d : y = \frac{1}{2}x + 3$ et $d' : x = -2$

d' est parallèle à l'axe des ordonnées, pas d : sécantes. $x = -2$ donne $y = -1 + 3 = 2$. Intersection : $(-2 ; 2)$.

6. $d : 2x - 3y + 6 = 0$ et $d' : -4x + 6y - 12 = 0$

d' s'obtient en multipliant l'équation de d par -2 : les droites sont confondues.

7. Déterminer le réel m pour que les droites $y = (m + 1)x - 3$ et $y = 5x + 2$ soient parallèles.

Il faut les mêmes pentes : $m + 1 = 5$, donc $m = 4$.

Exercice 6. Alignement

1. Les points $A(-2 ; -7)$, $B(1 ; 2)$ et $C(3 ; 8)$ sont-ils alignés? (On pourra déterminer l'équation réduite de (AB) .)

$m = \frac{2 - (-7)}{1 - (-2)} = 3$; $2 = 3 + p$ donc $p = -1$: $(AB) : y = 3x - 1$. Pour $x = 3$: $3 \times 3 - 1 = 8$: $C \in (AB)$, les points sont alignés.

2. Le point $D(-5 ; -15)$ appartient-il à (AB) ?

$3 \times (-5) - 1 = -16 \neq -15$: non.

3. Déterminer l'ordonnée du point E d'abscisse 10 pour que A , B et E soient alignés.

$y = 3 \times 10 - 1 = 29$: $E(10 ; 29)$.

4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (AB) avec les axes du repère.

Axe des ordonnées : $x = 0$, $y = -1$: $(0 ; -1)$. Axe des abscisses : $3x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{3}$: $(\frac{1}{3} ; 0)$.

Modéliser une situation à l'aide de droites

Exercice 7. Deux tarifs

Un loueur de vélos propose deux tarifs : tarif A à 4 € de l'heure; tarif B avec 10 € de frais fixes puis 1,5 € de l'heure.

1. Modéliser chaque tarif par une fonction affine du nombre x d'heures.

$$A(x) = 4x \text{ et } B(x) = 1,5x + 10.$$

2. Tracer les deux droites dans un même repère pour $x \in [0 ; 8]$.

A passe par (0 ; 0) et (5 ; 20); B passe par (0 ; 10) et (8 ; 22).

3. Pour quelle durée les deux tarifs sont-ils égaux? Quel est alors le prix?

$$4x = 1,5x + 10 \iff 2,5x = 10 \iff x = 4 : \text{même prix, 16 €, pour 4 heures.}$$

4. Quel tarif choisir pour une location de 6 heures? de 2 heures?

$$A(6) = 24 \text{ € et } B(6) = 19 \text{ € : tarif B. } A(2) = 8 \text{ € et } B(2) = 13 \text{ € : tarif A.}$$

5. Un troisième tarif C coûte 25 € quelle que soit la durée. À partir de combien d'heures est-il le plus avantageux?

$$\text{Au-delà de 4 h, le moins cher entre A et B est B. } B(x) > 25 \iff 1,5x > 15 \iff x > 10 : \text{le tarif C est le plus avantageux pour plus de 10 heures.}$$

Exercice 8. Températures

La température T (en °F) se calcule à partir de la température C (en °C) par une relation affine. On sait que 0 °C correspond à 32 °F et que 100 °C correspond à 212 °F.

1. Déterminer l'équation réduite de la droite représentant T en fonction de C .

$$\text{Pente } \frac{212 - 32}{100 - 0} = 1,8 \text{ et ordonnée à l'origine 32 : } T = 1,8C + 32.$$

2. Convertir 37 °C et -10 °C en degrés Fahrenheit.

$$1,8 \times 37 + 32 = 98,6 \text{ °F; } 1,8 \times (-10) + 32 = 14 \text{ °F.}$$

3. Convertir 50 °F en degrés Celsius.

$$1,8C + 32 = 50 \iff C = \frac{18}{1,8} = 10 \text{ °C.}$$

4. Existe-t-il une température qui s'exprime par le même nombre dans les deux unités?

$$1,8C + 32 = C \iff 0,8C = -32 \iff C = -40 : -40^{\circ}\text{C} = -40^{\circ}\text{F}.$$