

Corrigé

Fonctions de référence

Comparer et encadrer à l'aide des fonctions de référence

Exercice 1. Comparer des images

Comparer sans calculatrice en justifiant à l'aide des variations d'une fonction de référence.

1. $2,3^2$ et $2,31^2$

$0 \leq 2,3 < 2,31$ et la fonction carré est croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc $2,3^2 < 2,31^2$.

2. $(-5,1)^2$ et $(-5)^2$

$-5,1 < -5 \leq 0$ et la fonction carré est décroissante sur $] -\infty ; 0]$ donc $(-5,1)^2 > (-5)^2$.

3. $\frac{1}{0,7}$ et $\frac{1}{0,71}$

$0 < 0,7 < 0,71$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$ donc $\frac{1}{0,7} > \frac{1}{0,71}$.

4. $\frac{1}{-3}$ et $\frac{1}{-2}$

$-3 < -2 < 0$ et la fonction inverse est décroissante sur $] -\infty ; 0[$ donc $\frac{1}{-3} > \frac{1}{-2}$.

5. $\sqrt{17}$ et $\sqrt{16,9}$

$16,9 < 17$ et la fonction racine est croissante donc $\sqrt{16,9} < \sqrt{17}$.

6. $(-1,5)^3$ et $(-1,6)^3$

$-1,6 < -1,5$ et la fonction cube est croissante donc $(-1,6)^3 < (-1,5)^3$.

7. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\frac{1}{\sqrt{6}}$

La racine est croissante : $0 < \sqrt{5} < \sqrt{6}$, puis l'inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$: $\frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\sqrt{6}}$.

8. $(\pi - 3)^2$ et $0,2^2$

$0 \leq \pi - 3 \approx 0,14 < 0,2$ et la fonction carré est croissante sur $[0 ; +\infty[: (\pi - 3)^2 < 0,2^2$.

9. $\sqrt{0,49}$ et $0,49$

$\sqrt{0,49} = 0,7 > 0,49$ (pour $0 < x < 1$, $\sqrt{x} > x$).

10. $(-10^{-3})^3$ et $(-10^{-2})^3$

$-10^{-2} < -10^{-3}$ et la fonction cube est croissante : $(-10^{-2})^3 < (-10^{-3})^3$.

Exercice 2. Encadrements

1. Sachant que $2 \leq x \leq 5$, encadrer x^2 , $\frac{1}{x}$ et $\sqrt{x}$.

Carré croissant sur $[0 ; +\infty[: 4 \leq x^2 \leq 25$. Inverse décroissante : $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.
Racine croissante : $\sqrt{2} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{5}$.

2. Sachant que $-4 \leq x \leq -1$, encadrer x^2 et $\frac{1}{x}$.

Carré décroissant sur $] -\infty ; 0] : 1 \leq x^2 \leq 16$. Inverse décroissante sur $] -\infty ; 0[: -1 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{4}$.

3. Sachant que $-3 \leq x \leq 2$, encadrer x^2 . (Attention!)

La fonction carré n'est pas monotone sur $[-3 ; 2]$. Son minimum est 0 (en 0) et son maximum est $(-3)^2 = 9 : 0 \leq x^2 \leq 9$.

4. Sachant que $-2 \leq x \leq 3$, encadrer x^3 puis x^2 .

Cube croissant sur $\mathbb{R} : -8 \leq x^3 \leq 27$. Carré : minimum 0 en 0, maximum $3^2 = 9 : 0 \leq x^2 \leq 9$.

5. Sachant que $1 \leq x \leq 4$, encadrer $\sqrt{x}$, puis $3\sqrt{x} - 2$.

$1 \leq \sqrt{x} \leq 2$ donc $3 \leq 3\sqrt{x} \leq 6$ et $1 \leq 3\sqrt{x} - 2 \leq 4$.

6. Sachant que $2 \leq x \leq 4$, encadrer $\frac{1}{x}$, puis $5 - \frac{2}{x}$.

$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ donc $-1 \leq -\frac{2}{x} \leq -\frac{1}{2}$ et $4 \leq 5 - \frac{2}{x} \leq 4,5$.

7. Sachant que $x \geq 10$, que peut-on dire de $\frac{1}{x}$? de x^2 ?
 $0 < \frac{1}{x} \leq 0,1$ et $x^2 \geq 100$.

Résoudre des équations avec les fonctions de référence

Exercice 3. Équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $x^2 = 49$

$$\mathcal{S} = \{-7; 7\}$$

2. $x^2 = -4$

$$\mathcal{S} = \emptyset \text{ (un carré est positif).}$$

3. $x^2 = 10$

$$\mathcal{S} = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$$

4. $\frac{1}{x} = 4$

$$\mathcal{S} = \{0,25\}$$

5. $\frac{1}{x} = -\frac{2}{5}$

$$\mathcal{S} = \{-2,5\}$$

6. $\sqrt{x} = 6$

$$\mathcal{S} = \{36\}$$

7. $\sqrt{x} = -1$

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

8. $x^3 = -8$

$$\mathcal{S} = \{-2\}$$

9. $|x| = 3,5$

$$\mathcal{S} = \{-3,5; 3,5\}$$

10. $2x^2 - 3 = 15$

$$x^2 = 9 : \mathcal{S} = \{-3; 3\}$$

11. $\frac{3}{x} + 1 = 7$

$$\frac{3}{x} = 6 \text{ donc } \frac{1}{x} = 2 : \mathcal{S} = \{0,5\}$$

12. $|x - 2| = 5$

$$x - 2 = 5 \text{ ou } x - 2 = -5 : \mathcal{S} = \{-3; 7\}$$

13. $(x + 1)^2 = 25$

$$x + 1 = 5 \text{ ou } x + 1 = -5 : \mathcal{S} = \{-6; 4\}$$

14. $\sqrt{x} + 3 = 5$

$$\sqrt{x} = 2 : \mathcal{S} = \{4\}$$

15. $x^3 + 30 = 3$

$$x^3 = -27 : \mathcal{S} = \{-3\}$$

Résoudre des inéquations avec les fonctions de référence

Exercice 4. Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ en s'aidant de la courbe de la fonction de référence.

1. $x^2 \leq 16$

$$\mathcal{S} = [-4; 4]$$

2. $x^2 > 3$

$$\mathcal{S} =]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$$

3. $x^2 \geq -1$

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}$$

4. $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$
 $\mathcal{S} =]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$

5. $\frac{1}{x} \geq 5$
 $\mathcal{S} =]0; 0,2]$

6. $\sqrt{x} < 4$
 $\mathcal{S} = [0; 16[$

7. $x^3 > 27$
 $\mathcal{S} =]3; +\infty[$

8. $|x| < 1$
 $\mathcal{S} =]-1; 1[$

9. $|x+1| \geq 2$
 Distance entre x et -1 supérieure ou égale à 2 : $\mathcal{S} =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$

10. $x^2 < 0$
 $\mathcal{S} = \emptyset$

11. $\frac{1}{x} \geq -2$
 $\mathcal{S} =]-\infty; -0,5] \cup]0; +\infty[$

12. $\sqrt{x} \geq 3$
 $\mathcal{S} = [9; +\infty[$

Étudier la position relative de deux courbes

Exercice 5. Positions relatives

1. Sans calculatrice, ranger dans l'ordre croissant : $0,6$; $0,6^2$; $0,6^3$; $\sqrt{0,6}$.
Comme $0 < 0,6 < 1$: $0,6^3 < 0,6^2 < 0,6 < \sqrt{0,6}$ (soit $0,216 < 0,36 < 0,6 < 0,77\dots$).
2. Même question avec $2,5$; $2,5^2$; $2,5^3$; $\sqrt{2,5}$.
Comme $2,5 > 1$: $\sqrt{2,5} < 2,5 < 2,5^2 < 2,5^3$.
3. Résoudre graphiquement puis algébriquement $x^2 \leq x$.
 $x^2 - x \leq 0 \iff x(x-1) \leq 0$: produit négatif entre les racines 0 et 1. $\mathcal{S} = [0 ; 1]$, ce qui correspond à la portion où la parabole est sous la droite $y = x$.
4. Résoudre $x^3 \geq x^2$ en factorisant par x^2 .
 $x^3 - x^2 = x^2(x-1) \geq 0$. Comme $x^2 \geq 0$, il faut $x-1 \geq 0$ ou $x = 0$: $\mathcal{S} = \{0\} \cup [1 ; +\infty[$.
5. Étudier la position relative des courbes de $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x$ sur $[0 ; +\infty[$.
Pour $x \geq 0$: $\sqrt{x} \leq x \iff x \leq x^2 \iff x(x-1) \geq 0 \iff x = 0$ ou $x \geq 1$. La courbe de la racine est au-dessus de la droite sur $[0 ; 1]$ et en dessous sur $[1 ; +\infty[$; elles se coupent en $(0 ; 0)$ et $(1 ; 1)$.
6. Déterminer les points d'intersection de la courbe de la fonction inverse et de la droite d'équation $y = 4x$.
 $\frac{1}{x} = 4x \iff 4x^2 = 1 \iff x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$: points $(\frac{1}{2} ; 2)$ et $(-\frac{1}{2} ; -2)$.
7. Un carré a une aire inférieure à 20 cm^2 . Que peut-on dire de la longueur de son côté?
 $c^2 < 20$ avec $c > 0$: $0 < c < \sqrt{20} \approx 4,47 \text{ cm}$.