

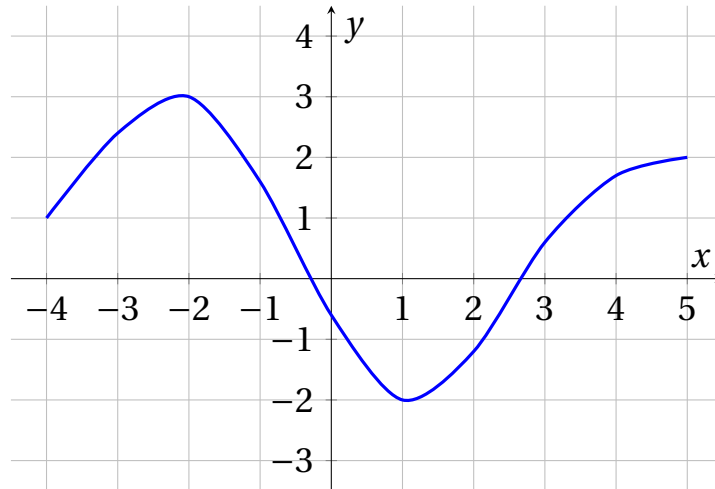
Corrigé

Variations et signes d'une fonction

Lire et exploiter un tableau de variations, déterminer des extremums

Exercice 1. Relier courbe et tableau de variations

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-4 ; 5]$.



1. Dresser le tableau de variations de f sur $[-4 ; 5]$ (on lira les valeurs au dixième près).

x	-4	-2	1	5
$f(x)$	1	3	-2	2

2. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est-elle croissante? décroissante?
 f est croissante sur $[-4 ; -2]$ et sur $[1 ; 5]$; elle est décroissante sur $[-2 ; 1]$.
3. Quel est le maximum de f sur $[-4 ; 5]$? En quelle valeur est-il atteint? Même question pour le minimum.
Le maximum est 3, atteint en $x = -2$. Le minimum est -2 , atteint en $x = 1$.
4. Comparer, sans calcul, $f(2)$ et $f(4)$ puis $f(-1,5)$ et $f(0)$.
 f est croissante sur $[1 ; 5]$ et $2 < 4$, donc $f(2) < f(4)$.
 f est décroissante sur $[-2 ; 1]$ et $-1,5 < 0$, donc $f(-1,5) > f(0)$.

5. Déterminer le maximum et le minimum de f sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

Sur $[0 ; 4]$: minimum -2 en $x = 1$; maximum $f(4) \approx 1,7$ (car $f(0) \approx -0,6$).

6. Résoudre graphiquement $f(x) = 0$ puis $f(x) \geq 0$.

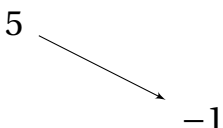
$f(x) = 0$ pour $x \approx -0,3$ et $x \approx 2,7$. $f(x) \geq 0$ sur environ $[-4 ; -0,3] \cup [2,7 ; 5]$.

7. Combien de solutions l'équation $f(x) = 1,5$ a-t-elle? Justifier à l'aide du tableau.

Sur $[-4 ; -2]$, f croît de 1 à 3 : une solution. Sur $[-2 ; 1]$, f décroît de 3 à -2 : une solution. Sur $[1 ; 5]$, f croît de -2 à 2 : une solution. Soit 3 solutions.

Exercice 2. Du tableau de variations à la courbe

Voici le tableau de variations d'une fonction g définie sur $[-3 ; 6]$.

x	-3	0	4	6
$g(x)$	5			2

1. Tracer une courbe pouvant représenter g .

Toute courbe qui part du point $(-3 ; 5)$, descend jusqu'à $(0 ; -1)$, remonte jusqu'à $(4 ; 3)$ puis redescend jusqu'à $(6 ; 2)$ convient.

2. Donner le maximum et le minimum de g sur $[-3 ; 6]$.

Maximum : 5 (atteint en -3). Minimum : -1 (atteint en 0).

3. Donner le maximum de g sur $[0 ; 6]$.

Sur $[0 ; 6]$, le maximum est 3, atteint en 4.

4. Peut-on comparer $g(-2)$ et $g(-1)$? $g(-1)$ et $g(5)$?

$-3 < -2 < -1 < 0$ et g est décroissante sur $[-3 ; 0]$, donc $g(-2) > g(-1)$.

Pour $g(-1)$ et $g(5)$: on sait seulement que $g(-1) \in [-1 ; 5]$ et $g(5) \in [2 ; 3]$, on ne peut pas conclure.

5. Combien l'équation $g(x) = 0$ a-t-elle de solutions?

Sur $[-3 ; 0]$, g passe de 5 à -1 : une solution. Sur $[0 ; 4]$, g passe de -1 à 3 : une solution. Sur $[4 ; 6]$, g reste entre 2 et 3 : aucune. L'équation a donc **2 solutions**.

6. Compléter avec $<$, $>$ ou « on ne peut pas savoir » : $g(1) \dots g(3)$ $g(4,5) \dots g(5,5)$
 $g(-3) \dots g(2)$.

g croissante sur $[0 ; 4]$: $g(1) < g(3)$. g décroissante sur $[4 ; 6]$: $g(4,5) > g(5,5)$.
 $g(-3) = 5$ est le maximum et $g(2) \leq 3$: $g(-3) > g(2)$.

7. Donner le meilleur encadrement possible de $g(x)$ lorsque $x \in [0 ; 6]$.
 $-1 \leq g(x) \leq 3$.

8. Combien l'équation $g(x) = 2,5$ a-t-elle de solutions sur $[-3 ; 6]$?
Une sur $[-3 ; 0]$, une sur $[0 ; 4]$ et une sur $[4 ; 6]$ (car g décroît de 3 à 2) : 3 solutions.

Connaître les variations d'une fonction affine

Exercice 3. Variations des fonctions affines

Pour chaque fonction affine, donner le coefficient directeur, l'ordonnée à l'origine et le sens de variation sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 3x - 5$
 $a = 3$, $b = -5$; $a > 0$ donc f est croissante.
2. $g(x) = -2x + 7$
 $a = -2$, $b = 7$; $a < 0$ donc g est décroissante.
3. $h(x) = 4 - 0,5x$
 $a = -0,5$, $b = 4$; décroissante.
4. $k(x) = \frac{x}{3} + 1$
 $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$; croissante.

5. $m(x) = 6$
 $a = 0, b = 6$; constante.
6. $p(x) = 2(x - 3) + x$
 $p(x) = 3x - 6 : a = 3, b = -6$; croissante.
7. $q(x) = \frac{2 - 5x}{4}$
 $q(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{2} : a = -\frac{5}{4}, b = \frac{1}{2}$; décroissante.
8. $r(x) = (x + 1)^2 - x^2$
 $r(x) = 2x + 1 : a = 2, b = 1$; croissante.

Exercice 4. Taux d'accroissement

1. Déterminer l'expression de la fonction affine f telle que $f(1) = 4$ et $f(3) = 10$.
 $a = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{10 - 4}{2} = 3$. Puis $f(1) = 3 \times 1 + b = 4$ donc $b = 1$. Ainsi $f(x) = 3x + 1$.
2. Déterminer l'expression de la fonction affine g telle que $g(-2) = 5$ et $g(2) = -3$.
 $a = \frac{-3 - 5}{2 - (-2)} = \frac{-8}{4} = -2$. Puis $g(2) = -4 + b = -3$ donc $b = 1$. Ainsi $g(x) = -2x + 1$.
3. Un forfait téléphonique coûte 8 € par mois plus 0,05 € par SMS. Modéliser le coût mensuel par une fonction affine C du nombre x de SMS. Quel est son sens de variation?
 $C(x) = 0,05x + 8$. Le coefficient directeur 0,05 est positif, C est croissante : plus on envoie de SMS, plus on paie.
4. Déterminer l'expression de la fonction affine h dont la courbe passe par les points $A(-1 ; 7)$ et $B(4 ; -3)$. Est-elle croissante?
 $a = \frac{-3 - 7}{4 - (-1)} = -2$; $7 = -2 \times (-1) + b$ donc $b = 5$: $h(x) = -2x + 5$, décroissante.
5. Dresser le tableau de variations de f , g et h sur $[-5 ; 5]$ en indiquant les valeurs aux bornes.

f croît de $f(-5) = -14$ à $f(5) = 16$; g décroît de $g(-5) = 11$ à $g(5) = -9$; h décroît de $h(-5) = 15$ à $h(5) = -5$.

6. Déterminer le maximum et le minimum de h sur $[-2 ; 3]$.

h décroissante : maximum $h(-2) = 9$, minimum $h(3) = -1$.

Étudier le signe d'une fonction affine

Exercice 5. Signe d'une fonction affine

Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 2x - 6$

$$2x - 6 = 0 \iff x = 3 \text{ et } a = 2 > 0.$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

2. $g(x) = -3x + 12$

$$-3x + 12 = 0 \iff x = 4 \text{ et } a = -3 < 0.$$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

3. $h(x) = 5 + \frac{x}{2}$

$$5 + \frac{x}{2} = 0 \iff x = -10 \text{ et } a = \frac{1}{2} > 0.$$

x	$-\infty$	-10	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+

4. $k(x) = -x - 4$

$$-x - 4 = 0 \iff x = -4 \text{ et } a = -1 < 0.$$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$k(x)$	+	0	-

5. $m(x) = \frac{3x + 2}{5}$

$$3x + 2 = 0 \iff x = -\frac{2}{3} \text{ et } a = \frac{3}{5} > 0.$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$m(x)$	$-$	0	$+$

6. $n(x) = 7 - 2x$

$$7 - 2x = 0 \iff x = 3,5 \text{ et } a = -2 < 0.$$

x	$-\infty$	$3,5$	$+\infty$
$n(x)$	$+$	0	$-$

Exercice 6. Utiliser le signe

1. Résoudre l'inéquation $2x - 6 \geq 0$ à l'aide du tableau de signes de f .

$$\mathcal{S} = [3 ; +\infty[.$$

2. Résoudre $-3x + 12 > 0$.

$$\mathcal{S} =]-\infty ; 4[.$$

3. Une entreprise a un bénéfice $B(x) = 12x - 300$ (en euros) pour x objets vendus. À partir de combien d'objets vendus l'entreprise est-elle bénéficiaire?

$$12x - 300 > 0 \iff x > 25 : \text{à partir de 26 objets.}$$

4. Dresser le tableau de signes de B sur $[0 ; 100]$.

$$B(x) < 0 \text{ sur } [0 ; 25[, B(25) = 0, B(x) > 0 \text{ sur }]25 ; 100].$$

5. Lire le signe de la fonction affine représentée par la droite passant par $(-2 ; 0)$ et $(0 ; -3)$.

$$\text{Pente } -\frac{3}{2} < 0 : \text{la fonction est positive sur }]-\infty ; -2] \text{ et négative sur } [-2 ; +\infty[.$$

6. En utilisant un tableau de signes à deux lignes, étudier le signe de $(2x-6)(-3x+12)$.

$$2x - 6 \text{ s'annule en } 3, -3x + 12 \text{ en } 4. \text{ Le produit est négatif sur }]-\infty ; 3[, \text{ positif sur }]3 ; 4[, \text{ négatif sur }]4 ; +\infty[\text{ (nul en } 3 \text{ et } 4).$$