

Corrigé

Inéquations

Résoudre une inéquation du premier degré

Exercice 1. Inéquations du premier degré

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

1. $3x - 7 > 8$

$3x > 15$ donc $x > 5$. $\mathcal{S} =]5 ; +\infty[$.

2. $-4x + 1 \leq 9$

$-4x \leq 8$ donc $x \geq -2$ (on divise par $-4 < 0$). $\mathcal{S} = [-2 ; +\infty[$.

3. $2x + 5 < 7x - 10$

$-5x < -15$ donc $x > 3$. $\mathcal{S} =]3 ; +\infty[$.

4. $6 - x \geq 3x + 2$

$-4x \geq -4$ donc $x \leq 1$. $\mathcal{S} =]-\infty ; 1]$.

5. $\frac{x}{2} - 1 < \frac{x}{3}$

On multiplie par 6 : $3x - 6 < 2x$ donc $x < 6$. $\mathcal{S} =]-\infty ; 6[$.

6. $3(x - 2) \geq 5x + 4$

$3x - 6 \geq 5x + 4$ donc $-2x \geq 10$ donc $x \leq -5$. $\mathcal{S} =]-\infty ; -5]$.

7. $5 - 2(x + 1) < 3x$

$5 - 2x - 2 < 3x$ donc $3 < 5x$ donc $x > 0,6$. $\mathcal{S} =]0,6 ; +\infty[$.

8. $\frac{2x - 1}{3} \geq \frac{x + 4}{2}$

On multiplie par 6 : $4x - 2 \geq 3x + 12$ donc $x \geq 14$. $\mathcal{S} = [14 ; +\infty[$.

9. $4x + 3 \leq 4x - 1$

$3 \leq -1$ est faux quel que soit x . $\mathcal{S} = \emptyset$.

10. $2(x+3) > 2x+1$

$6 > 1$ est toujours vrai. $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

11. $-\frac{x}{4} + 2 \geq 0$

$-\frac{x}{4} \geq -2$ donc $x \leq 8$. $\mathcal{S} =]-\infty ; 8]$.

12. $0,5x - 1,2 < 0,3x + 0,4$

$0,2x < 1,6$ donc $x < 8$. $\mathcal{S} =]-\infty ; 8[$.

Modéliser un problème par une inéquation

Exercice 2. Modéliser par une inéquation

1. Une salle de sport propose deux formules : formule A à 12 € la séance; formule B avec un abonnement de 60 € puis 7 € la séance. À partir de combien de séances la formule B est-elle plus avantageuse?

On cherche x tel que $60 + 7x < 12x$, soit $60 < 5x$, donc $x > 12$. La formule B est plus avantageuse à partir de 13 séances.

2. Un rectangle a pour longueur $x + 4$ et pour largeur x (en cm). Pour quelles valeurs de x son périmètre est-il inférieur ou égal à 40 cm?

$2(x + 4) + 2x \leq 40$ donc $4x + 8 \leq 40$ donc $x \leq 8$. Avec $x > 0 : x \in]0 ; 8]$.

3. Pour quelles valeurs de x l'aire de ce rectangle est-elle supérieure à celle d'un carré de côté $x + 1$?

$x(x + 4) > (x + 1)^2 \iff x^2 + 4x > x^2 + 2x + 1 \iff 2x > 1 \iff x > 0,5$.

4. Un élève a obtenu 11 et 8 à ses deux premiers devoirs. Quelle note doit-il avoir au troisième pour avoir une moyenne d'au moins 12?

$\frac{11 + 8 + x}{3} \geq 12 \iff 19 + x \geq 36 \iff x \geq 17$.

5. Même question si le troisième devoir a le coefficient 2.

$\frac{11 + 8 + 2x}{4} \geq 12 \iff 2x \geq 29 \iff x \geq 14,5$.

6. Un taxi facture 4 € de prise en charge puis 1,60 € par kilomètre. Avec 30 €, quelle distance maximale peut-on parcourir?

$$4 + 1,6x \leq 30 \iff x \leq 16,25 : \text{au plus } 16,25 \text{ km.}$$

7. Un loueur de voitures propose 45 € par jour et 0,20 € par km, un autre 30 € par jour et 0,35 € par km. Pour une journée, à partir de combien de kilomètres le premier est-il plus avantageux?

$$45 + 0,2x < 30 + 0,35x \iff 15 < 0,15x \iff x > 100 : \text{au-delà de } 100 \text{ km.}$$

Dresser le tableau de signes d'un produit

Exercice 3. Tableaux de signes d'un produit

Dresser le tableau de signes de chaque expression.

1. $A(x) = (x - 3)(2x + 4)$

$$x - 3 = 0 \iff x = 3; 2x + 4 = 0 \iff x = -2.$$

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$x - 3$	$-$	$-$	0	$+$	
$2x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	
$A(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

2. $B(x) = (-x + 5)(3x - 6)$

$$-x + 5 = 0 \iff x = 5; 3x - 6 = 0 \iff x = 2.$$

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$	
$-x+5$	$+$	$+$	0	$-$	
$3x-6$	$-$	0	$+$	$+$	
$B(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

3. $C(x) = x(4 - x)$

$$x = 0; 4 - x = 0 \iff x = 4.$$

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
x	$-$	0	$+$	$+$	
$4-x$	$+$	$+$	0	$-$	
$C(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

4. $D(x) = (5x - 10)(x + 3)$

$$5x - 10 = 0 \iff x = 2; x + 3 = 0 \iff x = -3.$$

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
$5x - 10$	$-$	$-$	0	$+$	
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	
$D(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

5. $E(x) = -2(x + 1)(x - 6)$

Le facteur -2 est toujours négatif; racines -1 et 6 .

x	$-\infty$	-1	6	$+\infty$	
-2	$-$	$-$	$-$		
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	
$x-6$	$-$	$-$	0	$+$	
$E(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

6. $F(x) = x^2 - 9$ (factoriser d'abord)

$F(x) = (x - 3)(x + 3)$: négatif sur $] -3 ; 3[$, nul en -3 et 3 , positif ailleurs.

7. $G(x) = (x + 2)^2$

Un carré est toujours positif : $G(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, nul seulement en -2 .

Résoudre une inéquation produit ou quotient

Exercice 4. Inéquations produit et quotient

Résoudre dans $\mathbb{R}$ à l'aide d'un tableau de signes.

1. $(x+1)(x-4) \leq 0$

Le produit s'annule en -1 et 4 ; il est négatif entre les racines (signes $+$, $-$, $+$).

$\mathcal{S} = [-1 ; 4]$.

2. $(2-x)(3x+9) > 0$

Racines : 2 et -3 .

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$		
$2-x$		$+$	$+$	0	$-$	
$3x+9$		$-$	0	$+$	$+$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$

$\mathcal{S} =]-3 ; 2[$.

3. $\frac{x-3}{x+2} \geq 0$

Valeur interdite : -2 . Racine du numérateur : 3 .

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x - 3$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$
quotient	$+$	$-$	0	$+$

$\mathcal{S} =]-\infty ; -2[\cup [3 ; +\infty[$ (-2 est exclu car interdit, 3 est inclus).

4. $\frac{2x+1}{5-x} < 0$

Valeur interdite : 5 . Racine du numérateur : $-0,5$.

x	$-\infty$	$-0,5$	5	$+\infty$
$2x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$5 - x$	$+$	$+$	0	$-$
quotient	$-$	0	$+$	$-$

$$\mathcal{S} =]-\infty; -0,5[\cup]5; +\infty[.$$

5. $(x-2)^2 - 9 > 0$ (on pourra factoriser)

$(x-2)^2 - 9 = (x-2-3)(x-2+3) = (x-5)(x+1)$. Racines -1 et 5 , produit positif à l'extérieur des racines.

$$\mathcal{S} =]-\infty; -1[\cup]5; +\infty[.$$

6. $\frac{3}{x-1} \leq 1$ (on se ramènera à une comparaison à 0)

$$\frac{3}{x-1} - 1 \leq 0 \iff \frac{3-(x-1)}{x-1} \leq 0 \iff \frac{4-x}{x-1} \leq 0.$$

Valeur interdite 1 , racine 4 . Le quotient vaut : $-$ sur $] -\infty; 1[$, $+$ sur $]1; 4[$, 0 en 4 , $-$ sur $]4; +\infty[$.

$$\mathcal{S} =]-\infty; 1[\cup [4; +\infty[.$$

7. $x^2 \geq 5x$

$$x^2 - 5x \geq 0 \iff x(x-5) \geq 0 : \text{positif à l'extérieur des racines } 0 \text{ et } 5. \quad \mathcal{S} =]-\infty; 0] \cup [5; +\infty[.$$

8. $(3x-1)(x+2) - (3x-1)(2x-5) < 0$ (factoriser)

$(3x-1)[(x+2) - (2x-5)] = (3x-1)(-x+7)$. Racines $\frac{1}{3}$ et 7 ; le produit est négatif à l'extérieur des racines. $\mathcal{S} =]-\infty; \frac{1}{3}[\cup]7; +\infty[.$

9. $\frac{x+4}{2x-6} \leq 0$

Valeur interdite 3 , racine -4 : quotient $+$ sur $] -\infty; -4[$, $-$ sur $] -4; 3[$, $+$ sur $]3; +\infty[$. $\mathcal{S} = [-4; 3[.$

10. $\frac{2x}{x+1} > 1$

$$\frac{2x-(x+1)}{x+1} > 0 \iff \frac{x-1}{x+1} > 0 : \mathcal{S} =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[.$$