

Systèmes d'équations

Corrigé.

Exercice 1.

Résoudre les systèmes suivants.

1.
$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

On additionne les deux équations :

$$2x = 16 \quad \text{donc} \quad x = 8.$$

Puis :

$$8 + y = 12 \quad \text{donc} \quad y = 4.$$

Ainsi, la solution est $\boxed{(8; 4)}$.

2.
$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

De $x - y = 1$, on tire $x = 1 + y$. En remplaçant dans la première équation :

$$2(1 + y) + y = 11$$

d'où

$$2 + 3y = 11 \quad \text{et} \quad y = 3.$$

Alors $x = 4$.

Ainsi, la solution est $\boxed{(4; 3)}$.

3.
$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

On additionne les deux équations :

$$4x = 18 \quad \text{donc} \quad x = \frac{9}{2}.$$

Puis :

$$\frac{9}{2} + 2y = 10 \quad \text{donc} \quad 2y = \frac{11}{2}$$

et finalement

$$y = \frac{11}{4}.$$

La solution est $\boxed{\left(\frac{9}{2}; \frac{11}{4}\right)}$.

$$4. \begin{cases} 4x + y = 19 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

De $4x + y = 19$, on tire $y = 19 - 4x$. On remplace dans la deuxième équation :

$$2x - 3(19 - 4x) = 1$$

soit

$$2x - 57 + 12x = 1$$

d'où

$$14x = 58 \quad \text{et} \quad x = \frac{29}{7}.$$

Alors

$$y = 19 - 4 \times \frac{29}{7} = \frac{133 - 116}{7} = \frac{17}{7}.$$

La solution est $\boxed{\left(\frac{29}{7}; \frac{17}{7}\right)}$.

$$5. \begin{cases} 5x + 3y = 15 \\ 7x - y = 15 \end{cases}$$

De $7x - y = 15$, on tire $y = 7x - 15$. On remplace dans la première équation :

$$5x + 3(7x - 15) = 15$$

soit

$$5x + 21x - 45 = 15$$

d'où

$$26x = 60 \quad \text{et} \quad x = \frac{30}{13}.$$

Alors

$$y = 7 \times \frac{30}{13} - 15 = \frac{210 - 195}{13} = \frac{15}{13}.$$

La solution est $\boxed{\left(\frac{30}{13}; \frac{15}{13}\right)}$.

$$6. \begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 30x + 20y = 200 \end{cases}$$

On simplifie la deuxième équation :

$$3x + 2y = 20.$$

On additionne ensuite :

$$8x = 24 \quad \text{donc} \quad x = 3.$$

Puis :

$$5 \times 3 - 2y = 4$$

d'où

$$15 - 2y = 4 \quad \text{et} \quad y = \frac{11}{2}.$$

La solution est $\boxed{\left(3; \frac{11}{2}\right)}$.

$$7. \quad \begin{cases} 2x + 3y = 17 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$$

On additionne les deux équations :

$$6x = 24 \quad \text{donc} \quad x = 4.$$

Puis :

$$2 \times 4 + 3y = 17$$

d'où

$$3y = 9 \quad \text{et} \quad y = 3.$$

La solution est $\boxed{(4; 3)}$.

$$8. \quad \begin{cases} 10x + 20y = 90 \\ 300x - 200y = 700 \end{cases}$$

On simplifie :

$$x + 2y = 9 \quad \text{et} \quad 3x - 2y = 7.$$

On additionne :

$$4x = 16 \quad \text{donc} \quad x = 4.$$

Puis :

$$4 + 2y = 9 \quad \text{donc} \quad y = \frac{5}{2}.$$

La solution est $\boxed{\left(4; \frac{5}{2}\right)}$.

$$9. \begin{cases} 18x = 10 - y \\ x - y = 7 \end{cases}$$

On réécrit la première équation sous la forme :

$$18x + y = 10.$$

Comme $x - y = 7$, on a $y = x - 7$. On remplace :

$$18x + (x - 7) = 10$$

d'où

$$19x = 17 \quad \text{et} \quad x = \frac{17}{19}.$$

Alors

$$y = \frac{17}{19} - 7 = -\frac{116}{19}.$$

La solution est $\boxed{\left(\frac{17}{19}; -\frac{116}{19}\right)}$.

$$10. \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x - 7y = 0 \end{cases}$$

On élimine x :

$$\begin{cases} 10x + 15y = 0 \\ 10x - 14y = 0 \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations :

$$29y = 0 \quad \text{donc} \quad y = 0.$$

Puis

$$2x = 0 \quad \text{donc} \quad x = 0.$$

La solution est $\boxed{(0; 0)}$.

$$11. \begin{cases} 12x + 15y = 9 \\ 4x + 5y = 7 \end{cases}$$

On multiplie la deuxième équation par 3 :

$$12x + 15y = 21.$$

Or on a aussi

$$12x + 15y = 9.$$

C'est impossible : le système n'a **aucune solution**.

$$12. \begin{cases} 12x + 15y = 21 \\ 4x + 5y = 7 \end{cases}$$

La première équation est le triple de la deuxième. Les deux équations représentent donc la même droite.

Le système admet une **infinité de solutions** :

$$\{(x; y) \mid 4x + 5y = 7\}.$$

Exercice 2.

Pour chacun des couples proposés, dire s'il est solution du système donné ou non.

$$1. \text{ Couple } A(2; 5) \text{ pour } \begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

$$2 + 5 = 7 \text{ et } 2 \times 2 - 5 = -1.$$

Donc A est solution.

$$2. \text{ Couple } B(3; 4) \text{ pour } \begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

$$3 + 2 \times 4 = 11 \text{ et } 3 \times 3 - 4 = 5.$$

Donc B est solution.

$$3. \text{ Couple } C(-1; 6) \text{ pour } \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -7 \end{cases}$$

$$2 \times (-1) + 6 = 4 \text{ et } -1 - 6 = -7.$$

Donc C est solution.

$$4. \text{ Couple } D(4; 1) \text{ pour } \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 3x + y = 13 \end{cases}$$

$$4 - 2 \times 1 = 2 \text{ et } 3 \times 4 + 1 = 13.$$

Donc D est solution.

$$5. \text{ Couple } E(0; 3) \text{ pour } \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 4y = 12 \end{cases}$$

$$2 \times 0 + 3 = 3 \text{ et } 0 + 4 \times 3 = 12.$$

Donc E est solution.

$$6. \text{ Couple } F(5; -2) \text{ pour } \begin{cases} x - y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

$$5 - (-2) = 7 \text{ et } 2 \times 5 + (-2) = 8.$$

Donc F est solution.

Exercice 3.

Résoudre les problèmes suivants en posant un système de deux équations à deux inconnues.

1. On note c le prix d'un cahier et s le prix d'un stylo.

$$\begin{cases} 2c + 3s = 11,40 \\ 3c + 2s = 13,20 \end{cases}$$

En additionnant les deux équations : $5c + 5s = 24,60$ donc $c + s = 4,92$.

En soustrayant la première à la deuxième : $c - s = 1,80$.

On additionne ces deux dernières égalités : $2c = 6,72$ donc $c = 3,36$, puis $s = 4,92 - 3,36 = 1,56$.

Vérification : $2 \times 3,36 + 3 \times 1,56 = 11,40$ et $3 \times 3,36 + 2 \times 1,56 = 13,20$.

Le prix d'un cahier est donc 3,36 € et celui d'un stylo 1,56 €.

2. On note a le prix d'un billet adulte et e le prix d'un billet enfant.

$$\begin{cases} 2a + 3e = 34 \\ 4a + e = 41 \end{cases}$$

On remplace e par $41 - 4a$ dans la première équation :

$$2a + 3(41 - 4a) = 34$$

d'où

$$2a + 123 - 12a = 34$$

et

$$-10a = -89.$$

Ainsi

$$a = 8,90 \quad \text{puis} \quad e = 5,40.$$

Billet adulte : 8,90 €, billet enfant : 5,40 €.

3. On note a le nombre de places adultes et j le nombre de places jeunes.

$$\begin{cases} a + j = 18 \\ 8a + 5j = 126 \end{cases}$$

Comme $j = 18 - a$, on obtient :

$$8a + 5(18 - a) = 126$$

soit

$$8a + 90 - 5a = 126$$

d'où

$$3a = 36 \quad \text{et} \quad a = 12.$$

Alors $j = 6$.

Il y a eu 12 places adultes et 6 places jeunes.

4. On note p le nombre de poules et r le nombre de lapins.

$$\begin{cases} p + r = 20 \\ 2p + 4r = 56 \end{cases}$$

On simplifie la deuxième équation :

$$p + 2r = 28.$$

En soustrayant la première équation :

$$r = 8.$$

Donc

$$p = 12.$$

Il y a 12 poules et 8 lapins.

5. On note c le nombre de croissants et p le nombre de pains au chocolat.

$$\begin{cases} c + p = 12 \\ 1,5c + 2p = 24 \end{cases}$$

De $p = 12 - c$, on déduit :

$$1,5c + 2(12 - c) = 24$$

soit

$$1,5c + 24 - 2c = 24$$

d'où

$$-0,5c = 0 \quad \text{et} \quad c = 0.$$

Alors $p = 12$.

Il a été acheté 0 croissant et 12 pains au chocolat.

6. On note x le nombre de billets à 9 € et y le nombre de billets à 6 €.

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 9x + 6y = 1170 \end{cases}$$

On simplifie la deuxième équation :

$$3x + 2y = 390.$$

Comme $y = 150 - x$, on obtient :

$$3x + 2(150 - x) = 390$$

soit

$$3x + 300 - 2x = 390$$

d'où

$$x = 90.$$

Alors

$$y = 60.$$

On a vendu 90 billets à 9 € et 60 billets à 6 €.

7. On note x et y les deux nombres.

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

En additionnant :

$$2x = 36 \quad \text{donc} \quad x = 18.$$

Puis

$$y = 27 - 18 = 9.$$

Les deux nombres sont 18 et 9.

8. On note x le premier nombre et y le second.

$$\begin{cases} x + y = 42 \\ 2x + y = 60 \end{cases}$$

En soustrayant la première équation de la deuxième :

$$x = 18.$$

Alors

$$y = 24.$$

Les deux nombres sont 18 et 24.

9. On note L la longueur et ℓ la largeur du rectangle.

$$\begin{cases} 2L + 2\ell = 48 \\ L = \ell + 6 \end{cases}$$

Donc

$$L + \ell = 24.$$

En remplaçant L par $\ell + 6$:

$$\ell + 6 + \ell = 24$$

soit

$$2\ell = 18 \quad \text{et} \quad \ell = 9.$$

Alors

$$L = 15.$$

Les dimensions du rectangle sont 15 cm et 9 cm.