Annales baccalauréat spécialité
Fonctions : limites, continuité, convexité, exponentielle

Corrigés :

Exercice 1. Amérique du Sud 13 novembre 2026 - Exercice 3

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'évolution du nombre d'individus d'une espèce menacée présente dans un espace naturel.
Dans la partie A de cet exercice, nous étudierons une fonction f puis dans la partie B , nous étudierons l'évolution de cette espèce modélisée par cette fonction f.

Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{800}{1+7\,\mathrm{e}^{-0,3t}}$$

On admet que cette fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Partie A :

1. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.
2. **a.** Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(t) = \frac{1\,680\,\mathrm{e}^{-0,3t}}{\left(1+7\,\mathrm{e}^{-0,3t}\right)^2}$$

   b. Déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Montrer que l'ensemble des solutions positives de l'inéquation $f(t) > 500$ est l'intervalle :

$$\left]\frac{\ln(35)-\ln(3)}{0,3}\,;\,+\infty\right[$$

4. **a.** Considérons la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$F(t) = \frac{8\,000}{3} \times \ln\left(\mathrm{e}^{0,3t}+7\right)$$

   Montrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   b. Déterminer la valeur exacte de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. On admet que la fonction f' est dérivable sur l'intervalle $[O\,;\,+\infty[$ et que sa fonction dérivée f'' est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f''(t) = \frac{504\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}\left(7\,\mathrm{e}^{-0{,}3t} - 1\right)}{\left(1 + 7\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}\right)^2}$$

Montrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{10}{3}\ln(7)\right]$ puis concave sur l'intervalle $\left[\dfrac{10}{3}\ln(7)\,;\,+\infty\right[$.

Partie B :

Au premier janvier 2025, on dénombre dans une réserve naturelle 100 individus d'une espèce menacée. À cette date, des décisions ont été prises par la direction de la réserve afin que l'espèce puisse se développer et voir sa population augmenter à l'avenir.
Dans cette réserve naturelle, on modélise le nombre d'individus de cette espèce par $f(t)$ où t est le temps écoulé en années après le premier janvier 2025 et la fonction f est celle étudiée dans la partie **A**.
Pour répondre aux questions de cette partie **B**, on pourra utiliser et admettre les résultats obtenus dans la partie **A**.
Selon ce modèle :

1. La population de cette espèce va-t-elle finir par se stabiliser ? Si oui, vers quelle valeur ?

2. Au cours de quelle année la population de cette espèce va-t-elle dépasser les 500 individus ?

3. Quelle sera la valeur moyenne du nombre d'individus de cette espèce dans cette réserve durant les dix premières années après le premier janvier 2025 ?

Le résultat sera donné arrondi à l'unité près.

4. Le directeur de la réserve naturelle communique sur les réseaux sociaux en affirmant que durant les 10 premières années à partir de janvier 2025, la vitesse de croissance du nombre d'individus de cette espèce menacée ne va pas cesser d'augmenter.

L'affirmation du directeur est-elle cohérente avec ce modèle ?

Exercice 2. Métropole 9 septembre 2026 - Exercice 2

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (3x-1)\,\mathrm{e}^{-x} + 2$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
Interpréter graphiquement ce résultat.

3. On note f' la fonction dérivée de f.

a. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (4-3x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de la dérivée et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
On notera α cette solution.

b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c. En déduire le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (-3x-2)\,\mathrm{e}^{-x} + 2x$.
On admet que la fonction F est une primitive de f.
Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe de abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

5. On admet que la droite d'équation $y = 4x + 1$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
Vérifier que, pour tout réel x, $(3x-1)\,\mathrm{e}^{-x} + 2 \leqslant 4x + 1$.

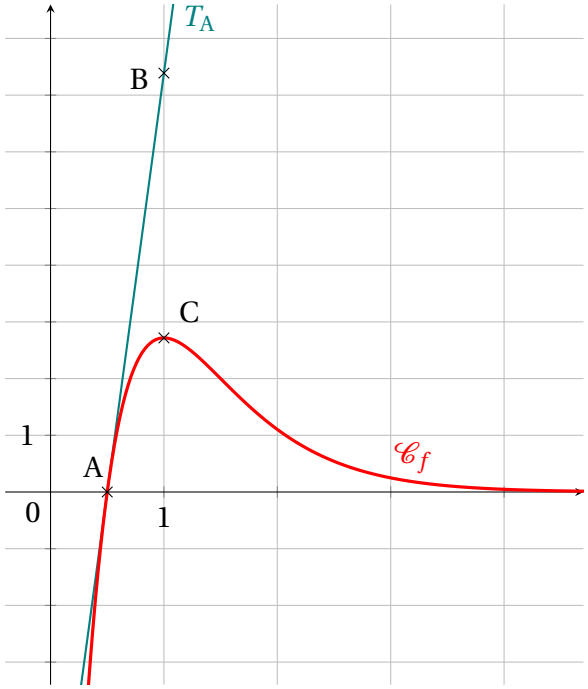
Exercice 3. Métropole 17 juin 2026 - Exercice 4

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ dont on donne ci-dessous une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.
On note f' sa fonction dérivée.

On précise que :

- la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point C d'abscisse 1 ;
- la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ passe par le point $\mathrm{B}\left(1; \mathrm{e}^2\right)$.



1. À l'aide du graphique ci-contre :

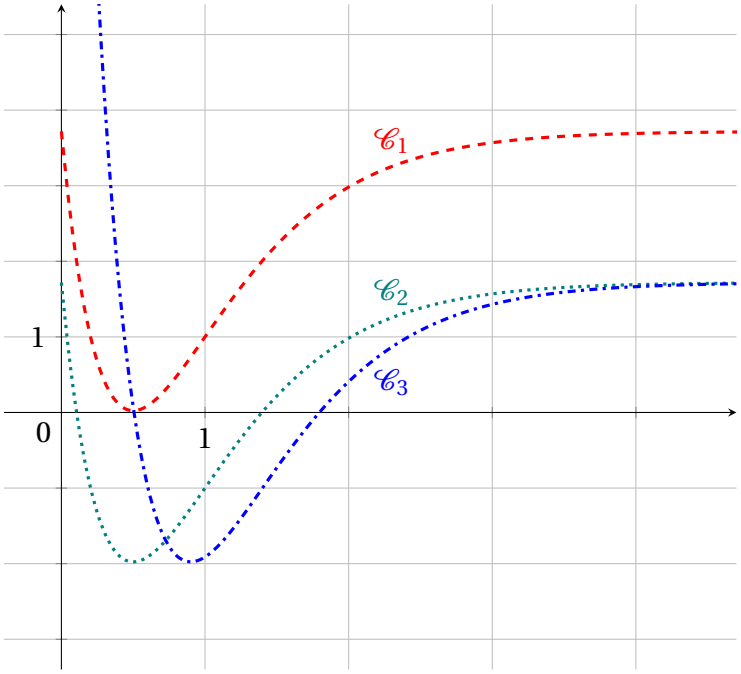
a. Donner $f'(1)$.

b. Donner la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0\,;\,3]$.

2. Déterminer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. Parmi les trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ci-dessous, deux représentent des primitives de la fonction f.

Indiquer lesquelles et justifier.



Partie B

Un industriel doit créer un logo représentant la forme ci-contre (Fig. 1).
La dimension de 0,3 cm indiquée sur la figure est une contrainte imposée par le client.

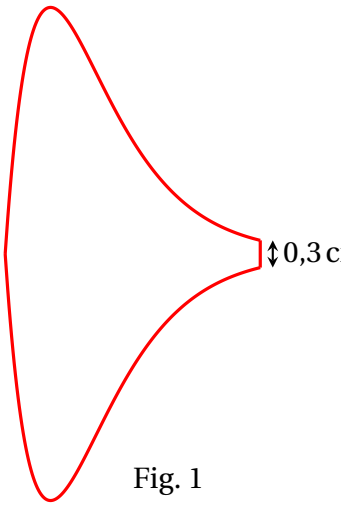


Fig. 1

L'industriel choisit de modéliser le contour de ce logo à l'aide d'une portion de la courbe de la fonction f vue en **partie A**, et de l'image de cette portion par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, sur un intervalle $[0,5;\alpha]$.
Le nombre α est un réel supérieur à 1 que l'on déterminera dans cette partie.

L'ensemble est représenté graphiquement dans un repère orthonormé (Fig. 2) d'unité 1 cm.
On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{-2x+3}.$$

1. **a.** Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$:

$$f(x) = \mathrm{e}^2 \times \frac{2x-1}{\mathrm{e}^{2x-1}}.$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.
(On pourra poser $X = 2x-1$).

2. **a.** Montrer que,
pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$,

$$f'(x) = (-4x+4)\,\mathrm{e}^{-2x+3}.$$

b. Construire le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

3. Justifier que la contrainte imposée par le client se traduit par l'égalité $f(\alpha) = 0,15$.
Montrer qu'il existe une unique valeur de α dans l'intervalle $[1;+\infty[$ qui permette de vérifier cette égalité.
En donner une valeur arrondie au dixième.

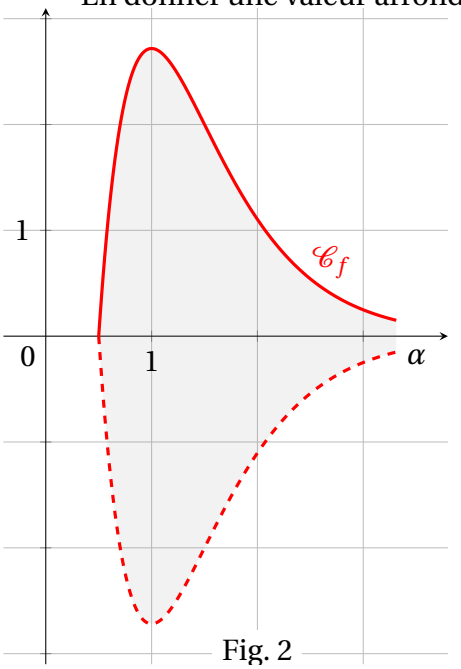


Fig. 2

Partie C

On fabrique un porte-clé en découpant une plaque d'acier suivant la forme du logo représenté par la surface grisée en figure 2 de la **partie B**.
On précise que cette plaque a une épaisseur de 0,2 cm.

1. On considère :

$$I = \int_{0,5}^{3,3} f(x)\,\mathrm{d}x$$

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale I arrondie au dixième est égale à 3,6.

2. On précise que le volume du porte-clé est égal à :

$$\textit{Aire du logo} \times \textit{épaisseur de la plaque}$$

Déterminer le volume du porte-clé en cm^3, arrondi au dixième.

Exercice 4. Polynésie 16 juin 2026 - Exercice 2

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\text{e}^{-x}$.
   Affirmation 1 : La limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\text{e}^{x}$.
   Affirmation 2 : La fonction g est convexe sur l'intervalle $[-2\,;\,+\infty[$.
3. **Affirmation 3 :** Une intégration par parties permet d'obtenir :

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,\text{d}x = -\pi.$$

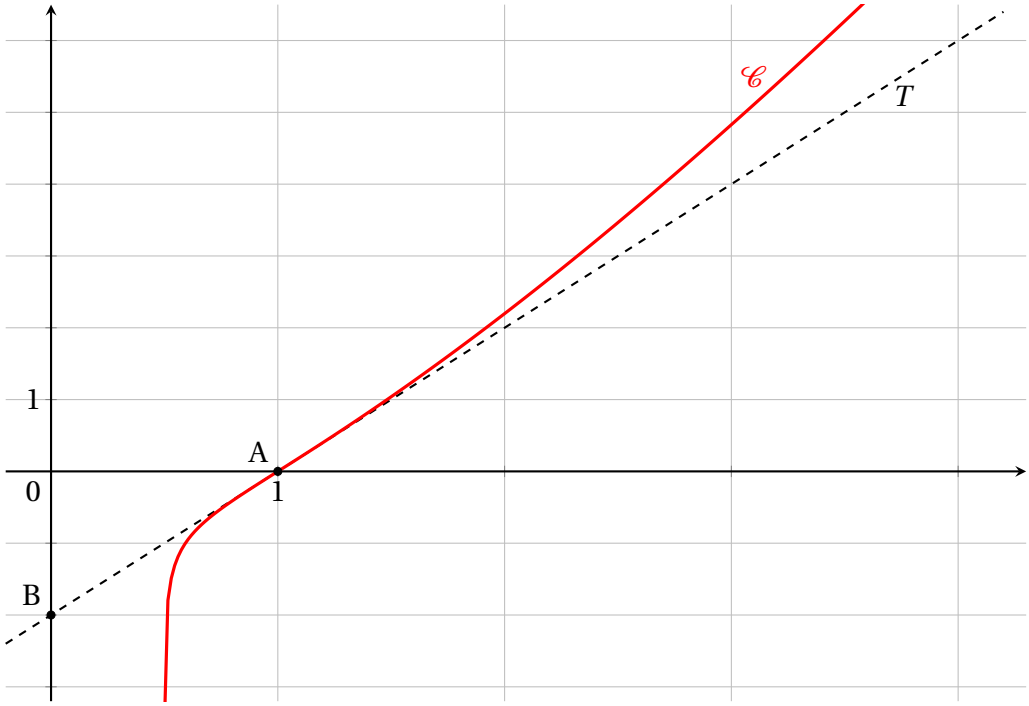
4. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y - 5$ et la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\dfrac{3}{2}\text{e}^{2x} + \dfrac{5}{2}$.
   Affirmation 4 : La fonction h est la solution de (E) qui vaut 1 en 0.
5. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python :

```
def mystere(n):
    f = 1
    for k in range(1, n+1):
     f = f * k
  return f
```

Affirmation 5 : Le nombre renvoyé lors de l'exécution de `mystere(5)` est 120.

Partie A : lecture graphique

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.
On a tracé, dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction f, notée $\mathscr{C}$, ainsi que la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A(1 ; 0). On précise que T passe par le point B(0 ; −2).
On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.



1. Déterminer $f'(1)$.

2. La fonction f est-elle concave sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$?

3. Déterminer $f''(1)$.

Partie B : étude de fonction

On admet que la fonction représentée graphiquement dans la partie A est définie sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$f(x) = x\ln(2x-1)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On rappelle que :

- la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, que f' désigne sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde ;
- $\mathscr{C}$ désigne la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

1. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $\frac{1}{2}$. En déduire une interprétation graphique.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

3. On admet que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$:

$$f'(x) = \ln(2x-1) + \frac{2x}{2x-1}.$$

a. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$:

$$f''(x) = \frac{4(x-1)}{(2x-1)^2}.$$

b. Montrer que $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion et que ce point est l'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

4. a. Montrer que la fonction f est positive sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

b. On admet que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, on a :

$$\frac{x^2}{2x-1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{2}{2x-1}.$$

Montrer que :

$$\int_1^2 \frac{x^2}{2x-1}\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{8}\ln(3).$$

c. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

En vous aidant d'une intégration par parties, déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$ en unité d'aire.

Partie C : généralisation

On désigne par a un réel strictement positif et par f_a la fonction définie sur l'intervalle $\left]\frac{1}{a}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$f_a(x) = x\ln(ax-1).$$

On admet que f_a est deux fois dérivable sur l'intervalle $\left]\frac{1}{a}\,;\,+\infty\right[$. On note f_a' sa fonction dérivée, f_a'' sa fonction dérivée seconde, et $\mathscr{C}_a$ sa représentation graphique.

On admet que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{a}\,;\,+\infty\right[$:

$$f_a''(x) = \frac{a(ax-2)}{(ax-1)^2}.$$

1. Montrer que pour tout réel a strictement positif, la courbe $\mathscr{C}_a$ admet un unique point d'inflexion A_a.

2. Montrer que les points A_a sont alignés, a appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;2\pi]$ par :

$$g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0;2\pi]$ et on note g' sa dérivée.

a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;2\pi]$, on a :

$$g'(x) = -x\sin(x)$$

b. On donne le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0;2\pi]$ ci-dessous. Justifier chacun des éléments qui figurent dans ce tableau de variations.

x	0	π	2π
g	0 ↘	$-\pi$	↗ 2π

c. Montrer qu'il existe une unique valeur réelle α dans l'intervalle $[\pi;2\pi]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

d. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;2\pi]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;2\pi]$ et on note f' sa dérivée.

a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;2\pi]$ on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $]0;2\pi]$.

c. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;2\pi]$.

d. Déterminer la limite de f en 0. On pourra utiliser le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

3. On considère deux nombres réels r et s qui vérifient l'inégalité : $0 < r < s < \pi$.

Montrer que :

$$\frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}$$

Exercice 7. Asie 5 septembre 2025 - Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}.$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la dérivée de la fonction f.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée.
Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1. Pour tout réel x, on a $f'(x) = (-2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$.

Affirmation 2. La fonction f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}.$$

Affirmation 3. La fonction f est convexe sur $]-\infty\,;\,1]$.

Affirmation 4. L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 5. L'aire du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\dfrac{1}{4} - \dfrac{3\mathrm{e}^{-2}}{4}$.

Exercice 8. Polynésie 17 juin 2025 - Exercice 3

On munit le plan d'un repère orthonormé.
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et, pour } n \geqslant 1,\ f_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-x}.$$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geqslant 1$

On considère un entier naturel $n \geqslant 1$.

1. **a.** On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$f_n'(x) = (n-x)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}.$$

b. Justifier tous les éléments du tableau ci-dessous :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	↗	$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$	↘	0

2. Justifier par le calcul que le point $\mathrm{A}\left(1\ ;\ \mathrm{e}^{-1}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$.

Partie B : Étude des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \geqslant 0$

Dans cette partie, on étudie les fonctions f_n sur $[0;1]$ et on considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Sur le graphique en ANNEXE, on a représenté les courbes $\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_{10}$ et $\mathscr{C}_{100}$.

a. Donner une interprétation graphique de I_n.

b. Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2. Calculer I_0.

3. **a.** Soit n un entier naturel.

Démontrer que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$,

$$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n.$$

b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

4. Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera ℓ.

5. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

6. **a.** Démontrer que si $\ell > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.

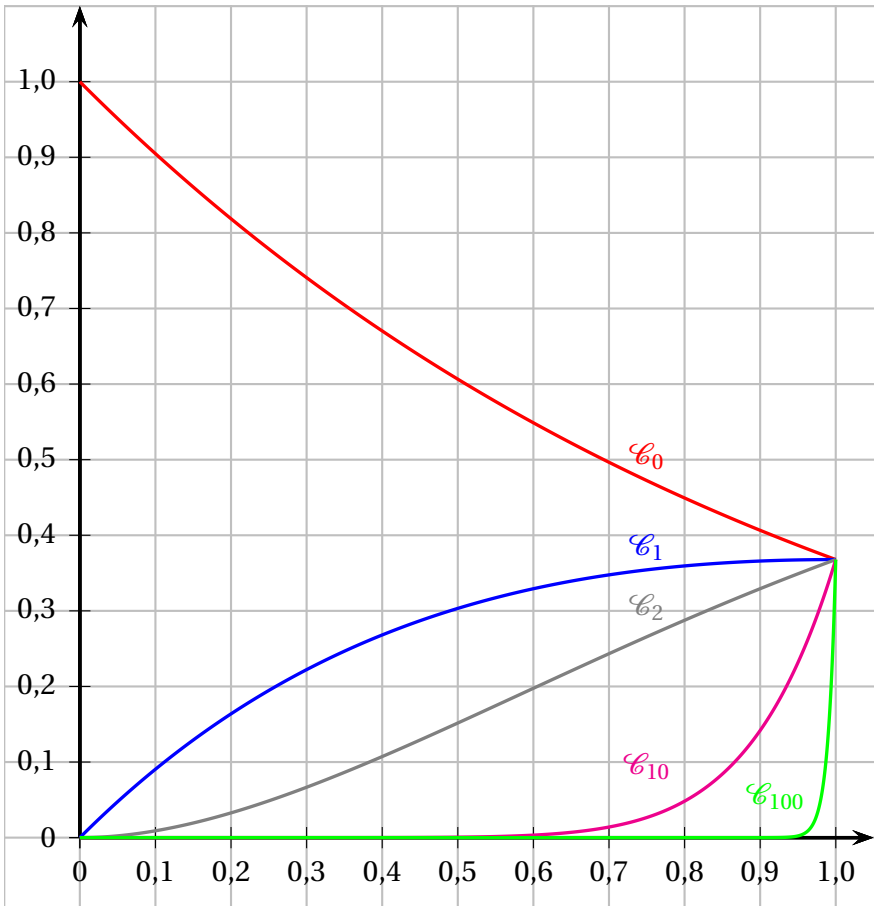
b. Démontrer que $\ell = 0$. On pourra utiliser la question 6. a.

On donne ci-dessous le script de la fonction `mystere`, écrite en langage Python.
On a importé la constante e.

```
def mystere(n):
  I = 1 - 1/e
  L = [I]
  for i in range(n):
      I = (i + 1)*I - 1/e
      L.append(I)
 return L
```

7. Que renvoie `mystere(100)` dans le contexte de l'exercice ?

ANNEXE : exercice 3



Exercice 9. Centres étrangers 13 juin 2025 - Exercice 2

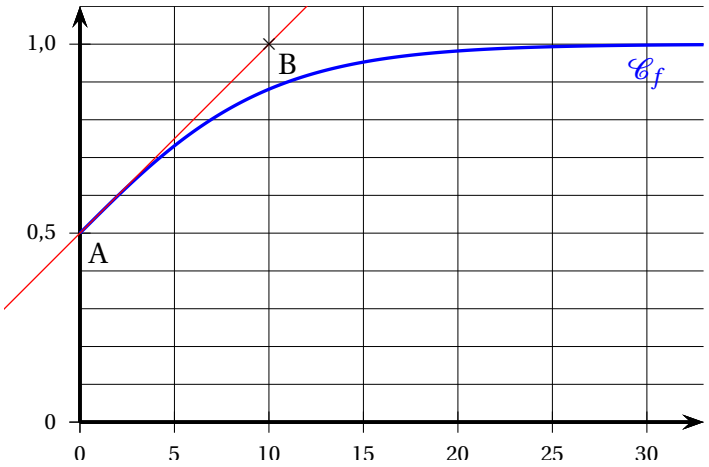
Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{a + \mathrm{e}^{-bx}}$$

où a et b sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
La fonction f admet pour représentation graphique la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous :



On considère les points A(0 ; 0,5) et B(10 ; 1).
On admet que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée de $f(10)$.
2. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
   Donner une interprétation graphique de ce résultat.
3. Justifier que $a = 1$.
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
5. **a.** Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de la constante b.
   b. En déduire la valeur de b.

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-0{,}2x}}$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0{,}97$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel α par deux nombres entiers consécutifs.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Partie C

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;40]$, c'est-à-dire :

$$I = \frac{1}{40}\int_0^{40} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}\,\mathrm{d}x.$$

On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.

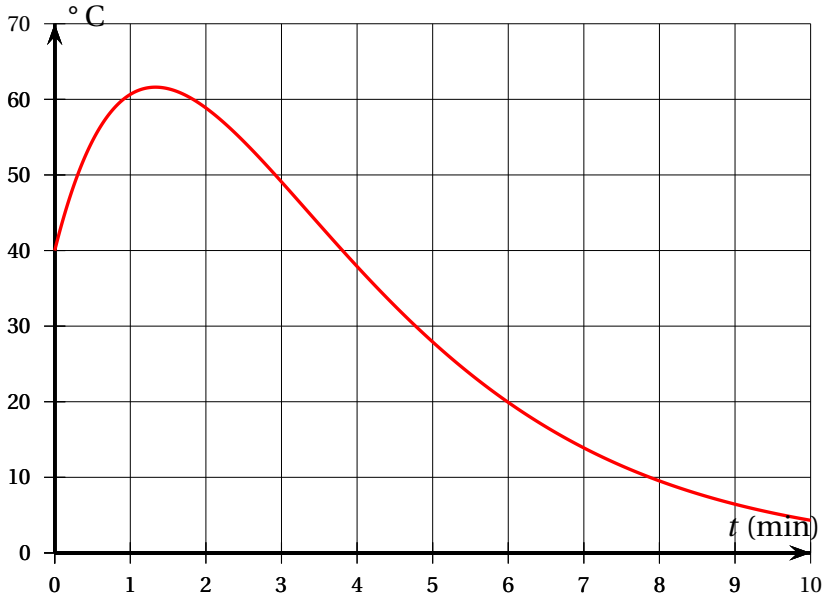
Exercice 10. Asie 12 juin 2025 - Exercice 4

Dans un laboratoire, on étudie une réaction chimique dans un réacteur fermé, sous certaines conditions. Le traitement numérique des données expérimentales a permis de modéliser l'évolution de la température de cette réaction chimique en fonction du temps.
L'objectif de cet exercice est d'étudier cette modélisation.
La température est exprimée en degré Celsius et le temps est exprimé en minute.
Dans tout l'exercice, on se place sur l'intervalle de temps $[0\,;\,10]$.
Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un repère orthogonal du plan, on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction température en fonction du temps sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

1. Déterminer, par lecture graphique, au bout de combien de temps la température redescend à sa valeur initiale à l'instant $t = 0$.



On appelle f la fonction température représentée par la courbe ci-dessus.
On précise que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
On admet que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(t) = (at+b)\mathrm{e}^{-0,5t}$ où a et b sont deux constantes réelles.

2. On admet que la valeur exacte de $f(0)$ est 40. En déduire la valeur de b.

3. On admet que f vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + 0,5y = 60\mathrm{e}^{-0,5t}$. Déterminer la valeur de a.

Partie B : Étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 10] par

$$f(t) = (60t + 40)\mathrm{e}^{-0,5t}$$

1. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle [0; 10], on a : $f'(t) = (40 - 30t)\mathrm{e}^{-0,5t}$.

2. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0; 10].
Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les images des valeurs présentes dans le tableau.

b. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α strictement positive sur l'intervalle]0 ; 10].

c. Donner une valeur approchée de α au dixième près et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

3. On définit la température moyenne, exprimée en degré Celsius, de cette réaction chimique entre deux temps t_1 et t_2, exprimés en minute, par

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{dt}$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^4 f(t)\,\mathrm{dt} = 320 - \frac{800}{\mathrm{e}^2}$$

b. En déduire une valeur approchée, au degré Celsius près, de la température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes.

Exercice 11. Asie 11 juin 2025 - Exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

et on appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

a. Montrer que $g'(x) = f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}.$$

2. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0.

b. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.

4. On pose $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer I.

b. Interpréter graphiquement le résultat.

5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et que :

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(x-3\sqrt{x}+3\right)}{8x^2\sqrt{x}}.$$

a. En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 12. Amérique du Nord (sujet de secours) 22 mai 2025 - Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x :

$$f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$$

4. Étudier la convexité de la fonction f.
5. Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
6. En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
   Donner un encadrement de α, au centième près.
8. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

Partie B : Calcul d'aire

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n.
2. **a.** Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n.
   b. Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. **a.** Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^x [\sin(x) + \cos(x)].$$

   b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$

2. **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

   b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^x \sin(x) \geqslant x$.

3. Justifier que le point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

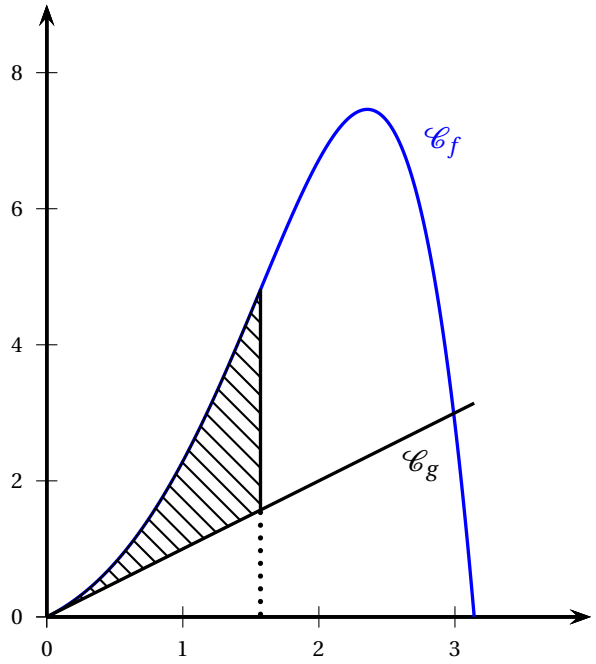
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

$$I = 1 + J \qquad \text{et} \qquad I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En déduire que $I = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.
   Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
   Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.



Exercice 14. Amérique du Sud 22 novembre 2024 - Exercice 3

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 4\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = \left(-x^2 + 2x + 4\right)\mathrm{e}^{-x}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

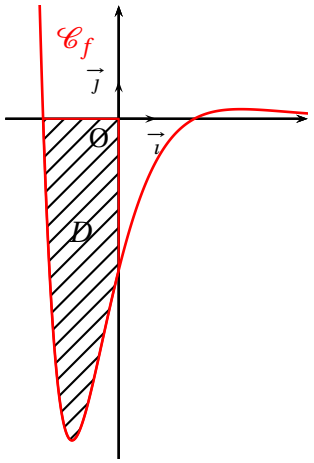
1. Justifier que $I_0 = \mathrm{e}^2 - 1$.
2. En utilisant une intégration par partie, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n.$$

3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2.

Partie 3

1. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie 1.
2. On a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.
   Le domaine D du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
   Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine D.



Exercice 15. Métropole 12 septembre 2024 - Exercice 4

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes

1. On considère le script écrit en langage Python ci-dessous.

```
def seuil(S) :
  n=0
  u=7
  while u < S :
      n=n+1
      u=1.05*u+3
  return(n)
```

   Affirmation 1 : l'instruction `seuil(100)` renvoie la valeur 18.
2. Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par
$$S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n}.$$
   Affirmation 2 : la suite (S_n) converge vers $\dfrac{5}{4}$.
3. **Affirmation 3** : dans une classe composée de 30 élèves, on peut former 870 binômes de délégués différents.
4. On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.
   Affirmation 4 : l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.
5. **Affirmation 5** :
$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}.$$

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**Figure 2**).

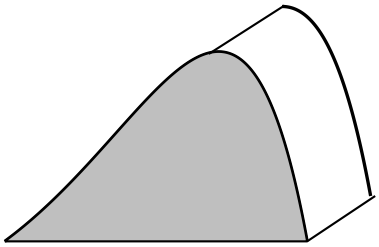


Figure 1

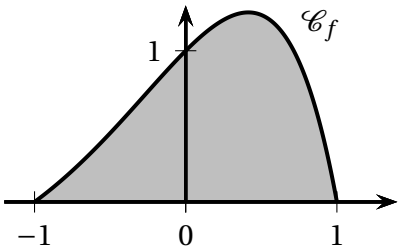


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = \left(1 - x^2\right)\mathrm{e}^x.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. **a.** Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ on a $f(x) \geqslant 0$.

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x.$$

2. Le volume $\mathscr{V}$ de chocolat, en cm^3, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathscr{V} = 3 \times S$$

où S est l'aire, en cm^2, de la surface colorée (**Figure 2**).

En déduire que ce volume $\mathscr{V}$, arrondi à $0,1$ cm^3 près, est égal à $4,4$ cm^3.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0,01\ ;\ +\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2[2 - 3\ln(q)] - 3.$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0,01\ ;\ +\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{q\to+\infty} B(q)$.

b. Montrer que, pour tout $q \geqslant 0{,}01$, $B'(q) = 8q(1-6\ln(q))$.

c. Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de B sur $[0{,}01\ ;\ +\infty[$.
Dresser le tableau de variation complet de la fonction B.

d. Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan ?

2. **a.** Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1{,}2\ ;\ +\infty[$.
Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

b. On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0{,}01\ ;\ 1{,}2[$.
On donne $\alpha \approx 0{,}757$.
En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.

Exercice 17. Polynésie 20 juin 2024 - Exercice 2

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui comprend cinq questions. Les cinq questions sont indépendantes.
*Pour chacune des questions, **une seule des quatre réponses est exacte**. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.*
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

1. La solution f de l'équation différentielle $y' = -3y+7$ telle que $f(0) = 1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

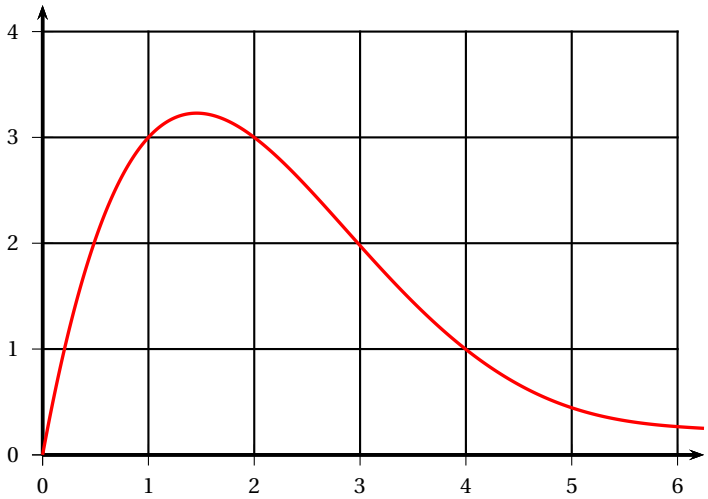
A. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$

B. $f(x) = -\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$

C. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$

D. $f(x) = -\dfrac{10}{3}\mathrm{e}^{-3x} - \dfrac{7}{3}$

2. La courbe d'une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ est donnée ci-dessous.



Un encadrement de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ est :

A. $0 \leqslant I \leqslant 4$
B. $1 \leqslant I \leqslant 5$
C. $5 \leqslant I \leqslant 10$
D. $10 \leqslant I \leqslant 15$

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 \ln\left(x^2+4\right)$.

Alors $\displaystyle\int_0^2 g'(x)\,\mathrm{d}x$ vaut, à 10^{-1} près :

A. 4,9
B. 8,3
C. 1,7
D. 7,5

4. Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale.

Elle veut former un groupe de 5 élèves. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe de 5 élèves ?

A. 31^5
B. $31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27$
C. $31 + 30 + 29 + 28 + 27$
D. $\binom{31}{5}$

5. La professeure s'intéresse maintenant à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe :

— 10 élèves ont choisi la spécialité physique-chimie ;
— 20 élèves ont choisi la spécialité SES ;
— 1 élève a choisi la spécialité LLCE espagnol.

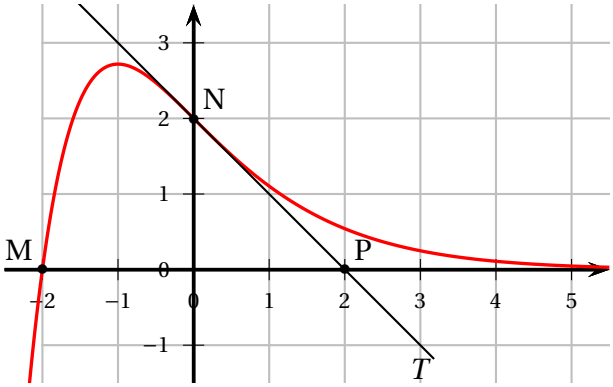
Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe ?

A. $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$
B. $\binom{20}{3} + \binom{11}{2}$
C. $\binom{20}{3}$
D. $20^3 \times 11^2$

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.
Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point N(0 ; 2) ;
- le point M(−2 ; 0) appartenant à $\mathscr{C}_f$ et P(2 ; 0) appartenant à la tangente T.

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.



Partie A : étude graphique

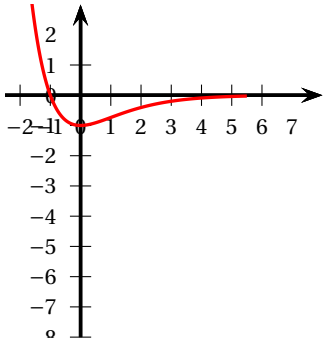
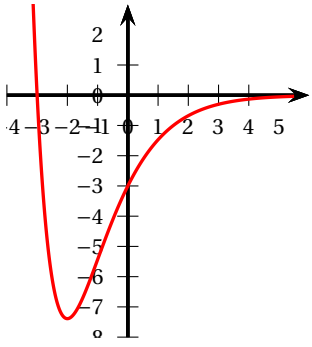
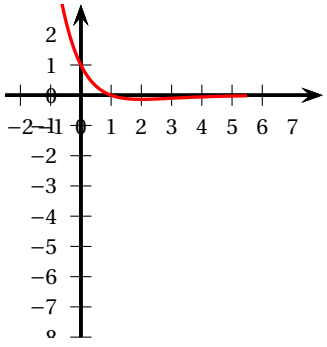
On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. **a.** Donner $f(0)$.
b. Déterminer $f'(0)$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.

4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.

Courbe 1	Courbe 2	Courbe 3
		

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a, b et λ sont des constantes réelles.
Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.
2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.
3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. On admet que $f'(x) = (-x - 1)\,\mathrm{e}^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f. Justifier.
3. **a.** Étudier la convexité de f.
   b. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
4. Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, on pose :

$$I(t) = \int_{-2}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

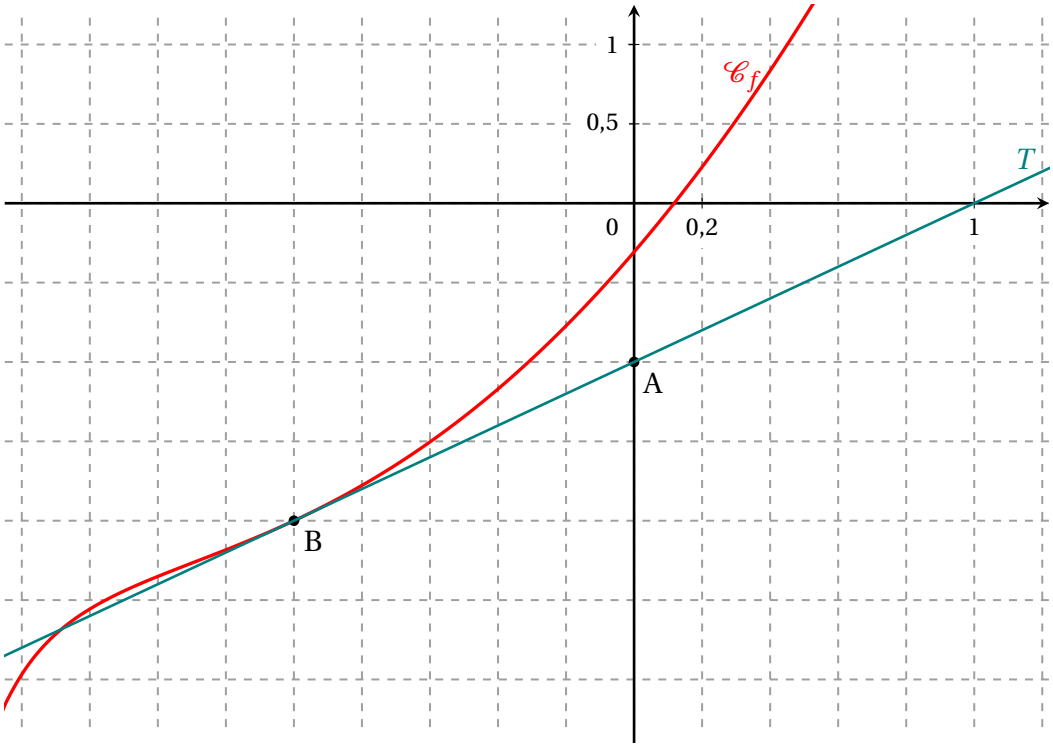
   a. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I(t) = (-t - 3)\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2}.$$

   b. En déduire un exemple de surface non limitée dont l'aire est finie.

Exercice 19. Métropole 20 juin 2024 - Exercice 3

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1.
On précise que la droite T passe par le point A$(0\,;\,-1)$.



Partie A : exploitation du graphique.

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2. Interpréter graphiquement ce résultat.
   On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > -2$, $\quad f'(x) = \dfrac{2x^2+6x+5}{x+2}$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.

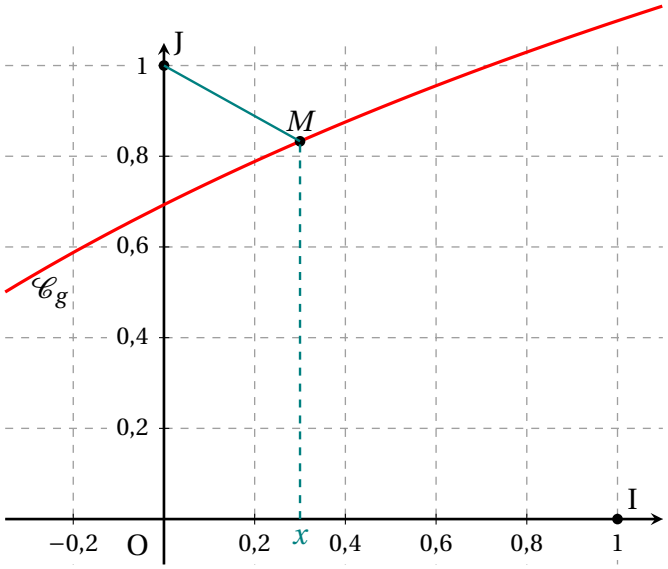
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;\,+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\,;\,+\infty[$.

6. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale.

Soit g la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $\quad g(x)=\ln(x+2)$.
On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (0 ; I , J), représentée ci-après.
Soit M un point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.
Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.
On considère la fonction h définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $\quad h(x)=\mathrm{JM}^2$.



1. Justifier que pour tout $x>-2$, on a : $\quad h(x)=x^2+[\ln(x+2)-1]^2$.

2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.
On admet également que pour tout réel $x>-2$,

$$h'(x)=\frac{2f(x)}{x+2}$$

où f est la fonction étudiée en **partie B**.

a. Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\,;\,+\infty[$.
Les limites ne sont pas demandées.

b. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question **4.** de la **partie B**.

3. On notera M_α le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse α.

a. Montrer que $\quad \ln(\alpha+2)=1-2\alpha-\alpha^2$.

b. En déduire que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.
On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

Exercice 20. Métropole (sujet de secours) 19 juin 2024 - Exercice 4

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	5	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

a. Affirmation 1 :
La droite d'équation $y=-2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

b. Affirmation 2 :
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{f(x)-5} = +\infty$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

a. Affirmation 3 :
Le point $\mathrm{A}\left(2\,;\,\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g.

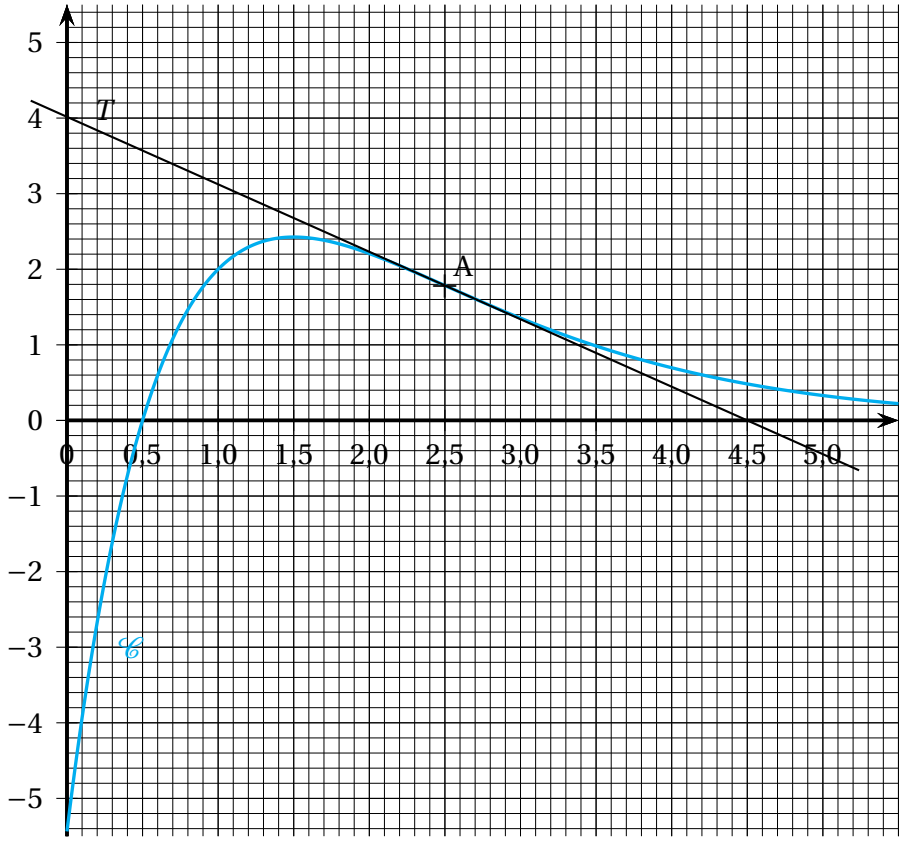
b. Affirmation 4 :
Pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty\,;\,2[$, on a $g(x)\leqslant x$.

3. Affirmation 5 :
L'équation $x\ln(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 21. Asie 10 juin 2024 - Exercice 1

Partie A

On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.



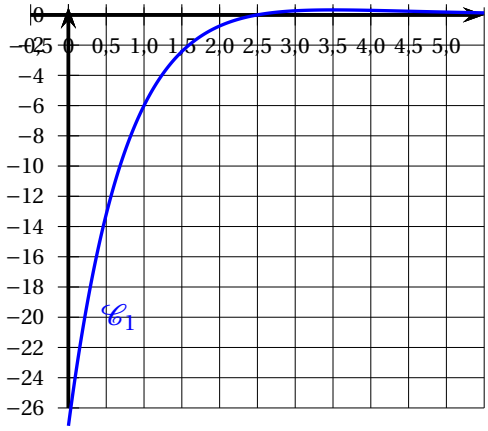
1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$.

2. Que semble présenter la courbe $\mathscr{C}$ au point A ?

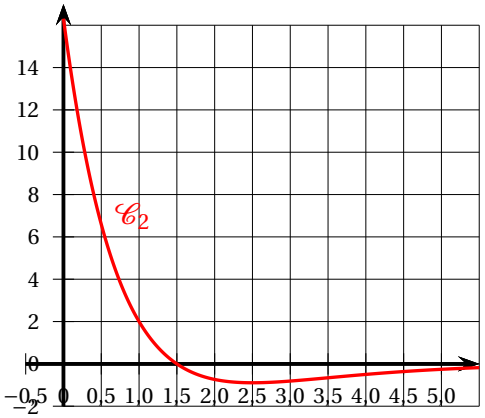
3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.

Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente.

Ce choix sera justifié.

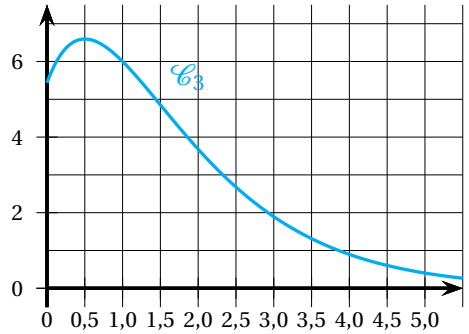


Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

4. La courbe $\mathscr{C}_3$ ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0\ ;\ +\infty[$ d'une primitive de la fonction f ? Justifier.



Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, est définie par

$$f(x) = (4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}.$$

On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

1. Étude de la fonction f

a. Montrer que $f'(x) = (-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1}$.

b. Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c. Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.

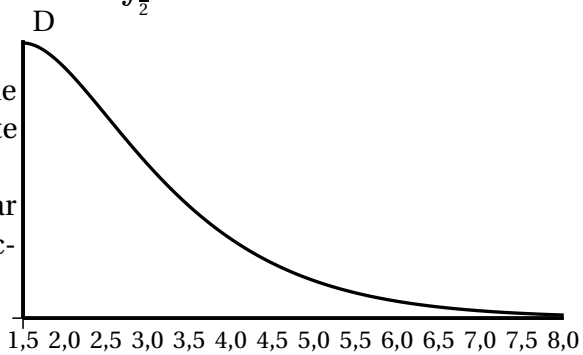
2. On considère une fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.

a. Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b. On admet que $F(x) = (-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'intégrale

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle.
Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}\ ;\ 8\right]$.
L'unité de longueur est le mètre.



a. Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D.

b. La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste. L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75 % de la surface du mur.
Sachant qu'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de 0,8 m^2, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette œuvre.

Exercice 22. Centres étrangers (Suède) 7 juin 2024 - Exercice 3

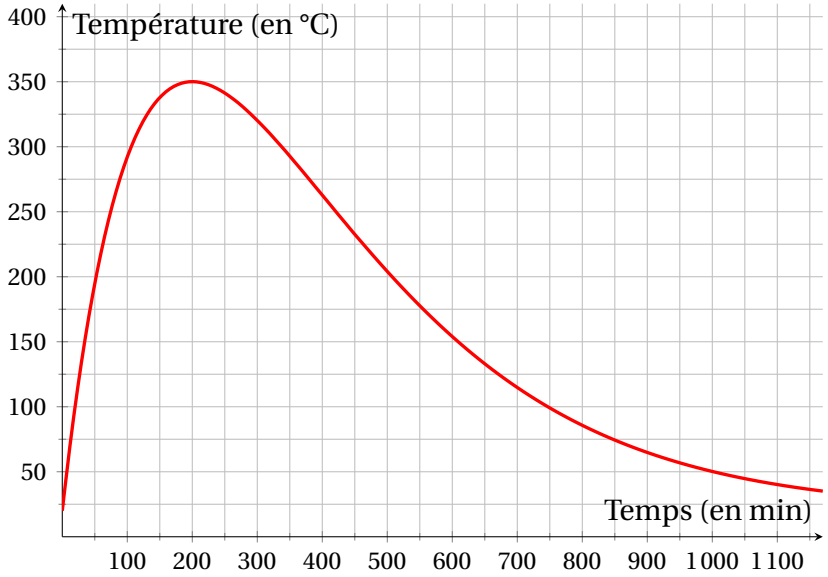
Un organisme certificateur est missionné pour évaluer deux appareils de chauffage, l'un d'une marque A et l'autre d'une marque B.

Les parties 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

Partie 1 : appareil de la marque A

À l'aide d'une sonde, on a mesuré la température à l'intérieur du foyer d'un appareil de la marque *A*.

On a représenté, ci-dessous, la courbe de la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer en fonction du temps écoulé, exprimé en minutes, depuis l'allumage du foyer.



Par lecture graphique :

1. Donner le temps au bout duquel la température maximale est atteinte à l'intérieur du foyer.
2. Donner une valeur approchée, en minutes, de la durée pendant laquelle la température à l'intérieur du foyer dépasse 300 °C.
3. On note f la fonction représentée sur le graphique.
   Estimer la valeur de $\dfrac{1}{600}\displaystyle\int_0^{600} f(t)\,\mathrm{d}t$. Interpréter le résultat.

Partie 2 : étude d'une fonction

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(t) = 10t\,\mathrm{e}^{-0,01t} + 20.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, $\quad g'(t) = (-0,1t + 10)\,\mathrm{e}^{-0,01t}$.
   b. Étudier les variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$ et construire son tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $g(t) = 300$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[0\,;\,+\infty[$. En donner des valeurs approchées à l'unité.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie 3 : évaluation

Pour un appareil de la marque B, la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer t minutes après l'allumage est modélisée sur $[0\,;\,600]$ par la fonction g.

L'organisme certificateur attribue une étoile par critère validé parmi les quatre suivants :

— Critère 1 : la température maximale est supérieure à 320 °C.

— Critère 2 : la température maximale est atteinte en moins de 2 heures.

— Critère 3 : la température moyenne durant les 10 premières heures après l'allumage dépasse 250 °C.

— Critère 4 : la température à l'intérieur du foyer ne doit pas dépasser 300 °C pendant plus de 5 heures.

Chaque appareil obtient-il exactement trois étoiles ? Justifier votre réponse.

Exercice 23. Centres étrangers 6 juin 2024 - Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 1.

b. En déduire une interprétation graphique.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f'(x) = \frac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}.$$

b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f''(x) = \frac{\left(x^2-4x+5\right)\mathrm{e}^x}{(x-1)^3}.$$

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :

$$\mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1).$$

5. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.