Annales baccalauréat spécialité
Fonctions : limites, continuité, convexité, exponentielle

Exercice 1.

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'évolution du nombre d'individus d'une espèce menacée présente dans un espace naturel.
Dans la partie A de cet exercice, nous étudierons une fonction f puis dans la partie B , nous étudierons l'évolution de cette espèce modélisée par cette fonction f.

Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{800}{1+7\,\mathrm{e}^{-0,3t}}$$

On admet que cette fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Partie A :

1. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.
2. **a.** Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(t) = \frac{1\,680\,\mathrm{e}^{-0,3t}}{\left(1+7\,\mathrm{e}^{-0,3t}\right)^2}$$

   b. Déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Montrer que l'ensemble des solutions positives de l'inéquation $f(t) > 500$ est l'intervalle :

$$\left]\frac{\ln(35)-\ln(3)}{0,3}\,;\,+\infty\right[$$

4. **a.** Considérons la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$F(t) = \frac{8\,000}{3} \times \ln\left(\mathrm{e}^{0,3t}+7\right)$$

   Montrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   b. Déterminer la valeur exacte de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. On admet que la fonction f' est dérivable sur l'intervalle $[O\,;\,+\infty[$ et que sa fonction dérivée f'' est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f''(t) = \frac{504\,\mathrm{e}^{-0,3t}\left(7\,\mathrm{e}^{-0,3t}-1\right)}{\left(1+7\,\mathrm{e}^{-0,3t}\right)^2}$$

Montrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{10}{3}\ln(7)\right]$ puis concave sur l'intervalle $\left[\frac{10}{3}\ln(7)\,;\,+\infty\right[$.

Partie B :

Au premier janvier 2025, on dénombre dans une réserve naturelle 100 individus d'une espèce menacée. À cette date, des décisions ont été prises par la direction de la réserve afin que l'espèce puisse se développer et voir sa population augmenter à l'avenir.
Dans cette réserve naturelle, on modélise le nombre d'individus de cette espèce par $f(t)$ où t est le temps écoulé en années après le premier janvier 2025 et la fonction f est celle étudiée dans la partie **A**.
Pour répondre aux questions de cette partie **B**, on pourra utiliser et admettre les résultats obtenus dans la partie **A**.
Selon ce modèle :

1. La population de cette espèce va-t-elle finir par se stabiliser ? Si oui, vers quelle valeur ?
2. Au cours de quelle année la population de cette espèce va-t-elle dépasser les 500 individus ?
3. Quelle sera la valeur moyenne du nombre d'individus de cette espèce dans cette réserve durant les dix premières années après le premier janvier 2025 ?
   Le résultat sera donné arrondi à l'unité près.
4. Le directeur de la réserve naturelle communique sur les réseaux sociaux en affirmant que durant les 10 premières années à partir de janvier 2025, la vitesse de croissance du nombre d'individus de cette espèce menacée ne va pas cesser d'augmenter.
   L'affirmation du directeur est-elle cohérente avec ce modèle ?

Corrigé
Partie A

1. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,3t} = 0$

Ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} 1+7\,\mathrm{e}^{-0,3t} = 1$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{800}{1+7\,\mathrm{e}^{-0,3t}} = 800$.

2. a. En définissant la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = 1+7\,\mathrm{e}^{-0,3t}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(t) &= 800 \times \frac{-g'(t)}{\left(g(t)\right)^2} \\ &= 800 \times \frac{(-1)\times(-0,3)\times 7\times \mathrm{e}^{-0,3t}}{\left(1+7\,\mathrm{e}^{-0,3t}\right)^2} \\ &= \frac{1\,680\,\mathrm{e}^{-0,3t}}{\left(1+7\,\mathrm{e}^{-0,3t}\right)^2} \end{aligned}$$

b. Pour tout t appartenant à $[0\,;\,+\infty[$, $f'(t)$ est strictement positif comme quotient de nombres strictement positifs. Ainsi f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	
Variations de f	100	800

3. f étant continue strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, les solutions de l'inéquation $f(t) > 500$ est l'intervalle $]t_1\ ;\ +\infty[$ où t_1 est le nombre tel que $f(t_1) = 500$.
On détermine l'antécédent de 500 par la fonction f :

$$\begin{aligned}
f(t) = 500 &\iff \frac{800}{1+7\,\mathrm{e}^{-0,3t}} = 500\\
&\iff 800 = \left(1+7\,\mathrm{e}^{-0,3t}\right)500\\
&\iff 300 = 3\,500\,\mathrm{e}^{-0,3t}\\
&\iff \mathrm{e}^{0,3t} = \frac{35}{3}\\
&\iff \ln\left(\mathrm{e}^{0,3t}\right) = \ln\left(\frac{35}{3}\right)\\
&\iff 0,3t = \ln(35) - ln(3)\\
&\iff t = \frac{\ln(35) - ln(3)}{0,3}
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de $f(t) > 500$ est l'intervalle :

$$\left]\frac{\ln(35) - \ln(3)}{0,3}\ ;\ +\infty\right[$$

4. a.

$$F(t) = \frac{8\,000}{3} \times \ln\left(\mathrm{e}^{0,3t} + 7\right)$$

On calcule l'expression de la dérivée de F :
Pour tout t appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$,

$$F'(t) = \frac{8\,000}{3} \times \frac{0,3\,\mathrm{e}^{0,3t}}{\mathrm{e}^{0,3t}+7} = 800 \times \frac{\mathrm{e}^{0,3t}\,\mathrm{e}^{-0,3t}}{\mathrm{e}^{0,3t}\,\mathrm{e}^{-0,3t} + 7\,\mathrm{e}^{-0,3t}} = 800 \times \frac{1}{1+7\,\mathrm{e}^{-0,3t}} = f(t)$$

F est bien une primitive de f.

b.

$$\begin{aligned}\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t &= F(10)-F(0)\\ &= \frac{8\,000}{3}\times\ln\left(\mathrm{e}^3+7\right)-\frac{8\,000}{3}\times\ln\left(\mathrm{e}^0+7\right)\\ &= \frac{8\,000}{3}\left(\ln\left(\mathrm{e}^3+7\right)-\ln(8)\right)\\ &= \frac{8\,000}{3}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^3+7}{8}\right)\end{aligned}$$

5. On admet que la fonction f' est dérivable sur l'intervalle $[O\,;\,+\infty[$ et que sa fonction dérivée f'' est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f''(t)=\frac{504\,\mathrm{e}^{-0,3t}\left(7\,\mathrm{e}^{-0,3t}-1\right)}{\left(1+7\,\mathrm{e}^{-0,3t}\right)^2}$$

f est convexe sur l'intervalle où f'' est à valeurs positives et concave sur l'intervalle où f'' est à valeurs négatives.
On détermine le signe de $f''(t)$ pour $t\in[0\,;\,+\infty[$:
Pour tout $t\in[0\,;\,+\infty[$, $\dfrac{504\,\mathrm{e}^{-0,3t}}{\left(1+7\,\mathrm{e}^{-0,3t}\right)^2}>0$ comme quotient de nombres positifs. Pour tout $t\in[0\,;\,+\infty[$, le signe de $f''(t)$ est donc celui de $7\,\mathrm{e}^{-0,3t}-1$.

$$\begin{aligned}7e^{-0,3t}-1\geqslant 0 &\iff 7e^{-0,3t}\geqslant 1\\ &\iff e^{-0,3t}\geqslant\frac{1}{7}\\ &\iff -0,3t\geqslant\ln\left(\frac{1}{7}\right)\\ &\iff -0,3t\geqslant-\ln(7)\\ &\iff t\leqslant\frac{1}{0,3}\ln(7)\\ &\iff t\leqslant\frac{10}{3}\ln(7)\end{aligned}$$

Pour tout $t\in\left[0\,;\,\dfrac{10}{3}\ln(7)\right]$, $f''(t)\geqslant 0$ et donc f est convexe sur $\left[0\,;\,\dfrac{10}{3}\ln(7)\right]$.
Pour tout $t\in\left[\dfrac{10}{3}\ln(7)\,;\,+\infty\right[$, $f''(t)\leqslant 0$ et donc f est concave sur $\left[\dfrac{10}{3}\ln(7)\,;\,+\infty\right[$.

Partie B

1. D'après la réponse à la question 1 de la partie A, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=800$. La population suivant ce modèle se stabilise à 800 individus.

2. D'après la réponse à la question 3 de la partie A, $f(t)>500$ pour $t>\dfrac{\ln(35)-\ln(3)}{0,3}$.
$\dfrac{\ln(35)-\ln(3)}{0,3}\approx 8,189\,119\,242\,74$.
$2025+8=2033$. La population dépasse 500 individus au cours de l'année 2033.

3. La moyenne annuelle sur les 10 premières années est donnée de manière approchée par :

$$\frac{1}{10}\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{10}\times\frac{8\,000}{3}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^3+7}{8}\right) = \frac{800}{3}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^3+7}{8}\right) \approx 325 \text{ à l'unité près}$$

4. D'après ce modèle, la vitesse de croissance du nombre d'individus augmente pour les valeurs de t où f est convexe et diminue pour les valeurs de t où f est concave.

La vitesse de croissance cesse d'augmenter et diminue pour $t > \dfrac{10}{3}\ln(7)$.

$\dfrac{10}{3}\ln(7) \approx 6{,}486$.

Le directeur a tort : la vitesse de croissance commence à diminuer au cours de la septième année.

Exercice 2.

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $\quad f(x) = (3x-1)\,\mathrm{e}^{-x}+2$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

3. On note f' la fonction dérivée de f.

a. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $\quad f'(x) = (4-3x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de la dérivée et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

On notera α cette solution.

b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c. En déduire le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (-3x-2)\,\mathrm{e}^{-x}+2x$.

On admet que la fonction F est une primitive de f.

Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe de abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

5. On admet que la droite d'équation $y = 4x+1$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Vérifier que, pour tout réel x, $(3x-1)\,\mathrm{e}^{-x}+2 \leqslant 4x+1$.

Corrigé

1. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x-1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$,

par limite du produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, sous cette forme, on a donc une forme indéterminée.

Mais, pour tout x réel, on a : $\quad f(x) = (3x-1)\,\mathrm{e}^{-x}+2 = -3\big(-x\big)\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}+2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x\,\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} X\,\mathrm{e}^{X} = 0$, d'après la propriété des croissances comparées.

On obtient alors, par limite de la somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

3. a. On a, pour tout réel x : $f'(x) = 3\times \mathrm{e}^{-x} + (3x-1)\times(-\mathrm{e}^{-x})$.

Soit $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(3-(3x-1)\big) = (-3x+4)\,\mathrm{e}^{-x}$.

b. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc le signe de f' est le même que celui de $-3x+4$.

Or $-3x+4 \geqslant 0 \iff x \leqslant \dfrac{4}{3}$.

De plus, on a : $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = 3\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}} + 2$.

On obtient le tableau de variations

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variation de f	$-\infty$	↗	$3\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}+2$	↘	2

4. a. Sur l'intervalle $\left[\dfrac{4}{3};+\infty\right[$, la fonction f est strictement positive (elle est minorée par 2), donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.

Sur l'intervalle $\left]-\infty;\dfrac{4}{3}\right]$, la fonction f est dérivable donc continue. Elle est strictement croissante sur cet intervalle.

De plus, l'image de l'intervalle $\left]-\infty;\dfrac{4}{3}\right]$ est l'intervalle $\left]-\infty;3\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}+2\right]$ avec $3\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}+2 > 0$.

Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left]-\infty;\dfrac{4}{3}\right]$.

En conclusion, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

b. On sait que $\alpha \in \left]-\infty;\dfrac{4}{3}\right]$

La calculatrice permet d'obtenir :

$f(-1) \approx -8{,}87$ et $f(0) = 1$ donc $-1 < \alpha < 0$

$f(-0{,}3) \approx -0{,}56$ et $f(-0{,}2) \approx -0{,}046$ donc $-0{,}3 < \alpha < -0{,}2$

$f(-0{,}21) \approx -0{,}01$ et $f(-0{,}2) \approx -0{,}046$ donc $-0{,}21 < \alpha < -0{,}2$

$f(-0{,}209) \approx -0{,}005$ et $f(-0{,}208) \approx -0{,}0005$ donc $-0{,}209 < \alpha < -0{,}208$

On en déduit que $\alpha \approx -0{,}21$. (Remarque : on peut se contenter de donner la valeur approchée renvoyée par le mode « résolution d'équation » de la calculatrice).

c. Par lecture du tableau de variation, on obtient le tableau de signes suivant

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de f		$-$	0	$+$	

d. Sur l'intervalle $[0;2]$, la fonction f est positive donc l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe de abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=2$ est $\mathscr{A} = \int_0^2 f(x)dx$.

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^2 f(x)dx \\ &= \Big[F(x)\Big]_0^2 \\ &= F(2)-F(0) \\ &= -8\,\mathrm{e}^2+4+2 \\ &= 6-8\,\mathrm{e}^2\end{aligned}$$

L'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe de abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=2$ mesure $6-8\,\mathrm{e}^2$ unités d'aire.

5. On remarque que l'inéquation est : $f(x) \leqslant 4x+1$.

Graphiquement, cela correspond au fait que la courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0, et ce pour tout réel x : cela fait penser à étudier la convexité de la fonction f.

On va donc déterminer la dérivée seconde de f :

On a, pour tout x réel : $f''(x) = -3\,\mathrm{e}^{-x} + (-3x+4)\times\left(-\,\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(-3-(-3x+4)\right) - \mathrm{e}^{-x}(3x-7)$.

La dérivée seconde f'' est strictement négative quand $3x-7$ est strictement négatif soit sur $\left]-\infty;\frac{7}{3}\right[$.

On en déduit que sur $\left]-\infty;\frac{7}{3}\right[$, f est concave donc sa courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de toutes ses tangentes. En particulier, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0.

On a donc, pour tout $x \in \left]-\infty;\frac{7}{3}\right[$, $\quad (3x-1)\,\mathrm{e}^{-x}+2 \leqslant 4x+1$.

Sur $\left[\frac{7}{3};+\infty\right[$, la fonction $\quad x \longmapsto 4x+1 \quad$ est croissante donc $\quad 4x+1 \geqslant 4\times\frac{7}{3}+1 \quad$ soit $\quad 4x+1 \geqslant \frac{29}{3}$.

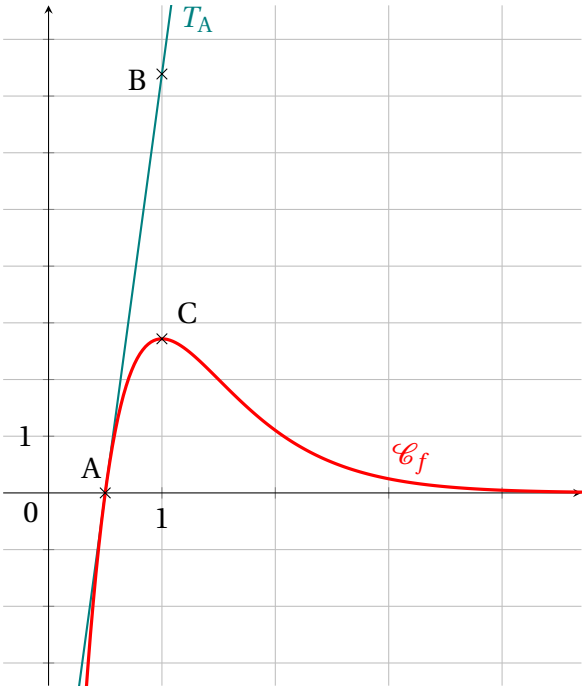
Sur $\left[\frac{7}{3};+\infty\right[$, la fonction f est décroissante donc $\quad f(x) \leqslant f\left(\frac{7}{3}\right) \quad$ or $f\left(\frac{7}{3}\right) \leqslant \frac{29}{3}$, $\quad$ d'après la concavité de f sur $\left]-\infty;\frac{7}{3}\right[$.

On en conclut que pour tout $x \in \left[\frac{7}{3};+\infty\right[$, $\quad f(x) \leqslant 4x+1$.

Exercice 3.

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ dont on donne ci-dessous une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.
On note f' sa fonction dérivée.



On précise que :

- la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point C d'abscisse 1 ;
- la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ passe par le point $B\left(1;e^2\right)$.

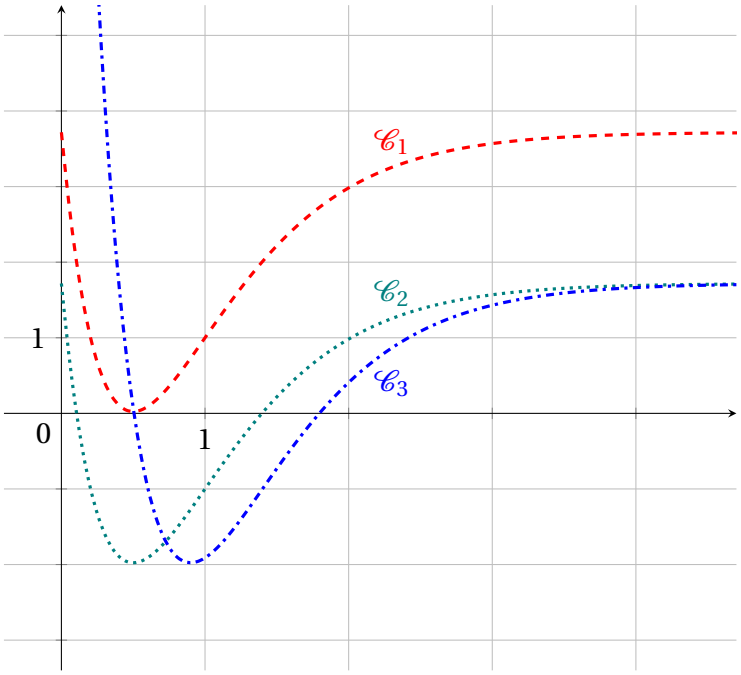
1. À l'aide du graphique ci-contre :

a. Donner $f'(1)$.

b. Donner la solution de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$.

2. Déterminer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. Parmi les trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ci-dessous, deux représentent des primitives de la fonction f.
Indiquer lesquelles et justifier.



Partie B

Un industriel doit créer un logo représentant la forme ci-contre (Fig. 1).
La dimension de 0,3 cm indiquée sur la figure est une contrainte imposée par le client.

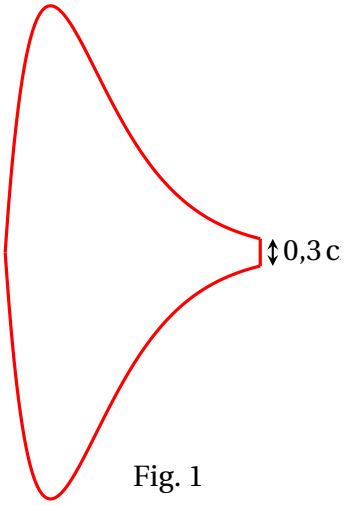


Fig. 1

L'industriel choisit de modéliser le contour de ce logo à l'aide d'une portion de la courbe de la fonction f vue en **partie A**, et de l'image de cette portion par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, sur un intervalle $[0,5;\alpha]$.
Le nombre α est un réel supérieur à 1 que l'on déterminera dans cette partie.

L'ensemble est représenté graphiquement dans un repère orthonormé (Fig. 2) d'unité 1 cm.
On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{-2x+3}.$$

1. **a.** Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$:

$$f(x) = \mathrm{e}^2 \times \frac{2x-1}{\mathrm{e}^{2x-1}}.$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.
(On pourra poser $X = 2x-1$).

2. **a.** Montrer que,
pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$,

$$f'(x) = (-4x+4)\,\mathrm{e}^{-2x+3}.$$

b. Construire le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

3. Justifier que la contrainte imposée par le client se traduit par l'égalité $f(\alpha) = 0,15$.
Montrer qu'il existe une unique valeur de α dans l'intervalle $[1;+\infty[$ qui permette de vérifier cette égalité.
En donner une valeur arrondie au dixième.

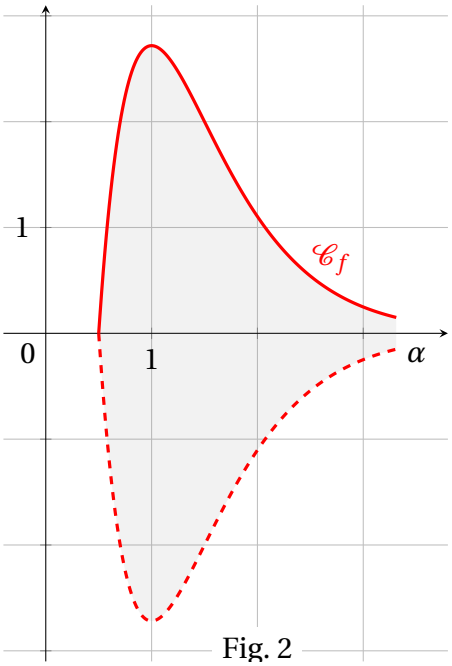


Fig. 2

Partie C

On fabrique un porte-clé en découpant une plaque d'acier suivant la forme du logo représenté par la surface grisée en figure 2 de la **partie B**.
On précise que cette plaque a une épaisseur de 0,2 cm.

1. On considère :

$$I = \int_{0,5}^{3,3} f(x)\,\mathrm{d}x$$

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale I arrondie au dixième est égale à 3,6.

2. On précise que le volume du porte-clé est égal à :

Aire du logo × *épaisseur de la plaque*

Déterminer le volume du porte-clé en cm^3, arrondi au dixième.

Corrigé

Partie A

1. a. Puisque la tangente à $\mathscr{C}_f$ en C (d'abscisse 1), est parallèle à l'axe des abscisses, c'est donc une droite dont le coefficient directeur est 0.
On peut donc affirmer : $f'(1) = 0$.

b. Sur l'intervalle [0;3], la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses (d'équation y = 0) une seule fois, au point A.
Comme l'abscisse de A est $\dfrac{1}{2}$, on en déduit que la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur [0;3] est $\dfrac{1}{2}$.

2. A est le point d'abscisse $\frac{1}{2}$ sur $\mathscr{C}_f$.

Par propriété, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ est donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.

La tangente T_A est aussi la droite (AB), d'après l'énoncé, donc son coefficient directeur est :

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{e^2 - 0}{1 - \frac{1}{2}} = 2e^2$.

On a donc : $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^2$.

3. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Graphiquement, cela se traduit par une courbe qui est l'image de l'autre par une translation d'un vecteur colinéaire au vecteur dirigeant l'axe des ordonnées (généralement le vecteur $\vec{j}$, mais il n'est pas nommé dans cet énoncé).

Ceci correspond aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_\epsilon$.

Remarque : On peut aussi procéder par élimination : la courbe $\mathscr{C}_3$ représente une fonction décroissante sur un intervalle englobant au moins $[0,5;0,7]$, quand la fonction f est positive sur l'intervalle $[0,5;0,7]$: une primitive de f devrait être croissante sur cet intervalle, ce que n'est pas la fonction représentée par $\mathscr{C}_3$.

Partie B

1. a. Soit x un réel strictement positif :

$f(x) = (2x-1)e^{-2x+3} = (2x-1)e^{-2x+1+2} = (2x-1)e^{-2x+1} \times e^2 = (2x-1) \times e^{-(2x-1)} \times e^2$

Finalement, on a bien : $f(x) = \frac{2x-1}{e^{2x-1}} \times e^2 = e^2 \frac{2x-1}{e^{2x-1}}$.

b. On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x-1 = +\infty$.

D'après la propriété des croissances comparées : $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, donc, par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{2x-1}}{2x-1} = +\infty$.

Donc, par limite du quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{e^{2x-1}} = 0$.

Enfin, par limite du produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^2 \frac{2x-1}{e^{2x-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Remarque : On peut donc dire que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

2. a. On va utiliser les formules pour dériver un produit et pour dériver une fonction composée, en prenant la forme de f qui est : $f(x) = (2x-1)e^{-2x+3}$.

$\forall x \in [0;+\infty[, \quad f'(x) = 2 \times e^{-2x+3} + (2x-1) \times \left(-2e^{-2x+3}\right) = \left(2 + (2x-1) \times (-2)\right) e^{-2x+3}$

$f'(x) = (2 - 4x + 2)e^{-2x+3} = (-4x+4)e^{-2x+3}$

On arrive bien à l'expression annoncée.

b. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, donc $f'(x)$ est du même signe que l'expression affine $(-4x+4)$, décroissante sur $\mathbb{R}$et s'annulant pour $x = 1$.

On en déduit que f changera de variation en $x = 1$.

Calculons : $f(0) = (2 \times 0 - 1)e^{-2 \times 0 + 3} = -e^3$, $f(1) = (2 \times 1 - 1)e^{-2 \times 1 + 3} = e$.

On peut donc construire le tableau de variations complet de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
signe de $-4x+4$		$+$	0	$-$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$-\mathrm{e}^3$	↗	e	↘	0

3. L'unité graphique du repère est le centimètre, donc une distance de 0,3 cm se traduit par une distance de 0,3 unité graphique.

Puisque cette distance est verticale, entre le point d'abscisse α sur la courbe, de coordonnées $(\alpha; f(\alpha))$ et le symétrique de ce point par rapport à l'axe des abscisses, c'est-à-dire le point de coordonnées $(\alpha; -f(\alpha))$, la distance entre les deux points est égale à : $2f(\alpha)$.

On doit donc avoir : $2f(\alpha) = 0,3 \iff f(\alpha) = 0,15$.

Sur $[1; +\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable), strictement décroissante, et le nombre$0,15$ est une valeur intermédiaire entre $f(1) = \mathrm{e} \approx 2,7$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

D'après le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones (aussi appelé théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 0,15$ admet une unique solution sur $[1; +\infty[$, qui est le nombre α.

Par exploration à la calculatrice, une valeur arrondie au dixième près de α est $\alpha \approx 3,3$.

Partie C

1. Posons u et v, les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} u(x) = (2x-1) \\ v(x) = \dfrac{-1}{2}\mathrm{e}^{-2x+3} \end{cases}$

Ces fonctions sont dérivables, et, sur le même intervalle : $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-2x+3} \end{cases}$

Ainsi, on reconnaît : $f(x) = u(x) \times v'(x)$.

Les fonctions u' et v' étant continues, on peut appliquer la formule d'intégration par parties :

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{0,5}^{3,3} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0,5}^{3,3} u(x)\times v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[u(x)\times v(x)\Big]_{0,5}^{3,3} - \int_{0,5}^{3,3} u'(x)\times v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[(2x-1)\times\frac{(-1)}{2}\,\mathrm{e}^{-2x+3}\right]_{0,5}^{3,3} - \int_{0,5}^{3,3} 2\times\frac{(-1)}{2}\,\mathrm{e}^{-2x+3}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\Big[(2x-1)\,\mathrm{e}^{-2x+3}\Big]_{0,5}^{3,3} - \int_{0,5}^{3,3} -\mathrm{e}^{-2x+3}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\Big[(2x-1)\,\mathrm{e}^{-2x+3}\Big]_{0,5}^{3,3} + \int_{0,5}^{3,3} \mathrm{e}^{-2x+3}\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\left((2\times 3,3-1)\,\mathrm{e}^{-2\times 3,3+3}\right) - (2\times 0,5-1)\,\mathrm{e}^{-2\times 0,5+3}\Big] + \left[\frac{-1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x+3}\right]_{0,5}^{3,3} \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\left(5,6\,\mathrm{e}^{-3,6}\right) - 0\times\mathrm{e}^{2}\Big] - \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-2\times 3,3+3} - \mathrm{e}^{-2\times 0,5+3}\right] \\
&= -2,8\,\mathrm{e}^{-3,6} - \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-3,6} - \mathrm{e}^{2}\right] \\
&= -2,8\,\mathrm{e}^{-3,6} - 0,5\,\mathrm{e}^{-3,6} + 0,5\,\mathrm{e}^{2} \\
&= 0,5\,\mathrm{e}^{2} - 3,3\,\mathrm{e}^{-3,6}
\end{aligned}
$$

Comme on a : $I = 0,5\,\mathrm{e}^{2} - 3,3\,\mathrm{e}^{-3,6} \approx 3,6$ au dixième près, on arrive bien à l'arrondi annoncé.

2. Sur l'intervalle $[0,5;3,3]$, la fonction f est continue et à valeurs positives, donc l'aire du domaine délimité par : la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 0,5$ et $x = 3,3$ est donnée par l'intégrale I, dont on a calculé une valeur approchée à la question précédente.

En doublant cette surface, cela revient à considérer un domaine deux fois plus grand, qui serait délimité par $\mathscr{C}_f$ et sa courbe symétrique par rapport à l'axe des abscisses, entre les abscisses 0,5 et 3,3.

Si on utilise l'approximation $\alpha \approx 3,3$, on peut donc considérer que $2I$ est une approximation de la surface grisée.

Ainsi le volume du porte-clé est proche de : $2I \times 0,2 \approx 2 \times 3,6 \times 0,2$.

On peut donc donner une valeur approchée de $1,44\,\mathrm{cm}^3$, soit, au dixième près $1,4\,\mathrm{cm}^3$.

Remarque : Ce qui suit n'était absolument pas attendu.

Ici, le calcul fait intervenir trois approximations :

- $\alpha \approx 3,3$;
- le fait que l'aire grisée est approchée par $2I$, quand on devrait avoir $2\displaystyle\int_{0,5}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$;
- et enfin le fait que I est proche de $3,6\,\mathrm{cm}^2$.

Sans rentrer dans le détail, ces approximations enchaînées ici permettent quand même d'avoir une valeur finale avec la précision requise.

Exercice 4.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$.
   Affirmation 1 : La limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^{x}$.
   Affirmation 2 : La fonction g est convexe sur l'intervalle $[-2\,;\,+\infty[$.
3. **Affirmation 3 :** Une intégration par parties permet d'obtenir :
$$\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = -\pi.$$
4. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y - 5$ et la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{5}{2}$.
   Affirmation 4 : La fonction h est la solution de (E) qui vaut 1 en 0.
5. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python :

```
def mystere(n):
    f = 1
    for k in range(1, n+1):
     f = f * k
  return f
```

   Affirmation 5 : Le nombre renvoyé lors de l'exécution de `mystere(5)` est 120.

Corrigé

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   Affirmation 1 : La limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$.

   D'après les croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$, autrement dit $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$.
   De plus on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.
   Par somme ; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   Affirmation 1 fausse

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{x}$.
   Affirmation 2 : La fonction g est convexe sur l'intervalle $[-2\,;\,+\infty[$.

   Pour déterminer la convexité de la fonction g, on étudie le signe de sa dérivée seconde g''.
   $g(x) = x\,\mathrm{e}^{x}$ donc $g'(x) = 1\times\mathrm{e}^{x} + x\times\mathrm{e}^{x} = (x+1)\,\mathrm{e}^{x}$
   $g''(x) = 1\times\mathrm{e}^{x} + (x+1)\times\mathrm{e}^{x} = (x+2)\,\mathrm{e}^{x}$
   Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} > 0$, et sur $]-2\,;\,+\infty[$, $x+2 > 0$.
   Donc $g'' > 0$ sur $]-2\,;\,+\infty[$, donc la fonction g est convexe sur cet intervalle.

   Affirmation 2 vraie

3. Affirmation 3 : Une intégration par parties permet d'obtenir : $\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = -\pi$.

Sur l'intervalle $]0\,;\,\pi[$, $\sin x > 0$ donc $x\sin x > 0$;
D'après les propriétés de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x > 0$.

Affirmation 3 fausse

4. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y - 5$ et la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} + \frac{5}{2}$.

Affirmation 4 : La fonction h est la solution de (E) qui vaut 1 en 0.

$h(x) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} + \frac{5}{2}$ donc $h'(x) = -\frac{3}{2} \times 2\mathrm{e}^{2x} = -3\mathrm{e}^{2x}$

- $2h(x) - 5 = 2\left(-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} + \frac{5}{2}\right) - 5 = -3\mathrm{e}^{2x} + 5 - 5 = -3\mathrm{e}^{2x} = h'(x)$
  Donc la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).
- $h(0) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{0} + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Affirmation 4 vraie

5. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python :

```
def mystere(n):
    f = 1
    for k in range(1, n+1):
        f = f * k
    return f
```

Affirmation 5 : Le nombre renvoyé lors de l'exécution de `mystere(5)` est 120.

On fait tourner cet algorithme : comme on lance `mystere(5)`, la variable `n` vaut 5 et on fait tourner la boucle `for` pour `k` variant entre 1 et 5.

n	1	2	3	4	5
f	$1\times 1 = 1$	$1\times 2 = 2$	$2\times 3 = 6$	$6\times 4 = 24$	$24\times 5 = 120$

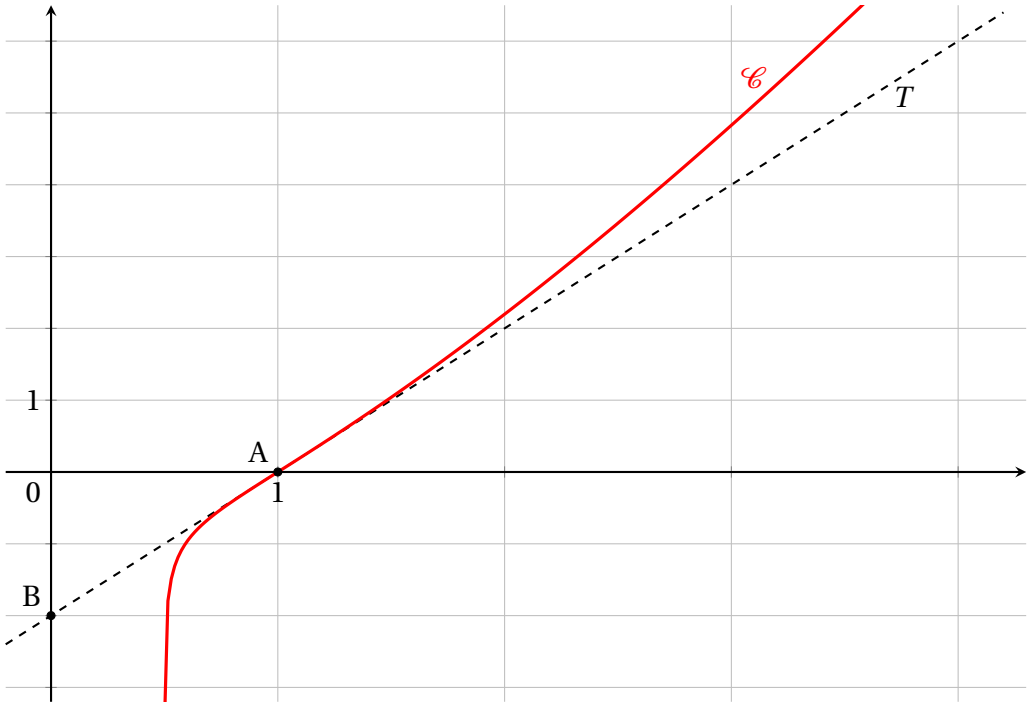
Pour `n=5` on obtient `f=120` ; la fonction `mystere` calcule la factorielle.

Affirmation 5 vraie

Exercice 5.

Partie A : lecture graphique

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.
On a tracé, dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction f, notée $\mathscr{C}$, ainsi que la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A(1 ; 0). On précise que T passe par le point B(0 ; -2).
On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.



1. Déterminer $f'(1)$.

2. La fonction f est-elle concave sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$?

3. Déterminer $f''(1)$.

Partie B : étude de fonction

On admet que la fonction représentée graphiquement dans la partie A est définie sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$f(x) = x\ln(2x-1)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On rappelle que :

- la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, que f' désigne sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde ;
- $\mathscr{C}$ désigne la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

1. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $\frac{1}{2}$. En déduire une interprétation graphique.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

3. On admet que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$:

$$f'(x) = \ln(2x-1) + \frac{2x}{2x-1}.$$

a. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$:

$$f''(x) = \frac{4(x-1)}{(2x-1)^2}.$$

b. Montrer que $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion et que ce point est l'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

4. a. Montrer que la fonction f est positive sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

b. On admet que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, on a :

$$\frac{x^2}{2x-1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{2}{2x-1}.$$

Montrer que :

$$\int_1^2 \frac{x^2}{2x-1}\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{8}\ln(3).$$

c. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

En vous aidant d'une intégration par parties, déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$ en unité d'aire.

Partie C : généralisation

On désigne par a un réel strictement positif et par f_a la fonction définie sur l'intervalle $\left]\frac{1}{a}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$f_a(x) = x\ln(ax-1).$$

On admet que f_a est deux fois dérivable sur l'intervalle $\left]\frac{1}{a}\,;\,+\infty\right[$. On note f_a' sa fonction dérivée, f_a'' sa fonction dérivée seconde, et $\mathscr{C}_a$ sa représentation graphique.

On admet que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{a}\,;\,+\infty\right[$:

$$f_a''(x) = \frac{a(ax-2)}{(ax-1)^2}.$$

1. Montrer que pour tout réel a strictement positif, la courbe $\mathscr{C}_a$ admet un unique point d'inflexion A_a.

2. Montrer que les points A_a sont alignés, a appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Corrigé

Partie A : lecture graphique

1. $f'(1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1, donc de la tangente T.

Le point B appartient à cette tangente donc : $f'(1) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2-0}{0-1} = 2$.

2. La courbe représentative de la fonction f semble au-dessus de la tangente T sur l'intervalle $]1;+\infty[$ or la courbe représentative d'une fonction concave est située en dessous de toutes ses tangentes.

La fonction f n'est donc pas concave sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

3. La courbe $\mathscr{C}$ semble traverser la tangente au point A, donc A semble être un point d'inflexion. Avec la précision de lecture permise par le graphique, on en déduit : $f''(1) = 0$.

Partie B : étude de fonction

1. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} 2x-1 = 0^+ \\ \lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} \ln(2x-1) = -\infty$.

De plus $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} x = \dfrac{1}{2}$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$.

Graphiquement, la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.

2. Résolvons l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x\ln(2x-1) = 0 \\ &\iff \ln(2x-1) = 0 \quad \text{car } x > 0 \text{ sur } \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\\ &\iff 2x-1 = 1 \\ &\iff 2x = 2 \\ &\iff x = 1. \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution : $x = 1$.

3. a. f' est de la forme $f = \ln(w) + \dfrac{u}{v}$, avec $\begin{cases} w(x) = 2x-1 \\ u(x) = 2x \\ v(x) = 2x-1 \end{cases}$. On a donc $\begin{cases} w'(x) = 2 \\ u'(x) = 2 \\ v'(x) = 2 \end{cases}$.

En appliquant les formules de dérivation, on sait que $f'' = \dfrac{w'}{w} + \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

Donc, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{2x-1} + \frac{2(2x-1) - 2\times 2x}{(2x-1)^2} = \frac{2(2x-1)+4x-2-4x}{(2x-1)^2} = \frac{4x-2-2}{(2x-1)^2} = \frac{4x-4}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{4(x-1)}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, on a bien : $f''(x) = \dfrac{4(x-1)}{(2x-1)^2}$.

b. Pour déterminer les abscisses des point d'inflexion de $\mathscr{C}$ étudions le signe de $f''(x)$.

Un carré étant toujours positif, $f''(x)$ est du signe de $x-1$.

On a donc :

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
signe de $(x-1)$	‖	$-$	0	$+$	
signe de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x=1$ donc le point d'abscisse 1 est l'unique point d'inflexion pour $\mathscr{C}$.

De plus, $f(1) = 1 \times \ln(2\times 1 - 1) = \ln(1) = 0$.

Le point d'inflexion a pour coordonnés $(1;0)$ et est donc l'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

4. a. $1 \leqslant x \leqslant 2 \iff 2 \leqslant 2x \leqslant 4$

$\iff 2-1 \leqslant 2x-1 \leqslant 4-1$

$\iff 1 \leqslant 2x-1 \leqslant 3$

$\iff \ln(1) \leqslant \ln(2x-1) \leqslant \ln(3)$ car la fonction ln est strictement croissante sur $[1;3]$

$\iff 0 \leqslant \ln(2x-1)$.

De plus $x > 0$ sur l'intervalle $[1;2]$ donc, par produit, $f(x) > 0$ sur l'intervalle $[1;2]$.

La fonction f est bien positive sur l'intervalle $[1;2]$.

b. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\times\frac{2}{2x-1}\right)\mathrm{d}x$

$\displaystyle= \left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\ln(2x-1)\right]_1^2$

$\displaystyle= \left(\frac{1}{4}\times 2^2 + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{8}\ln(2\times 2-1)\right) - \left(\frac{1}{4}\times 1^2 + \frac{1}{4}\times 1 + \frac{1}{8}\ln(2\times 1-1)\right)$

$\displaystyle= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\ln(3) - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\ln(1)$

$\displaystyle= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\ln(3) - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 0$

$\displaystyle= 1 + \frac{1}{8}\ln(3)$

On a bien : $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{2x-1}\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{8}\ln(3)$.

c. La fonction f étant positive et continue sur l'intervalle $[1;2]$, l'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$ est égale à $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 x\ln(2x-1)\,\mathrm{d}x$

$x \longmapsto x\ln(2x-1)$ est de la forme $u'v$ avec $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln(2x-1) \end{cases}$

Ce qui implique : $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ v'(x) = \frac{2}{2x-1} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $[1;2]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[1;2]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

d'où $\mathscr{A} = \left[\frac{1}{2}X^2\ln(2x-1)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2x-1}\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\times 4\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(1) - 1 - \frac{1}{8}\ln(3)$ d'après la question précédente

$= \frac{15}{8}\ln(3) - 1$

L'aire $\mathscr{A}$ est égale à $\frac{15}{8}\ln(3) - 1$ unité d'aire.

Partie C : généralisation

1. Étudions le signe de $f''(x)$.

$ax - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{a}$ et $a > 0$ donc :

x	$\frac{1}{a}$		$\frac{2}{a}$		$+\infty$
signe de a		$+$		$+$	
signe de $ax-2$		$-$	0	$+$	
signe de $(ax-1)^2$		$+$		$+$	
signe de $f_a''(x)$		$-$	0	$+$	

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour $x = \frac{2}{a}$.

De plus : $f_a\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{2}{a}\ln\left(a\times\frac{2}{a} - 1\right) = \frac{2}{a}\ln(1) = 0$.

Pour tout réel a strictement positif, la courbe $\mathscr{C}_a$ admet un unique point d'inflexion A_a de coordonnées $\left(\frac{2}{a};0\right)$

2. Les points A_a Pour tout réel a appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, les points A_a ont une ordonnée nulle, ils sont donc tous sur l'axe des abscisses et ils sont donc alignés.

Exercice 6.

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;2\pi]$ par :

$$g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0;2\pi]$ et on note g' sa dérivée.

a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;2\pi]$, on a :

$$g'(x) = -x\sin(x)$$

b. On donne le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0;2\pi]$ ci-dessous. Justifier chacun des éléments qui figurent dans ce tableau de variations.

x	0		π		2π
g	0	↘	$-\pi$	↗	2π

c. Montrer qu'il existe une unique valeur réelle α dans l'intervalle $[\pi;2\pi]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

d. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;2\pi]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;2\pi]$ et on note f' sa dérivée.

a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;2\pi]$ on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $]0;2\pi]$.

c. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;2\pi]$.

d. Déterminer la limite de f en 0. On pourra utiliser le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

3. On considère deux nombres réels r et s qui vérifient l'inégalité : $0 < r < s < \pi$.
Montrer que :

$$\frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}$$

Corrigé

1. **a.** On dérive les deux termes de g, l'un des deux étant un produit.

On rappelle les dérivées connues : $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

$\forall x \in [0;2\pi]$, $g'(x) = 1 \times \cos(x) + x \times \big(-\sin(x)\big) - \cos(x) = -x\sin(x)$.

b. Commençons par calculer les images de 0, π et 2π. On connaît les valeurs particulières des fonctions sinus et cosinus.

- $g(0) = 0 \times \cos(0) - \sin(0) = 0 \times 1 - 0 = 0$;
- $g(\pi) = \pi \times \cos(\pi) - \sin(\pi) = \pi \times (-1) - 0 = -\pi$;
- $g(2\pi) = 2\pi \times \cos(2\pi) - \sin(2\pi) = 2\pi \times 1 - 0 = 2\pi$.

Les trois images sont donc validées.

Étudions maintenant les variations de g.

- sur $[0;2\pi]$, $-x$ est négatif, et même strictement négatif sur $]0;2\pi]$;
- sur $[0;\pi]$, $\sin(x)$ est positif, et même strictement positif sur $]0;\pi[$ (c'est la moitié du cercle trigonométrique qui est au dessus de l'axe des abscisses, donc les sinus sont positifs) ;
- sur $[\pi;2\pi]$, $\sin(x)$ est négatif, et même strictement négatif sur $]\pi;2\pi[$ (c'est la moitié du cercle trigonométrique qui est en-dessous de l'axe des abscisses, donc les sinus sont négatifs).

On peut résumer cela avec un tableau de signes. Quand la dérivée est à valeurs négatives, la fonction est strictement décroissante (car la dérivée ne s'annule que ponctuellement), et quand la dérivée est à valeurs positives, la fonction est strictement croissante.

On a donc :

x	0		π		2π
signe de $-x$	0	$-$		$-$	
signe de $\sin(x)$	0	$+$	0	$-$	0
signe de $g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
variations de g	0	↘	$-\pi$	↗	2π

On a ainsi justifié chacun des éléments qui figurent dans ce tableau de variations.

c. La fonction g est continue (car dérivable) sur $[\pi;2\pi]$, sur cet intervalle, elle est strictement croissante.

De plus, 0 est une valeur intermédiaire entre $f(\pi) = -\pi$ et $f(2\pi) = 2\pi$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc une unique solution à l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $[0;2\pi]$, solution que l'on note α.

d. On peut étoffer le tableau de variations précédent avec α

x	0		π	α	2π
variations de g	0	↘	$-\pi$	0	↗ 2π

Sur $[0;\alpha]$, la fonction g est majorée par 0, elle est donc à valeurs négatives, puis sur $[\alpha;2\pi]$, elle est minorée par 0, et donc g est à valeurs positives.

On a donc le tableau de signes suivant :

x	0		α		2π
signe de $g(x)$	0	$-$	0	$+$	

2. **a.** On va utiliser la formule de dérivation d'un quotient :

$$\forall x \in]0;2\pi], \quad f'(x) = \frac{\cos(x)\times x - \sin(x)\times 1}{x^2} = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. La fonction f' est le quotient de la fonction g étudiée à la question **1.** par la fonction carré. On a donc :

x	0		α		2π
signe de $g(x)$	0	$-$	0	$+$	
signe de x^2	0	$+$		$+$	
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

c. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;2\pi]$.

d. Pour tout réel x non nul, le taux d'accroissement de la fonction sinus entre 0 et x est :

$$\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \frac{\sin(x)-0}{x} = \frac{\sin(x)}{x} = f(x)$$

Comme la fonction sinus est dérivable en 0, ce taux d'accroissement admet donc une limite finie quand x tend vers 0. Par définition du nombre dérivé, cette limite est le nombre dérivé de la fonction sinus en 0.

On a donc : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \sin'(0) = \cos(0) = 1$.

f tend vers 1 quand x tend vers 0.

3. On considère deux nombres réels r et s qui vérifient l'inégalité : $0 < r < s < \pi$.

Comme $\alpha \in [\pi;2\pi]$, on en déduit que : $\pi \leqslant \alpha$.

Donc les réels r et s sont dans un intervalle où la fonction f est strictement décroissante, et la fonction sinus à valeurs strictement positives :

$$\begin{aligned}
0 < r < s < \pi &\Longrightarrow f(r) > f(s) \\
&\Longrightarrow \frac{\sin(r)}{r} > \frac{\sin(s)}{s} \\
&\Longrightarrow \frac{\sin(r)}{r\times\sin(s)} > \frac{1}{s} \quad \text{car } s\in]0;\pi[\text{ donc } \sin(s)>0 \\
&\Longrightarrow \frac{\sin(r)}{\sin(s)} > \frac{r}{s} \quad \text{car } r\in]0;\pi[\text{ donc } r>0
\end{aligned}$$

On a bien établi, pour r et s vérifiant $0 < r < s < \pi$: $\dfrac{r}{s} < \dfrac{\sin(r)}{\sin(s)}$

Exercice 7.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}.$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la dérivée de la fonction f.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée.
Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1. Pour tout réel x, on a $f'(x) = (-2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$.

Affirmation 2. La fonction f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}.$$

Affirmation 3. La fonction f est convexe sur $]-\infty\,;\,1]$.

Affirmation 4. L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 5. L'aire du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\dfrac{1}{4} - \dfrac{3\mathrm{e}^{-2}}{4}$.

Corrigé

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x}$.
On admet que f est deux fois dérivable sur **R** et on note f' la dérivée de la fonction f.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Affirmation 1. Pour tout réel x, on a $f'(x) = (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$.
$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x}$ donc $f'(x) = 1\times\,\mathrm{e}^{-2x} + x\times(-2)\,\mathrm{e}^{-2x} = (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$.

Affirmation 1 vraie

Affirmation 2. La fonction f est une solution sur **R** de l'équation différentielle : $y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}$.
$f'(x) + 2f(x) = (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x} + 2x\,\mathrm{e}^{-2x} = -2x\,\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 2x\,\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}$

Affirmation 2 vraie

Affirmation 3. La fonction f est convexe sur $]-\infty\,;\,1]$.
$f'(x) = (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$ donc $f''(x) = (-2)\times\,\mathrm{e}^{-2x} + (-2x+1)\times(-2)\,\mathrm{e}^{-2x} = (4x-4)\,\mathrm{e}^{-2x}$.
On étudie le signe de $f''(x)$ sur **R**.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$4x-4$		$-$	0	$+$	
e^{-2x}		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe	

Affirmation 3 fausse

Affirmation 4. L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur **R**.
On détermine le signe de $f'(x) = (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$ sur **R**.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x+1$		$+$	0	$-$	
e^{-2x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Valeurs remarquables

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2\times\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1} > 0$
- $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{\mathrm{e}^{2x}}$; par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{\mathrm{e}^{2x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

On établit le tableau des variations de f sur **R**.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1}$	↘	0

- Sur l'intervalle $]-\infty;\frac{1}{2}]$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1} > 0$. Or $-1 \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1}\right]$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $]-\infty;\frac{1}{2}]$.
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, la fonction f est strictement positive donc l'équation $f(x) = -1$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

Donc l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur **R**.

Affirmation 4 vraie

Affirmation 5. L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\dfrac{1}{4} - \dfrac{3\,\mathrm{e}^{-2}}{4}$.

L'aire du domaine est égale à $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

On utilise une intégration par parties : $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-2x} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x} \end{cases}$

$$\mathscr{A} = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[x \times \left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x\,\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1$$
$$= \left[-\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2} - 0\right] - \left[\frac{\mathrm{e}^{-2}}{4} - \frac{\mathrm{e}^0}{4}\right] = \frac{1}{4} - \frac{3\,\mathrm{e}^{-2}}{4}$$

Affirmation 5 vraie

Exercice 8.

On munit le plan d'un repère orthonormé.
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et, pour } n \geqslant 1,\ f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geqslant 1$

On considère un entier naturel $n \geqslant 1$.

1. **a.** On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$f_n'(x) = (n-x)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}.$$

b. Justifier tous les éléments du tableau ci-dessous :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	↗	$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$	↘	0

2. Justifier par le calcul que le point $\mathrm{A}\left(1\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$.

Partie B : Étude des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \geqslant 0$

Dans cette partie, on étudie les fonctions f_n sur $[0;1]$ et on considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Sur le graphique en ANNEXE, on a représenté les courbes $\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_{10}$ et $\mathscr{C}_{100}$.

a. Donner une interprétation graphique de I_n.

b. Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2. Calculer I_0.

3. **a.** Soit n un entier naturel.
Démontrer que pour tout $x \in [0\,;\,1]$,

$$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n.$$

b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

4. Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera ℓ.

5. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

6. **a.** Démontrer que si $\ell > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.

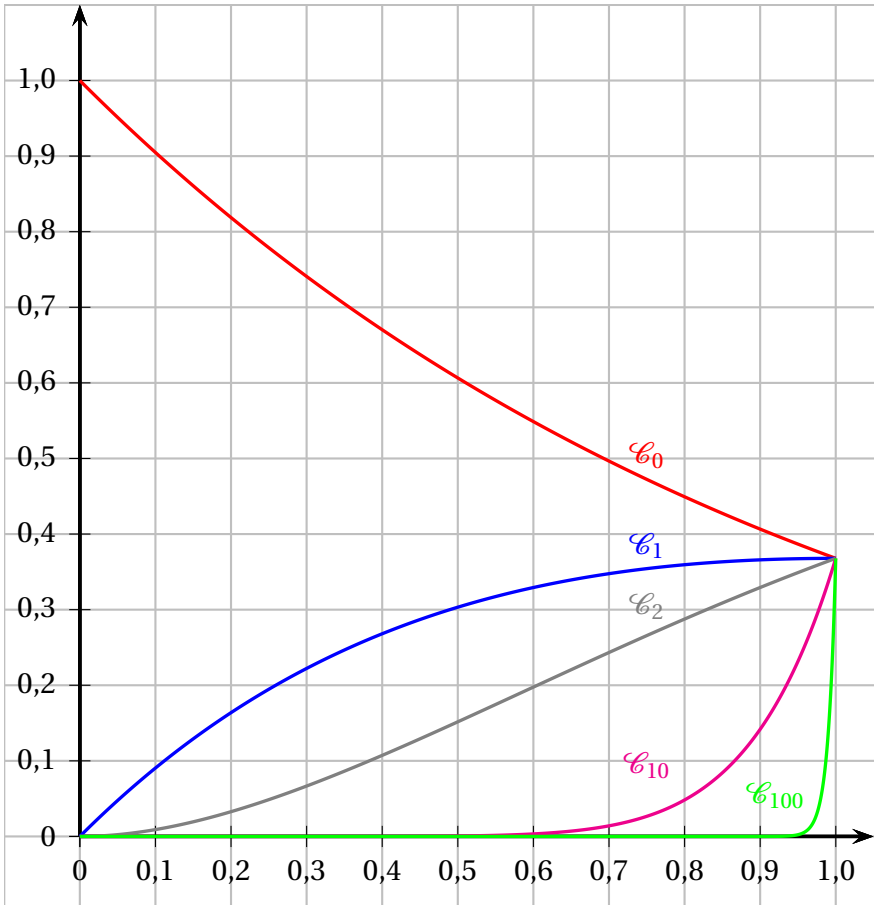
b. Démontrer que $\ell = 0$. On pourra utiliser la question 6. a.

On donne ci-dessous le script de la fonction `mystere`, écrite en langage Python.
On a importé la constante e.

```
def mystere(n):
  I = 1 - 1/e
  L = [I]
  for i in range(n):
      I = (i + 1)*I - 1/e
      L.append(I)
 return L
```

7. Que renvoie `mystere(100)` dans le contexte de l'exercice ?

ANNEXE : exercice 3



Corrigé

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geqslant 1$

1. **a.** On dérive un produit de deux fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$. Soit x un réel positif :

$$f_n'(x) = nx^{n-1} \times \mathrm{e}^{-x} + x^n \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \left(nx^{n-1} - x^n\right)\mathrm{e}^{-x}$$
$$= \left(n \times x^{n-1} - x \times x^{n-1}\right)\mathrm{e}^{-x} = \left(n-x\right)x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x} \quad .$$

b. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, donc

$\forall x \in [0;+\infty[, \quad \mathrm{e}^{-x} > 0$;

Sur $[0\ ;\ +\infty[$, x est donc positif, et donc x^{n-1} est positif aussi ;

Ainsi, $f_n'(x)$ est du signe du facteur $(n-x)$.

On a $\quad n - x > 0 \iff n > x, \quad$ donc c'est pour cela que l'on a bien $f_n'(x) > 0$ sur $[0\ ;\ n[$, de façon immédiate, $f_n'(n) = 0$ et, par élimination, $f_n'(x) < 0$ sur $]n\ ;\ +\infty[$.

Le signe de $f_n'(x)$ est donc justifié.

Par conséquent, on en déduit les variations de f_n : sur $[0\ ;\ n]$, f_n' est à valeurs positives, ne s'annulant que de façon isolée (pour $x = n$), donc f_n est strictement croissante sur $[0\ ;\ n]$.

Sur $[n\ ;\ +\infty[$, f_n' est à valeurs négatives, ne s'annulant que de façon isolée (pour $x = n$), donc f_n est strictement décroissante sur $[n\ ;\ +\infty[$.

On calcule les images de 0 et n par f_n :

- $f_n(0) = 0^n \times \mathrm{e}^{-0} = 0 \times 1 = 0$;

- $f_n(n) = n^n \times \mathrm{e}^{-n} = n^n \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^n} = \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$;

Enfin, calculons la limite de f_n quand x tend vers $+\infty$:

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[, \quad f_n(x) = x^n\,\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}}$

La propriété des croissances comparées dit que, pour tout n naturel non nul : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$;

Par limite du quotient, on en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}} = 0$.

La courbe $\mathscr{C}_n$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

On a ainsi justifié tous les éléments de ce tableau de variations.

2. Pour n entier naturel non nul, on a : $f_n(1) = 1^n \times \mathrm{e}^{-1} = 1 \times \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1}$.
Cela confirme que la courbe $\mathscr{C}_n$ contient bien le point $\mathrm{A}\left(1\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right)$.

Partie B : Étude des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \geqslant 0$

1. **a.** La fonction f_0 est à valeurs positives sur $[0;1]$, donc I_0 correspond à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par : la courbe $\mathscr{C}_0$, l'axe des abscisses, et les deux droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

b. De la même façon, chaque intégrale I_n est la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses, et les deux droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Graphiquement, on conjecture que chacune de ces surface est incluse dans celles correspondant à un entier n plus petit, donc les aires sont de plus en plus petites, et la suite (I_n) semble décroître, en étant minorée par 0, la suite serait convergente, vers une limite positive, proche de 0, ou vers 0, en effet, l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_{100}$ est déjà très faible.

2. On a : $\displaystyle I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1$
$= \left(-\mathrm{e}^{-1}\right) - \left(-\mathrm{e}^{-0}\right) = -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^0$
$= 1 - \mathrm{e}^{-1}$

3. **a.** Soit n un entier naturel.
$x \in [0\,;\,1] \implies 0 \leqslant x \leqslant 1$
$\implies 0 \times x^n \leqslant x \times x^n \leqslant 1 \times x^n, \quad$ car $x^n \geqslant 0$
$\implies 0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$

On arrive bien à l'inégalité demandée.

b. Soient n un entier naturel et x un réel de $[0\,;\,1]$. En multipliant l'inégalité précédente par e^{-x}, qui est un nombre réel supérieur à zéro, il vient :
$0 \leqslant x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n\,\mathrm{e}^{-x}$ soit $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.

Comme on intègre entre 0 et 1, avec $0 < 1$, par positivité de l'intégrale, on en déduit :
$\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ soit $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.

4. D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel n, simultanément :

— $0 \leqslant I_n$, donc la suite (I_n) est minorée par 0 ;

— $I_{n+1} \leqslant I_n$, donc la suite (I_n) est décroissante ;

La suite étant décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente, vers une limite ℓ supérieure ou égale à 0.

5. Soit n un entier naturel n.

On pose : $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

Toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur $[0\,;1]$, on a :

$$I_{n+1} = \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u(x)\times v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big[u(x)\times v(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)\times v(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{formule d'intégration par parties}$$

$$= \Big[x^{n+1}\times\big(-\mathrm{e}^{-x}\big)\Big]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n\times\big(-\mathrm{e}^{-x}\big)\,\mathrm{d}x$$

$$= \big(-1^{n+1}\times\mathrm{e}^{-1}\big) - \big(-0^{n+1}\times\mathrm{e}^{-0}\big) + (n+1)\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité}$$

$$= (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}$$

On arrive bien à la relation de récurrence annoncée.

6. **a.** Supposons que la limite ℓ est supérieure à zéro.

Alors, par limite du produit, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_n = +\infty$

Puis par limite de la somme : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_n - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = +\infty$.

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = +\infty$, autrement dit, la suite de terme général I_{n+1} **diverge** vers $+\infty$.

Or la suite de terme général I_{n+1} a la même limite que la suite de terme général I_n, qui elle **converge** vers un réel positif ℓ (dont on peut dire qu'il est inférieur à $I_0 = 1-\mathrm{e}^{-1}$).

L'unicité de la limite est donc en contradiction avec ces résultats.

b. Dans la question précédente, on a fait une supposition non étayée : on a supposé $\ell > 0$. Cette supposition conduisant à une contradiction, cela démontre, par l'absurde que l'on a $\ell \leqslant 0$.

Comme on savait, depuis la question **4.**, que ℓ est un réel positif, on peut donc en déduire que l'on a : $\ell = 0$.

La suite (I_n) converge donc vers 0.

7. Ici, l'appel `mystère(100)` renvoie une liste (stockée dans la variable `L`) contenant les valeurs (approchées) des 101 premiers termes de la suite, de I_0 à I_{100}.

En effet, I est initialisée (ligne 2) à la valeur I_0, puis L est initialisée (ligne 3) en tant que liste contenant la valeur I_0.

Ensuite, on rentre dans un boucle à `n` = 100 répétitions (pour `i` allant de 0 à 99), et dans chaque exécution, la variable `I` est mise à jour (ligne 5) en utilisant la relation de récurrence de la suite (I_n), donc passe de la valeur d'un terme à la valeur du terme suivant dans la suite (I_n). Cette nouvelle valeur est ensuite ajoutée à la fin de la liste `L` (ligne 7).

En sortie de boucle, on a donc appliqué 100 fois la relation de récurrence, donc la variable `I` contient bien la valeur (approchée de) $I_{0+100} = I_{100}$, qui a été la dernière ajoutée à la liste `L`.

Remarque ⚠

Si on fait effectivement tourner le script Python donné dans l'énoncé, les résultats sont manifestement faux à partir de $n = 18$ puisque les valeurs trouvées deviennent négatives !
Les calculs se font avec une valeur approchée de e et les erreurs se cumulent assez rapidement.
Les calculs effectués sur tableur ne donnent pas de meilleurs résultats.
En revanche, si on calcule les aires sous la courbe avec GeoGebra, les résultats semblent corrects, et la suite des intégrales tend effectivement vers 0.

Exercice 9.

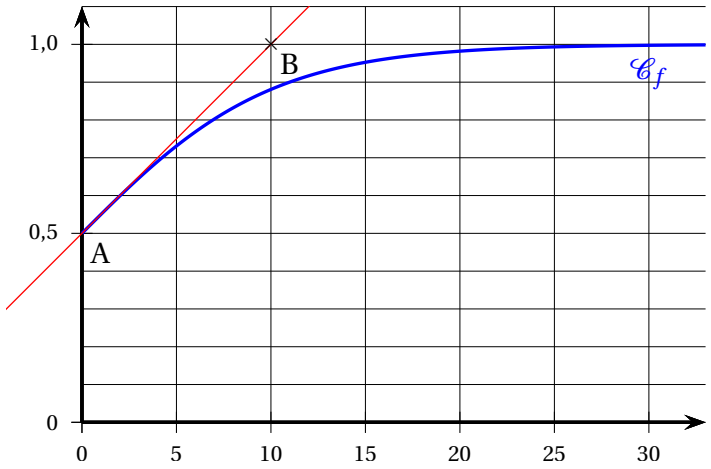
Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{a + \mathrm{e}^{-bx}}$$

où a et b sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
La fonction f admet pour représentation graphique la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous :



On considère les points A(0 ; 0,5) et B(10 ; 1).
On admet que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée de $f(10)$.
2. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
   Donner une interprétation graphique de ce résultat.
3. Justifier que $a = 1$.
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
5. **a.** Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de la constante b.
   b. En déduire la valeur de b.

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0,97$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel α par deux nombres entiers consécutifs.

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Partie C

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;40]$, c'est-à-dire :

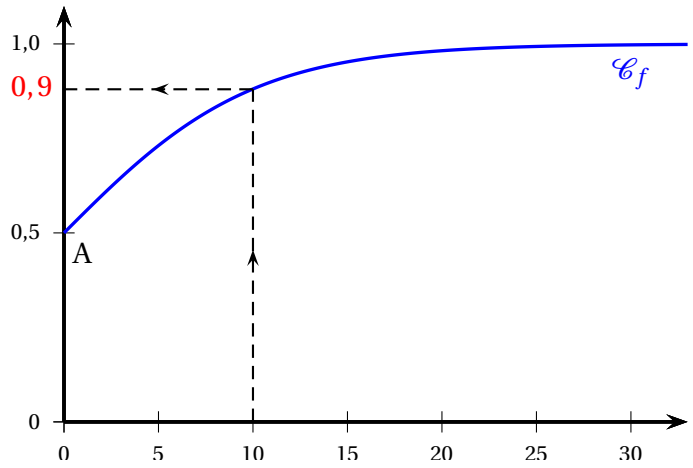
$$I = \frac{1}{40}\int_0^{40} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}\,\mathrm{d}x.$$

On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.

Corrigé

Partie A

1. 1970 - 1960 = 10. Donc on lit $f(10)$.



   Dans la limite de précision du graphique, $f(10) \approx 0,9$.
2. Si $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 1$ alors $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.
3. $f(0) = \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{a+1} = \dfrac{1}{2} \iff a+1 = 2 \iff a = 1$.

4. Soit m ce coefficient directeur. $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0,5}{10} = 0,05$.

5. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$. $f(t)$ est de la forme $\dfrac{1}{u(t)}$, de dérivée $-\dfrac{u'(t)}{u^2(t)}$ Donc en posant $u(t) = a + \mathrm{e}^{-bt}$, $u'(t) = -b\mathrm{e}^{-bt}$

Donc $\forall\, t \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = -\dfrac{-b\mathrm{e}^{-bt}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bt}\right)^2} = \dfrac{b\mathrm{e}^{-bt}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bt}\right)^2}$.

b. Le nombre dérivée de f en 0 est égale à la pente de la droite (AB), tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. Donc $f'(0) = 0,05$ donc $\dfrac{b}{2^2} = 0,05$ donc $b = 4 \times 0,05 = 0,2$.

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que le taux d'équipement en réfrigérateurs est représenté par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(t) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2t}}$.

1. $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,2t} = 0$ (par composition). Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 1$.

2. La fonction f est continue et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, de la forme $\dfrac{1}{u(t)}$, de dérivée $-\dfrac{u'(t)}{u^2(t)}$.

Donc en posant $u(t) = 1 + \mathrm{e}^{-0,2t}$, $u'(t) = -0,2\mathrm{e}^{-0,2t}$, $\forall\, t \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = -\dfrac{-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2}$ soit $f'(t) = \dfrac{0,2\mathrm{e}^{-0,2t}}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2}$.

$\forall\, t \in [0\,;\,+\infty[$, $0,2\mathrm{e}^{-0,2t} > 0$ et $\left(1+\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2 > 0$ donc $f'(t) > 0$ donc f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. On a $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 1$.

La fonction f est continue strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ à valeurs dans $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right[$. Or $0,97 \in \left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right[$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,97$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

4. Avec la calculatrice $\alpha \approx 17,4$ donc $\alpha \in]17\,;\,18[$.

Partie C

1. $\forall\, t \in [0\,;\,+\infty[$, $f(t) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2t}}$. En multipliant numérateur et dénominateur par $\mathrm{e}^{0,2t}$, on obtient : $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2t}}{\mathrm{e}^{0,2t}(1+\mathrm{e}^{-0,2t})} = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2t}}{\mathrm{e}^{0,2t}+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2t}}{1+\mathrm{e}^{0,2t}}$.

2. f est de la forme $\dfrac{u'(t)}{u(t)}$, de primitive $\ln(u(t))$ (avec u fonction strictement positive car les deux termes du quotient sont strictement positifs) en posant $u(t) = \mathrm{e}^{0,2t}$ et $u'(t) = 0,2\mathrm{e}^{0,2t}$.

En écrivant $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2t}}{1+\mathrm{e}^{0,2t}} = \dfrac{1}{0,2} \times \dfrac{0,2\mathrm{e}^{0,2t}}{1+\mathrm{e}^{0,2t}} = 5 \times \dfrac{0,2\mathrm{e}^{0,2t}}{1+\mathrm{e}^{0,2t}}$,

on détermine la fonction F, une primitive de f : $F(t) = 5\ln\left(1+\mathrm{e}^{0,2t}\right)$ pour $t \in [0\,;\,+\infty[$.

3. $I = \dfrac{1}{40}\displaystyle\int_0^{40} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2t}}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{40}\int_0^{40} \dfrac{\mathrm{e}^{0,2t}}{1+\mathrm{e}^{0,2t}}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{40}\left[5\ln\left(1+\mathrm{e}^{0,2t}\right)\right]_0^{40} =$
$\dfrac{5}{40}\left(\ln\left(\mathrm{e}^8+1\right)-\ln(2)\right)$
$= \dfrac{1}{8}\left(\ln\left(\mathrm{e}^8+1\right)-\ln(2)\right) = \dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^8+1}{2}\right) \approx 0,913$

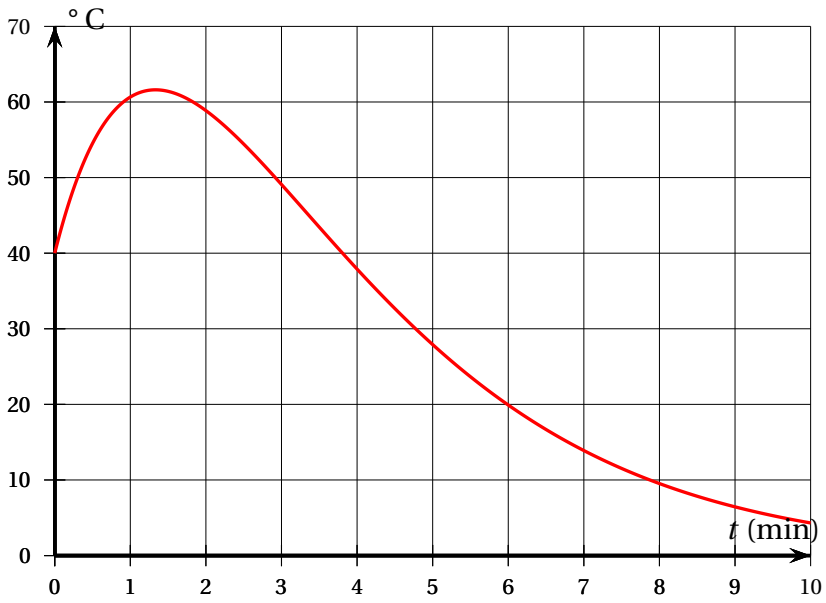
Exercice 10.

Dans un laboratoire, on étudie une réaction chimique dans un réacteur fermé, sous certaines conditions. Le traitement numérique des données expérimentales a permis de modéliser l'évolution de la température de cette réaction chimique en fonction du temps.
L'objectif de cet exercice est d'étudier cette modélisation.
La température est exprimée en degré Celsius et le temps est exprimé en minute.
Dans tout l'exercice, on se place sur l'intervalle de temps [0 ; 10].
Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un repère orthogonal du plan, on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction température en fonction du temps sur l'intervalle [0 ; 10].

1. Déterminer, par lecture graphique, au bout de combien de temps la température redescend à sa valeur initiale à l'instant $t = 0$.



On appelle f la fonction température représentée par la courbe ci-dessus.
On précise que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 10].
On admet que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(t) = (at+b)\mathrm{e}^{-0,5t}$ où a et b sont deux constantes réelles.

2. On admet que la valeur exacte de $f(0)$ est 40. En déduire la valeur de b.

3. On admet que f vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + 0,5y = 60\mathrm{e}^{-0,5t}$. Déterminer la valeur de a.

Partie B : Étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par

$$f(t) = (60t + 40)\mathrm{e}^{-0,5t}$$

1. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0;10]$, on a : $f'(t) = (40 - 30t)\mathrm{e}^{-0,5t}$.

2. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;10]$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les images des valeurs présentes dans le tableau.

b. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α strictement positive sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$.

c. Donner une valeur approchée de α au dixième près et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

3. On définit la température moyenne, exprimée en degré Celsius, de cette réaction chimique entre deux temps t_1 et t_2, exprimés en minute, par

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{dt}$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^4 f(t)\,\mathrm{dt} = 320 - \frac{800}{\mathrm{e}^2}$$

b. En déduire une valeur approchée, au degré Celsius près, de la température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes.

Corrigé
Partie A

1. Par lecture graphique : La température initiale est $f(0) = 40$ et on observe que la température redescend à cette valeur pour $t \approx 3,8$ minutes.

2. $f(t) = (at + b)e^{-0,5t}$ donc $f(0) = (a \times 0 + b) \times e^0 = b$ or $f(0) = 40$ donc $b = 40$.

3. f est dérivable sur $[0;10]$ comme produit de fonctions dérivables.
$f = uv$ avec $u(t) = at + b$ et $v(t) = e^{-0,5t}$ donc $f' = u'v + v'u$ avec $u'(t) = a$ et $v'(t) = -0,5e^{-0,5t}$ donc pour tout $t \in [0;10]$, $f'(t) = ae^{-0,5t} + (at + 40) \times \left(-0,5e^{-0,5t}\right) = (-0,5at + a - 20)\,e^{-0,5t}$
donc pour tout $t \in [0;10]$, $f'(t) + 0,5f(t) = (-0,5at + a - 20)\,e^{-0,5t} + 0,5(at + 40)e^{-0,5t} = ae^{-0,5t}$
f est solution de l'équation différentielle (E) donc $ae^{-0,5t} = 60e^{-0,5t} \Rightarrow a = 60$.

Partie B

1. Pour tout $t \in [0;10]$, $f'(t) = (-0,5at + a - 20)\,e^{-0,5t}$ avec $a = 60$ on obtient $f'(t) = (40 - 30t)e^{-0,5t}$

2. **a.** Pour tout $t \in [0;10]$, $e^{-0,5t} > 0$ donc $f'(t)$ a le même signe que $40-30t$.

$40-30t \geqslant 0 \iff -30t \geqslant -40 \iff t \leqslant \dfrac{4}{3}$ On en déduit le tableau de signes de $f'(t)$ et le tableau de variations de f sur $[0;10]$

y	0		$\frac{4}{3}$		10
Signes de $f'(t)$		+	0	−	
Variations de f	40	↗	$120e^{-\frac{2}{3}}$	↘	$640e^{-5}$

$f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \left(60 \times \dfrac{4}{3} + 40\right) e^{-0,5\times\frac{4}{3}} = 120e^{-\frac{2}{3}} \approx 61,6$; $f(0) = 40$ et $f(10) = 640e^{-5} \approx 4,31$

b. Sur $\left]0;\dfrac{4}{3}\right]$, $f(f) > 40$ donc l'équation $f(t) = 40$ n'a pas de solution.

$\left[\dfrac{4}{3};10\right]$: d'après les valeurs approchées calculées dans la question précédentes, $f(\frac{4}{3}) >$ 40 et $f(10) < 40$ donc $40 \in \left[\dfrac{4}{3};10\right]$

de plus f est continue (car dérivable) et strictement décroissante donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α dans $\left[\dfrac{4}{3};10\right]$

donc l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α strictement positive sur $[0;10]$ '

c. À l'aide de la calculatrice on trouve $\alpha \approx 3,8$

Interprétation : La température revient à sa valeur initiale de 40°C après environ 3,8 minutes.

3. **a.** $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^4 (60t+40)\mathrm{e}^{-0,5t}\mathrm{d}t.$

On pose $u(t) = 60t+40$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-0,5t}$ alors $u'(t) = 60$ et $v(t) = -2\mathrm{e}^{-0,5t}$.

les fonctions u et v sont dérivables et leurs fonctions dérivées sont continues donc d'après la formules d'intégration par parties :

$\displaystyle\int_0^4 (60t+40)\mathrm{e}^{-0,5t}\mathrm{d}t = \left[(60t+40)(-2\mathrm{e}^{-0,5t})\right]_0^4 - \int_0^4 -2\times 60\mathrm{e}^{-0,5t}\mathrm{d}t =$

$\left[(-120t-80)\mathrm{e}^{-0,5t}\right]_0^4 + 120\int_0^4 \mathrm{e}^{-0,5t}\mathrm{d}t = -560\mathrm{e}^{-2} + 80 + 120\left[-2\mathrm{e}^{-0,5t}\right]_0^4 =$

$-560\mathrm{e}^{-2} + 80 + 120(-2\mathrm{e}^{-2}+2) = -560e^{-2} + 80 - 240\mathrm{e}^{-2} + 240 = 320 - 800\mathrm{e}^{-2} = 320 - \dfrac{800}{\mathrm{e}^2}$

b. La température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes est :

$\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{4}\left(320 - \dfrac{800}{\mathrm{e}^2}\right) = 80 - \dfrac{200}{\mathrm{e}^2} \approx 52,9$

Donc la température moyenne est environ 53°C sur les 4 premières minutes.

Exercice 11.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

et on appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.
   a. Montrer que $g'(x)=f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}.$$

2. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   b. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.
   c. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.
4. On pose $I=\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   a. Calculer I.
   b. Interpréter graphiquement le résultat.
5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et que :

$$f''(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(x-3\sqrt{x}+3\right)}{8x^2\sqrt{x}}.$$

   a. En posant $X=\sqrt{x}$, montrer que $x-3\sqrt{x}+3>0$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Corrigé

On considère f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ et on appelle C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$
   a. La fonction g est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, donc $\forall x\in]0\,;\,+\infty[$,
   $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times\mathrm{e}^{\sqrt{x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}=f(x)$.
   b. La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, donc $\forall x\in]0\,;\,+\infty[$,
   $$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\times 2\sqrt{x}-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\times 2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2}=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x}=\frac{\frac{\sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x}=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}.$$

2. **a.** $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\sqrt{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2\sqrt{x} = 0$ avec $\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} > 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

b. Donc C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

3. **a.** D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^u}{u} = +\infty$ donc par composition de limites (en posant $u(x) = \sqrt{x}$) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^{\sqrt{x}} > 0$ et $4x\sqrt{x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $\sqrt{x} - 1$.
$\sqrt{x} - 1 \geqslant 0 \iff \sqrt{x} \geqslant 1 \iff x \geqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\dfrac{\mathrm{e}}{2}$	↗	$+\infty$

c. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ à valeurs dans $\left[\dfrac{\mathrm{e}}{2}\,;\,+\infty\right[$. Or $2 \in \left[\dfrac{\mathrm{e}}{2}\,;\,+\infty\right[$ (car $\dfrac{\mathrm{e}}{2} < 2$) donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution notée α dans $[1;+\infty[$.
À la calculatrice : $\alpha \approx 4,6$.

4. $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. $\forall x \in [1\,;\,2]$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$. En remarquant que la dérivée de la fonction g est la fonction f, donc g est une primitive de f.
Donc $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \big[g(x)\big]_1^2 = \left[\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right]_1^2 = \mathrm{e}^{\sqrt{2}} - \mathrm{e}$

b. L'aire du domaine $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$ est égale à $\mathrm{e}^{\sqrt{2}} - \mathrm{e}$.
I est donc l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

5. $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(x - 3\sqrt{x} + 3)}{8x^2\sqrt{x}}$

a. On pose $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $X = \sqrt{x}$.
$x - 3\sqrt{x} + 3 = X^2 - 3X + 3$.
$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$ donc $\forall X \in]0\,;\,+\infty[$, $X^2 - 3X + 3 > 0$ donc $\forall x \in]0;+\infty[$, $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$.

b. $\forall x \in]0;+\infty[$, $e^{\sqrt{x}} > 0$ et $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ et $8x^2\sqrt{x} > 0$ donc $f''(x) > 0$.
La fonction f est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 12.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x :

$$f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$$

4. Étudier la convexité de la fonction f.
5. Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
6. En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
   Donner un encadrement de α, au centième près.
8. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

Partie B : Calcul d'aire

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n.
2. **a.** Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n.
   b. Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé

Partie A : Étude de la fonction f

1. — Déterminons la limite quand x tend vers $-\infty$:

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x\left(\mathrm{e}^{-x}+2\right)-1.$

Avec $y=-x$, par composition, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{y\to+\infty} \mathrm{e}^{y} = +\infty.$

Donc, par limite de la somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}+2 = +\infty.$

Par limite du produit, il vient : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\mathrm{e}^{x}+2\right) = -\infty.$

Enfin, par limite de la somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\mathrm{e}^{-x}+2\right)-1 = -\infty.$

— Déterminons la limite quand x tend vers $+\infty$:

D'après la propriété des croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty.$

Par limite de l'inverse : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0.$

Par ailleurs, 2 étant positif : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1 = +\infty.$

Par limite de la somme on en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x}+2x-1 = +\infty.$

2. On a admis que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est la somme d'une fonction affine et d'un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a :

$f'(x) = 1\times\mathrm{e}^{-x} + x\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)+2 = (1-x)\mathrm{e}^{-x}+2.$

3. On a admis que f' est dérivable :

Pour tout réel x, on a :

$f''(x) = -1\times\mathrm{e}^{-x} + (1-x)\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)+0 = \left(-1-(1-x)\right)\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\mathrm{e}^{-x}.$

On arrive bien à l'expression annoncée.

4. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, donc $f''(x)$ est du signe de $(x-2)$.

— Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$, $(x-2)\leqslant 0$, donc f'' est à valeurs négatives et donc f est **concave** sur $]-\infty\,;\,2]$.

— Sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$, $(x-2)\geqslant 0$, donc f'' est à valeurs positives et donc f est **convexe** sur $[2\,;\,+\infty[$.

5. — Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$, f est concave, donc f' est décroissante.

— Sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$, f est convexe, donc f' est croissante.

f' atteindra donc un minimum pour $x=2$. On a :

$f'(2) = (1-2)\mathrm{e}^{-2}+2 = 2-\mathrm{e}^{-2}$

On peut donc établir le tableau de variations (sans limites, car non attendues ici) de f'.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'		↘	$2-\mathrm{e}^{-2}$	↗	

6. Comme on a $-2<0$, on en déduit, par croissance de la fonction exponentielle : $\quad \mathrm{e}^{-2} \leqslant \mathrm{e}^{0}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-2} \leqslant \mathrm{e}^{0} &\Longrightarrow \mathrm{e}^{-2} \leqslant 1 \\
&\Longrightarrow -\mathrm{e}^{-2} \geqslant -1 \quad \text{car } -1<0 \\
&\Longrightarrow 2-\mathrm{e}^{-2} \geqslant 2-1 \\
&\Longrightarrow 2-\mathrm{e}^{-2} \geqslant 1
\end{aligned}$$

Le minimum de f' est donc un réel supérieur à 1, donc strictement positif.

On en déduit que f' est donc une fonction à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, en conséquence, f est effectivement une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

7. f est une fonction **continue** (car dérivable) et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. De plus 0 est une **valeur intermédiaire** entre $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

En vertu du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, on en déduit qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha)=0$.

Par exploration à la calculatrice, on peut donner pour α l'encadrement au centième près suivant : $\quad 0{,}37<\alpha<0{,}38$.

8. Pour tout x réel, on a :

$f(x)-(2x-1)=x\mathrm{e}^{-x}$.

Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, on en déduit que cette différence entre l'ordonnée $f(x)$ d'un point sur C_f et celle $2x-1$ du point partageant la même abscisse sur Δ est du signe de x.

Sur $\mathbb{R}^-$, la différence est donc négative, et on en déduit que la courbe C_f est **au-dessous** de la droite Δ.

Sur $\mathbb{R}^+$, au contraire, la différence est positive, et donc la courbe C_f est **au-dessus** de la droite Δ.

Partie B : Calcul d'aire

1. Pour tout x réel, on pose : $\quad u'(x)=\mathrm{e}^{-x} \quad$ et $\quad v(x)=x$.

On a donc, pour tout x réel : $\quad v'(x)=1 \quad$ et, par exemple : $\quad u(x)=-\mathrm{e}^{-x}$.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_1^n x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^n v(x)\times u'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[u(x)\times v(x)\Big]_1^n - \int_1^n v'(x)\times u(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{c'est la formule d'intégration par parties} \\
&= \Big[-\mathrm{e}^{-x}\times x\Big]_1^n - \int_1^n 1\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(-n\mathrm{e}^{-n}\right)-\left(-\mathrm{e}^{-1}\right)+\int_1^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale.} \\
&= \mathrm{e}^{-1}-n\mathrm{e}^{-n}+\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_1^n \\
&= \mathrm{e}^{-1}-n\mathrm{e}^{-n}+\left(-\mathrm{e}^{-n}-\left(-\mathrm{e}^{-1}\right)\right) \\
&= 2\mathrm{e}^{-1}-(n+1)\mathrm{e}^{-n}
\end{aligned}$$

On arrive donc à l'expression : $\quad I_n=2\mathrm{e}^{-1}-(n+1)\mathrm{e}^{-n}$.

2. **a.** Le domaine décrit est donc situé entre la courbe C_f et la droite Δ, pour les abscisses comprises entre 1 et n. Le nombre n étant choisi entier naturel non nul, l'ensemble des abscisses concernées est donc inclus dans $\mathbb{R}^+$, où la courbe C_f est au-dessus de la droite Δ, d'après la question **A. 8.**, c'est-à-dire que :

$\forall x \in [1\,;\,n], \quad 2x-1 \leqslant f(x)$.

Pour obtenir l'aire de D_n, il faut donc intégrer la différence $f(x)-(2x-1)$, entre 1 et n (car $1 \leqslant n$).

Comme, pour tout x réel, on a : $f(x)-(2x-1) = xe^{-x}$, l'aire de D_n (exprimée en unité d'aire) est donc bien égale à I_n.

b. On a, pour tout n entier naturel : $I_n = 2e^{-1} - (n+1)e^{-n} = 2e^{-1} - ne^{-n} - e^{-n}$.

Avec le même raisonnement que celui tenu à la question **A. 1.**, on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-n} = 0$.

On a également : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e^n} = 0$.

On a donc, par limite de la somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 2e^{-1}$.

On est donc dans la situation d'un domaine dont le périmètre tend vers $+\infty$, puisqu'il s'étend sur une amplitude en abscisse qui tend vers $+\infty$, mais dont la surface reste majorée.

Exercice 13.

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ par

$$f(x) = e^x \sin(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. **a.** Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$,

$$f'(x) = e^x[\sin(x) + \cos(x)].$$

b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$

2. **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $e^x \sin(x) \geqslant x$.

3. Justifier que le point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

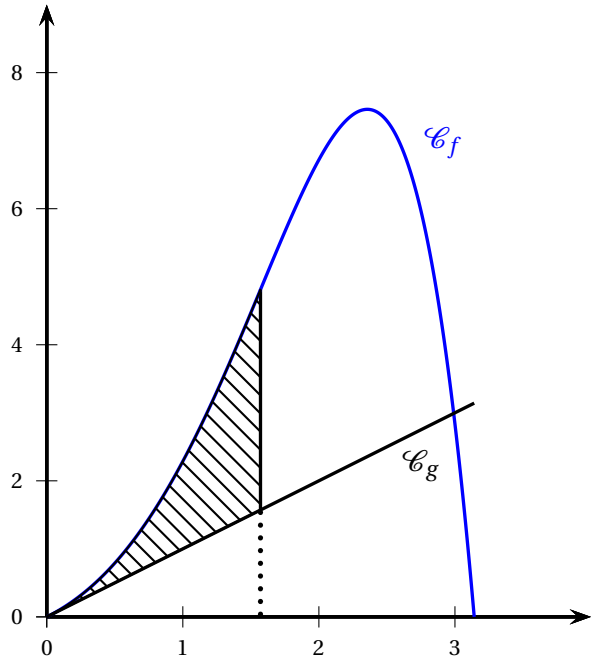
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

$$I = 1 + J \qquad \text{et} \qquad I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En déduire que $I = \dfrac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.
Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.



Corrigé

PARTIE A

1. **a.** Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$:
$f'(x) = \mathrm{e}^x \times \sin(x) + \mathrm{e}^x \times \cos(x) = \mathrm{e}^x\big(\sin(x) + \cos(x)\big)$.

b. Par connaissance des fonctions trigonométriques, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geqslant 0$ et $\sin(x) \geqslant 0$
On précise que d'une part, $\sin(x) = 0$ seulement pour $x = 0$, et $cos(0) = 1$, et d'autre part, $\cos(x) = 0$ seulement pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, donc les fonctions sinus et cosinus ne s'annulent pas en même temps.

La somme de deux réels positifs, dont l'un au moins est strictement positif est strictement positive, donc :

pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\quad \cos(x)+\sin(x)>0$.

D'autre part, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x>0$

donc pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\quad f'(x)>0$ en tant que produit de deux facteurs strictement positifs,

donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

2. **a.** L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est : $y=f'(0)(x-0)+f(0)=f'(0)x+f(0)$.

$f(0)=\mathrm{e}^0\sin(0)=1\times 0=0$; (donné dans l'énoncé)

$f'(0)=\mathrm{e}^0(\sin(0)+\cos(0))=1\times(0+1)=1$ (donné dans l'énoncé)

L'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donc $y=1x+0$ soit $y=x$.

b. En anticipant la question **3.**, on va étudier la convexité de la fonction sur $[0\,;\,\pi]$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\pi]$:

$f''(x)=\mathrm{e}^x(\sin(x)+\cos(x))+\mathrm{e}^x(\cos(x)-\sin(x))$

$=\mathrm{e}^x(\sin(x)+\cos(x)+\cos(x)-\sin(x))$.

$=2\mathrm{e}^x\cos(x)$

On a le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	

donc pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $f''(x)>0$

d'où la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

c. La courbe représentative d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier ici, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, d'équation $y=x$ (d'après la question précédente).

On a donc, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\quad \mathrm{e}^x\sin(x)\geqslant x$.

3. On a vu précédemment que la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en $x=\frac{\pi}{2}$ donc le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. $x\longmapsto \mathrm{e}^x\sin(x)$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x)=\mathrm{e}^x & \text{et} \quad u'(x)=\mathrm{e}^x \\ v'(x)=\sin(x) & \text{et} \quad v(x)=-\cos(x) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$

d'où $\displaystyle I = \Big[-\cos(x)\mathrm{e}^x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x(-\cos(x))\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + \cos(0)\mathrm{e}^0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

$= 0 + 1 + J$

$= 1 + J$

$x \longmapsto \mathrm{e}^x\sin(x)$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = \sin(x) & \text{et} \quad u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^x & \text{et} \quad v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties : $\displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$

d'où $\displaystyle I = \Big[\sin(x)\mathrm{e}^x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + \sin(0)\mathrm{e}^0 - J$

$= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J$

On a donc bien :

$$I = 1 + J \qquad \text{et} \qquad I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En ajoutant les deux équations précédentes on obtient : $2I = 1 + J + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J$.

d'où $\displaystyle I = \frac{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. D'après la question **Partie A 2.c.** pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^x\sin(x) \geqslant x$ c'est à dire $f(x) \geqslant g(x)$.

L'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$ est donc égale à l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{e}^x\sin(x) - x\right)\mathrm{d}x$.

$\displaystyle \mathscr{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{e}^x\sin(x) - x\right)\mathrm{d}x$

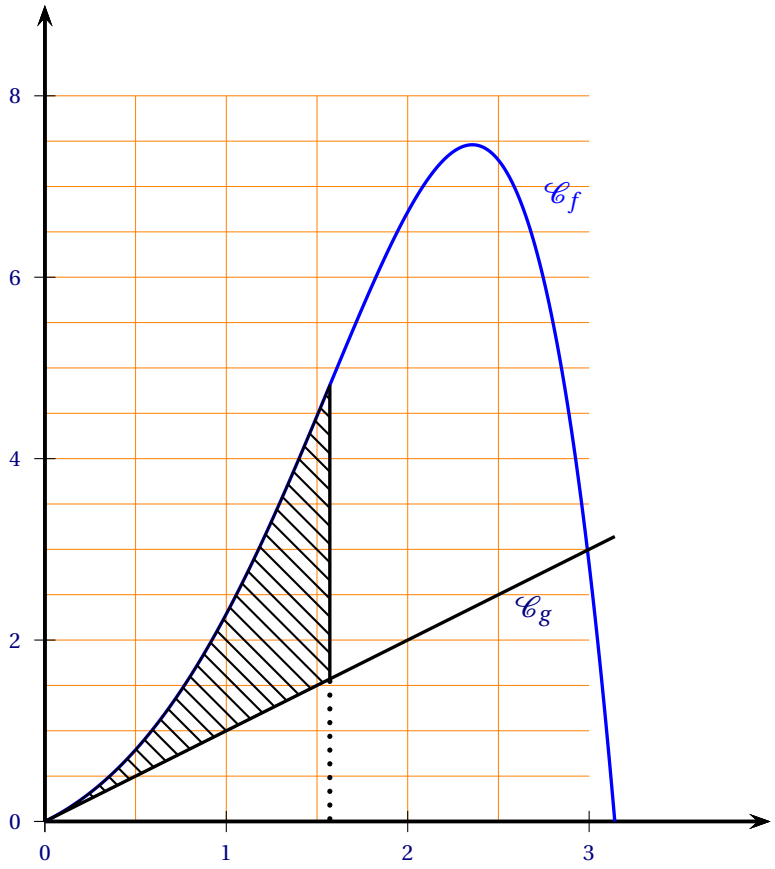
$\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale

$\displaystyle = I - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\displaystyle = \frac{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 0$

$\displaystyle = \frac{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\pi^2}{8}$

L'aire cherchée est donc $\dfrac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}-\dfrac{\pi^2}{8}$ u.a. ($\approx 1{,}67$ u. a.)



Exercice 14.

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\left(x^2-4\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que pour tout réel x, $f'(x)=\left(-x^2+2x+4\right)\mathrm{e}^{-x}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n=\displaystyle\int_{-2}^{0}x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

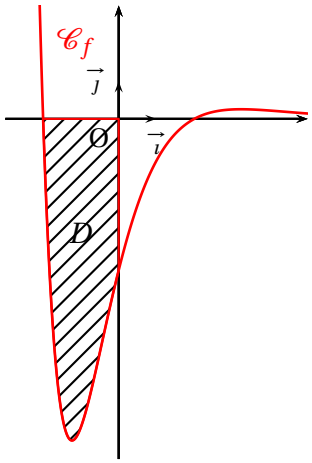
1. Justifier que $I_0 = \mathrm{e}^2 - 1$.
2. En utilisant une intégration par partie, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n.$$

3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2.

Partie 3

1. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie 1.
2. On a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.
   Le domaine D du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
   Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine D.



Corrigé

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 4\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Limites :
   - : en $-\infty$: de $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - 4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ on en déduit par produit de limites que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;
   - : en $+\infty$ $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} - 4\mathrm{e}^{-x}$: on sait que

   $\lim\limits_{x\to+\infty} 4\mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$ (puissances comparées), donc :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Sur cet intervalle :
   $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + \left(x^2-4\right)\times(-1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(2x - x^2 + 4) = \left(-x^2+2x+4\right)\mathrm{e}^{-x}$.
3. On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $-x^2+2x+4$.
   On a $-x^2+2x+4 = -\left(x^2-2x-4\right) = -\left[(x-1)^2 - 1 - 4\right] = -\left[(x-1)^2 - 5\right] =$
   $-x^2+2x+4 = -\left(x-1+\sqrt{5}\right)\left(x-1-\sqrt{5}\right)$: ce trinôme a deux racines $1-\sqrt{5}$ et $1+\sqrt{5}$.
   On sait que le trinôme a le signe de $a = -1$, donc est négatif sauf sur l'intervalle $\left[1-\sqrt{5}\,;\,1+\sqrt{5}\right]$ où il est positif.
   On a donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		0		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	$\approx -8,5$	↗	-4	↗	$\approx 0,25$	↘	0

On a $f\left(1-\sqrt{5}\right)=\left(2-2\sqrt{5}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}-1}\approx -8,5$;
$f\left(1+\sqrt{5}\right)=\left(2+2\sqrt{5}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}-+1}\approx 0,25$;
$f(0)=-4$

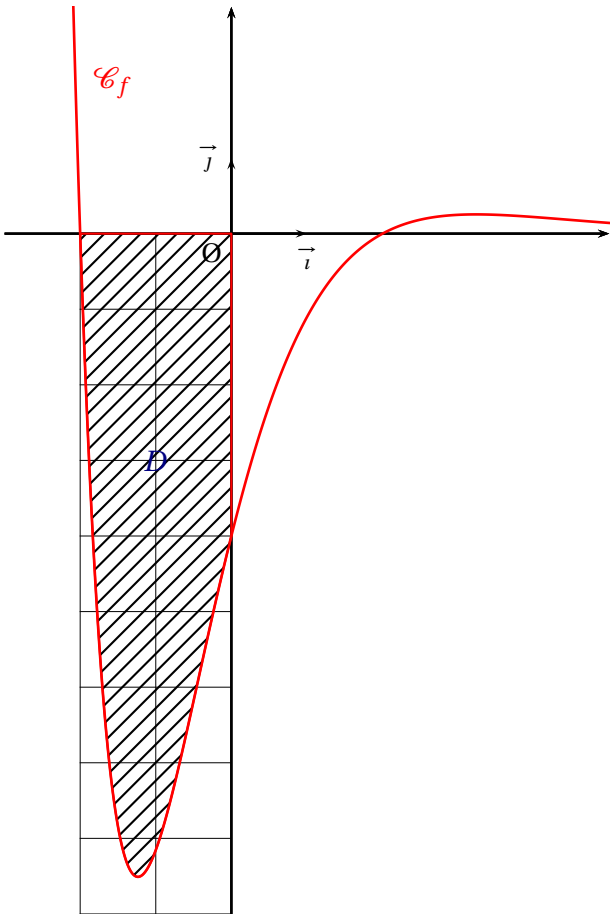
Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n=\displaystyle\int_{-2}^{0}x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. $I_0=\displaystyle\int_{-2}^{0}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{0}=-\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^2=\mathrm{e}^2-1$.
2. On calcule I_n en faisant une intégration par partie : on a
   $\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{-x} & u'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \\ v'(x) = x^n & v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$ on a
   $I_n=\left[\mathrm{e}^{-x}\times\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{-2}^{0}-\displaystyle\int_{-2}^{0}-\mathrm{e}^{-x}\frac{x^{n+1}}{n+1}=0-\frac{(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2}{n+1}+\frac{1}{n+1}\int_{-2}^{0}\mathrm{e}^{-x}x^{n+1}\,\mathrm{d}x=$
   $-\dfrac{(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2}{n+1}+\dfrac{I_{n+1}}{n+1}$,
   donc $I_n=-\dfrac{(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2}{n+1}+\dfrac{I_{n+1}}{n+1}$ et en multipliant chaque membre par $n+1$,
   $(n+1)I_n=-(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2+I_{n+1}\iff I_{n+1}=(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2+(n+1)I_n$.
   Rem. On peut aussi intégrer par partie I_{n+1}.
3. L'égalité précédente donne avec :
   • $n=0$: $I_1=(-2)^1\mathrm{e}^2+I_0=-2\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^2-1=-\mathrm{e}^2-1$,
   • $n=1$: $I_2=(-2)^2\mathrm{e}^2+I_1=4\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}^2-2=2\mathrm{e}^2-2$.

Partie 3

1. f a le signe du trinôme x^2-4 car quel que soit $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x}>0$.
   Comme $x^2-4=(x+2)(x-2)$ ce trinôme a le signe de $a=1$ donc est positif, sauf sur l'intervalle borné par les deux racines soit sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$ où $f'x)<0$.
   Donc sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$, $f(x)<0$ et sur $]-\infty\,;\,-2[\cup]2\,;\,+\infty[$, $f(x)>0$.
2. $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -2 t on vient de voir que sur l'intervalle $]-2\,,\,0[$, $f(x)<0$, donc l'aire S du domaine D est égale à l'opposé de l'intégrale de la fonction d de $x=-2$ à $x=0$.
   $\text{aire}(D)=-\displaystyle\int_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x=-\int_{-2}^{0}\left(x^2-4\right)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_{-2}^{0}x^2\mathrm{e}^{-x}+4\int_{-2}^{0}\mathrm{e}^{-x}=-I_2+4I_0=4\left(-\mathrm{e}^2-1\right)-\left(2\mathrm{e}^2-2\right)=2\mathrm{e}^2-2\approx 12,78$ (ce que l'on peut conforter avec la figure).



Exercice 15.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes

1. On considère le script écrit en langage Python ci-dessous.

```
def seuil(S) :
  n=0
  u=7
  while u < S :
      n=n+1
      u=1.05*u+3
  return(n)
```

Affirmation 1 : l'instruction `seuil(100)` renvoie la valeur 18.

2. Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n}.$$

Affirmation 2 : la suite (S_n) converge vers $\frac{5}{4}$.

3. **Affirmation 3** : dans une classe composée de 30 élèves, on peut former 870 binômes de délégués différents.
4. On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.
   Affirmation 4 : l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
5. **Affirmation 5** :

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}.$$

Corrigé

1. On considère le script écrit en langage Python ci-dessous.

```
def seuil(S) :
  n=0
  u=7
  while u < S :
      n=n+1
      u=1.05*u+3
  return(n)
```

   Affirmation 1 : l'instruction `seuil(100)` renvoie la valeur 18. **Vraie**
   En partant de 7 l'algorithme multiplie le nombre précédent par 1,05 et ajoute 3.
   On peut simuler ceci avec une simple calculatrice et on obtient en arrondissant au centième :

n	0	1	2	$\cdots$	17	18
u	7	10,35	13,87	$\cdots$	93,57	101,24

   10,35 est le premier résultat et 101,24 le 18e l'algorithme s'arrête au 19e passage.

2. Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n}.$$

   Affirmation 2 : la suite (S_n) converge vers $\frac{5}{4}$. **Vraie**
   On a la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{5}$.
   En écrivant sous la somme S la somme $\frac{1}{5}S$ décalée d'un rang vers la droite et en calculant la différence des deux lignes, on obtient :
   $S - \frac{1}{5}S = 1 - \frac{1}{5^{n+1}} \iff \frac{4}{5}S = 1 - \frac{1}{5^{n+1}} \iff S = \frac{5}{4}\left[1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right]$.
   Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{5^{n+1}} = 1$ et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} S = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

3. **Affirmation 3** : dans une classe composée de 30 élèves, on peut former 870 binômes de délégués différents. **Fausse**

   Le nombre de binômes différents est $\binom{30}{2} = \dfrac{30\times 29}{2} = 435$.

4. On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.

   Affirmation 4 : **Vraie** l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

   La fonction f est dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

   $f'(x) = (\ln x)^2 + x\times 2\times \dfrac{1}{x}\times \ln x = (\ln x)^2 + 2\ln x = \ln x\,(\ln x + 2)$.

   On sait que la fonction logarithme népérien est croissante et comme $\ln 1 = 0$ et $\ln 1 + 2 > 0$, $f'(x) \geqslant 0$.

   La fonction est donc croissante de $f(1) = 0$ à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires f ne peut prendre la valeur 1 qu'une seule fois.

5. **Affirmation 5** : **Vraie**

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}.$$

   Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ étant dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;\,1]$, on fait une intégration par parties :

   avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, on obtient : $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, d'où :

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = \left[-\mathrm{e}^{-x}(1+x)\right]_0^1$$
$$= -2\,\mathrm{e}^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$$

Exercice 16.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**Figure 2**).

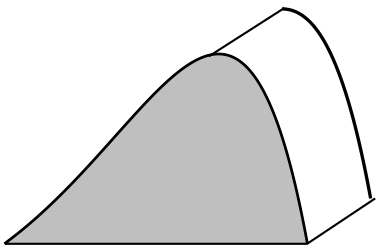


Figure 1

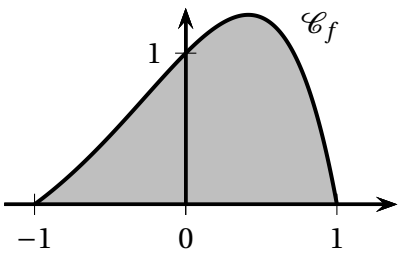


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = \left(1 - x^2\right)\mathrm{e}^x.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. **a.** Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ on a $f(x) \geqslant 0$.

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x.$$

2. Le volume $\mathscr{V}$ de chocolat, en cm^3, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathscr{V} = 3 \times S$$

où S est l'aire, en cm^2, de la surface colorée (**Figure 2**).

En déduire que ce volume $\mathscr{V}$, arrondi à $0,1$ cm^3 près, est égal à $4,4$ cm^3.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0,01\ ;\ +\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2[2 - 3\ln(q)] - 3.$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0,01\ ;\ +\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{q\to+\infty} B(q)$.

b. Montrer que, pour tout $q \geqslant 0,01$, $B'(q) = 8q(1 - 6\ln(q))$.

c. Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de B sur $[0,01\ ;\ +\infty[$.

Dresser le tableau de variation complet de la fonction B.

d. Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan ?

2. **a.** Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1,2\ ;\ +\infty[$.

Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

b. On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0,01\ ;\ 1,2[$.

On donne $\alpha \approx 0,757$.

En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.

Corrigé

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 1 cm (**Figure 2**).

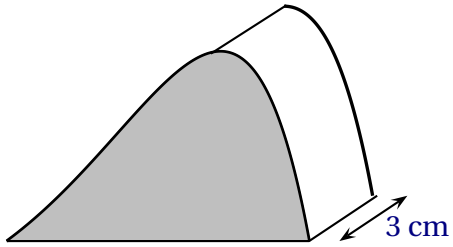


Figure 1

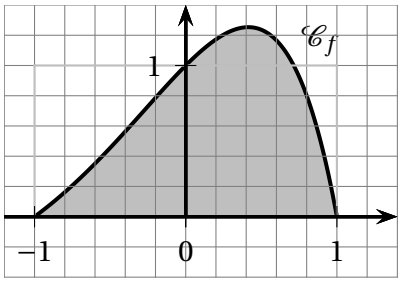


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par : $f(x) = \left(1-x^2\right)\mathrm{e}^x$.
L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. **a.** Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > 0$, et si $x \in [-1\ ;\ 1]$, on a $1-x^2 \geqslant 0$.
Donc pour tout x de $[-1\ ;\ 1]$, on a $f(x) \geqslant 0$.

b. Soit $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
On pose $u(x) = 1-x^2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Donc $u'(x) = -2x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
Par intégration par parties : $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.
Donc $I = \left[(1-x^2)\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{1} - \displaystyle\int_{-1}^{1}(-2x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 0 + 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

2. Le volume $\mathscr{V}$ de chocolat, en cm^3, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par : $\mathscr{V} = 3 \times S$ où S est l'aire, en cm^2, de la surface colorée (**Figure 2**).
On calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ par une intégration par parties.
On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

$$\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 1\times\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{1} - \left[\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{1} = \left[1\,\mathrm{e}^1 - (-1)\,\mathrm{e}^{-1}\right] - \left[\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}\right]$$
$$= \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} = 2\mathrm{e}^{-1}$$

Donc $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 4\mathrm{e}^{-1}$.
$\mathscr{V} = 3 \times S = 12\mathrm{e}^{-1}$ donc $\mathscr{V} \approx 4{,}4$ cm^3.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.
Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0,01\ ;\ +\infty[$ par : $B(q) = 8q^2[2-3\ln q]-3$.
Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.
On admet que la fonction B est dérivable sur $[0,01\ ;\ +\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1. **a.**
- $\lim\limits_{q\to+\infty} \ln q = +\infty$ donc $\lim\limits_{q\to+\infty} 2-3\ln q = -\infty$
- $\lim\limits_{q\to+\infty} q^2 = +\infty$
- Donc $\lim\limits_{q\to+\infty} 8q^2[2-3\ln(q)] = -\infty$ et donc $\lim\limits_{q\to+\infty} 8q^2[2-3\ln(q)]-3 = -\infty$

On a donc démontré que $\lim\limits_{q\to+\infty} B(q) = -\infty$.

b. Pour tout $q \geqslant 0,01$: $B'(q) = 8\times 2q\left(2-3\ln q\right) + 8q^2\left(0-\dfrac{3}{q}\right) - 0$

$$= 8q\left(4-6\ln q\right) + 8q\,(-3) = 8q\left(1-6\ln q\right)$$

c. $q>0$ donc $B'(q)$ est du signe de $1-6\ln q$.

$1-6\ln q > 0 \iff 1 > 6\ln q \iff \dfrac{1}{6} > \ln q \iff \mathrm{e}^{\frac{1}{6}} > q$

$\mathrm{e}^{\frac{1}{6}} \approx 1,2$: $B\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}\right) \approx 13,7$; $B(0,01) \approx -3$

On dresse le tableau de variation complet de la fonction B.

q	$0,01$		$\mathrm{e}^{\frac{1}{6}} \approx 1,2$		$+\infty$
$B'(q)$		$+$	0	$-$	
$B(q)$	≈ -3	↗	$\approx 13,7$	↘	$-\infty$

d. Le maximum de la fonction B est $B\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}\right) \approx 13,7$, donc le bénéfice maximum que peut espérer l'artisan est de 137 €.

2. **a.** Sur l'intervalle $[1,2\ ;\ +\infty[$:
- La fonction B est dérivable, donc continue, et strictement décroissante.
- Elle décroît de $13,7$ à $-\infty$.

Donc, d'après le corollaire des valeurs intermédiaires, l'équation $B(q) = 10$ admet une solution unique sur l'intervalle $[1,2\ ;\ +\infty[$. On l'appelle β.

$\left.\begin{array}{l} B(1) = 13 > 10 \\ B(2 \approx -5,5 < 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta \in [1\ ;\ 2]$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} B(1,5) \approx 11,1 > 10 \\ B(1,6 \approx 9,1 < 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta \in [1,5\ ;\ 1,6]$

$\left.\begin{array}{l} B(1,55) \approx 10,17 > 10 \\ B(1,56 \approx 9,97 < 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta \in [1,55\ ;\ 1,56]$

$\left.\begin{array}{l} B(1,558) \approx 10,007 > 10 \\ B(1,559 \approx 9,986 < 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta \in [1,558\ ;\ 1,559]$

Donc β a pour valeur approchée $1,558$ à 10^{-3} près.

b. On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0,01\ ;\ 1,2[$.
On donne $\alpha \approx 0,757$, et on complète le tableau de variation de B.

q	$0,01$	α	$1,2$	β	$+\infty$
$B(q)$	-3	10	$13,7$	10	$-\infty$

Pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros, le nombre minimal de bonbons au chocolat à vendre correspond à α centaines, soit environ 76, et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre correspond à β centaines, soit environ 156.

Exercice 17.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui comprend cinq questions. Les cinq questions sont indépendantes.
*Pour chacune des questions, **une seule des quatre réponses est exacte**. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.*
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

1. La solution f de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ telle que $f(0) = 1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

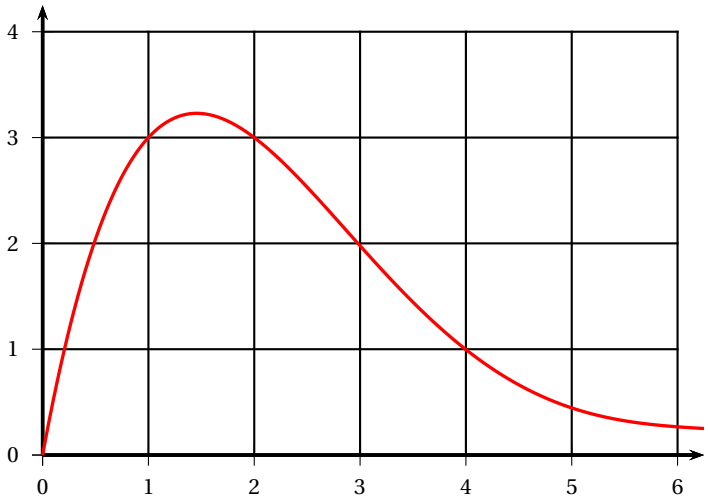
A. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$

B. $f(x) = -\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$

C. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$

D. $f(x) = -\dfrac{10}{3}\mathrm{e}^{-3x} - \dfrac{7}{3}$

2. La courbe d'une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ est donnée ci-dessous.



Un encadrement de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ est :

A. $0 \leqslant I \leqslant 4$
B. $1 \leqslant I \leqslant 5$
C. $5 \leqslant I \leqslant 10$
D. $10 \leqslant I \leqslant 15$

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 \ln\left(x^2+4\right)$.

Alors $\displaystyle\int_0^2 g'(x)\,\mathrm{d}x$ vaut, à 10^{-1} près :

A. 4,9
B. 8,3
C. 1,7
D. 7,5

4. Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale.

Elle veut former un groupe de 5 élèves. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe de 5 élèves ?

A. 31^5
B. $31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27$
C. $31+30+29+28+27$
D. $\binom{31}{5}$

5. La professeure s'intéresse maintenant à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe :

— 10 élèves ont choisi la spécialité physique-chimie ;
— 20 élèves ont choisi la spécialité SES ;
— 1 élève a choisi la spécialité LLCE espagnol.

Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe ?

A. $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$
B. $\binom{20}{3} + \binom{11}{2}$
C. $\binom{20}{3}$
D. $20^3 \times 11^2$

Corrigé

1. La solution f de l'équation différentielle $y' = -3y+7$ telle que $f(0) = 1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

A. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$
B. $f(x) = -\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$
C. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$
D. $f(x) = -\dfrac{10}{3}\mathrm{e}^{-3x} - \dfrac{7}{3}$

L'équation différentielle $y' = -3y$ a pour solutions les fonctions $x \longmapsto f(x) = K\mathrm{e}^{-3x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

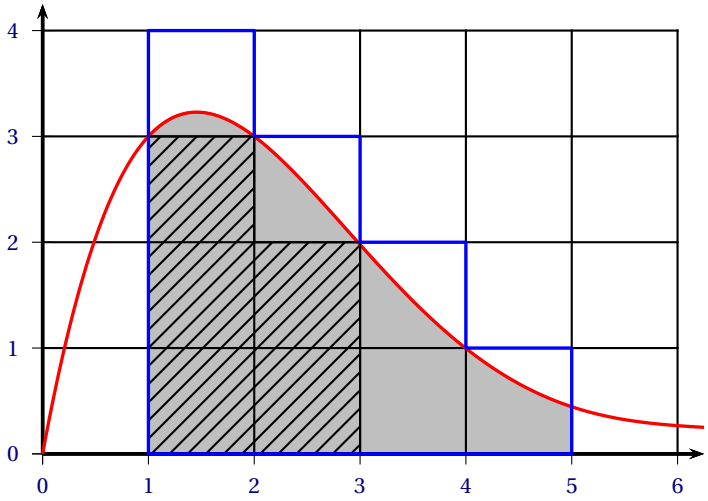
La fonction $x \longmapsto \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' = -3y+7$ si et seulement si $y' = 0 = -3\alpha + 7 \iff 3\alpha = 7 \iff \alpha = \dfrac{7}{3}$.

On sait qu'alors les solutions de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ sont les fonctions $x \longmapsto Ke^{-3x} + \dfrac{7}{3}$.

En particulier la fonction f solution telle que $f(0) = 1 \iff K + \dfrac{7}{3} = 1 \iff K = -\dfrac{4}{3}$.

La seule solution est donc la fonction définie par $f(x) = -\dfrac{4}{3}e^{-3x} + \dfrac{7}{3}$: réponse **B.**

2. La courbe d'une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ est donnée ci-dessous.



Le dessin est clair : la fonction est positive sur l'intervalle$[1\,;\,5]$; l'intégrale est (en unités d'aire) la mesure de la surface limitée par la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$.

La surface grise contient les 5 carreaux hachurés et est inscrite dans le polygone de 10 unités en bleu. Réponse **C.**

3. On sait que si g' est la dérivée de g, alors g est une primitive de la fonction g', donc :

$\displaystyle\int_0^2 g'(x)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 \ln\left(x^2+4\right)\right]_0^2 = 2^2 \ln\left(2^2+2\right) = 4\ln 4 + 4) = 4\ln 8$ ou $4\ln 2^3 = 3 \times 4\ln 2 = 12\ln 2 \approx 8{,}31$ soit 8,3 au dixième près. Réponse **B.**

4. Le nombre de groupes de 5 élèves parmi les 31 est $\binom{31}{5}$. Réponse : **D.**

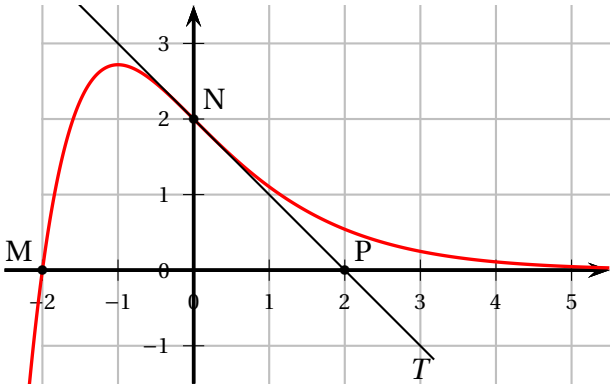
5. Elle choisit 3 élèves parmi les 20 faisant SES : elle a $\binom{20}{3}$ possibilités ; ensuite dans chacun de ces cas elle choisit 2 élèves parmi les $31 - 20 = 11$ élèves qui ne font pas SES, ce qui fait $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$ possibilités. Réponse **A.**

Exercice 18.

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.
Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point N(0 ; 2) ;
- le point M(−2 ; 0) appartenant à $\mathscr{C}_f$ et P(2 ; 0) appartenant à la tangente T.

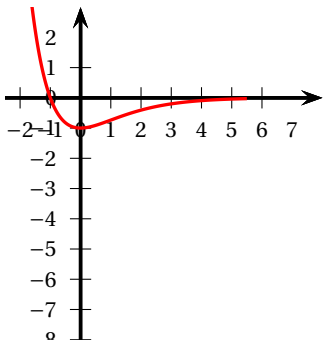
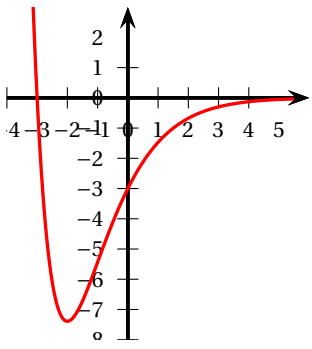
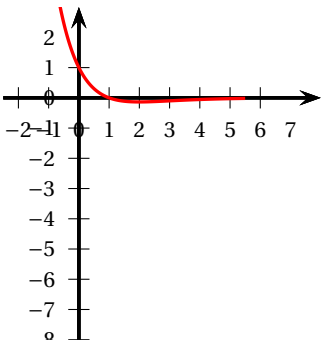
On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$.



Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. **a.** Donner $f(0)$.
   b. Déterminer $f'(0)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.

Courbe 1	Courbe 2	Courbe 3
		

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a, b et λ sont des constantes réelles.
Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.
2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.
3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. On admet que $f'(x) = (-x - 1)\,\mathrm{e}^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f. Justifier.
3. **a.** Étudier la convexité de f.
   b. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
4. Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, on pose :

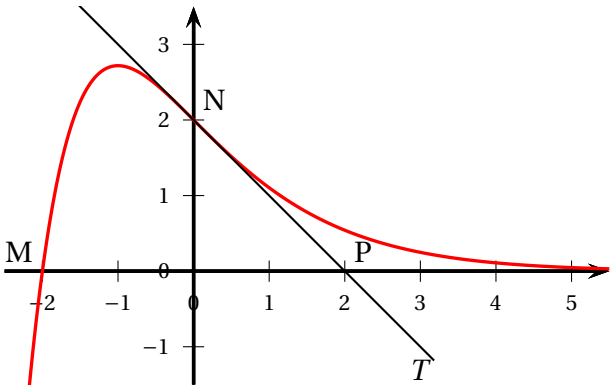
$$I(t) = \int_{-2}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   a. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I(t) = (-t - 3)\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2}.$$

   b. En déduire un exemple de surface non limitée dont l'aire est finie.

Corrigé



Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. **a.** On lit $f(0) = 2$.

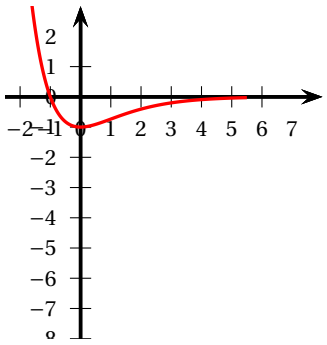
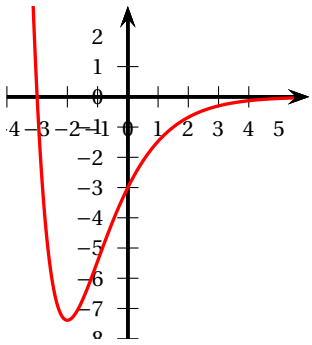
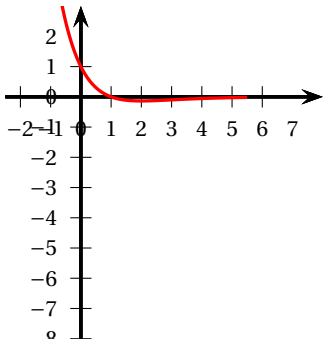
b. Déterminer $f'(0)$. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la droite (NP) soit à $\dfrac{0-2}{2-0} = -1 = f'(0)$

2. Il semble que $f(-2) = 0$. $S = \{-2\}$.

3. Il semble que la fonction est convexe sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$: sur cet intervalle toutes les tangentes à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ sont sous cette courbe.

Toujours graphiquement sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ les coefficients directeurs des tangentes à la courbe (-1 et 0 au voisinage de plus l'infini) sont croissants : autrement dit la fonction f" est croissante donc $f''(x) \geqslant 0$

4.

Courbe 1	Courbe 2	Courbe 3
		

• On sait que $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc une primitive sur le même intervalle est croissante ce qui élimine la courbe 3 ;

• Si F est une primitive de f et est représentée par la courbe 1, alors $F'(0) = 0 = f(0) = -1$: ceci est faux donc la courbe 1 est éliminée.

Il ne reste que la courbe 2.

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a, b et λ sont des constantes réelles.

1. On a vu que $f(0) = 2 \iff b\mathrm{e}^{\lambda\times 0} = 2 \iff b = 2$.

Donc $f(x) = (ax+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

2. On a donc $f(x) = (ax+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

On sait aussi que $f(-2) = 0 \iff (-2a+2)\mathrm{e}^{-2\lambda} = 0$ et comme $\mathrm{e}^{-2\lambda} \neq 0$ on a donc $-2a+2 = 0 \iff a = 1$.

Donc $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

3. On a vu que $f'(0) = -1$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda(x+2)\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda x}(1+\lambda x+2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

Donc $f'(0) = -1 \iff 1+2\lambda = -1 \iff 2\lambda = -2 \iff \lambda = -1$.

On a donc finalement $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x+2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. Produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+2)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x-2) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$: le signe de $f('x)$ est donc celui de $-x-1$.
• $-x-1 > 0 \iff -1 > x \iff x < -1$: sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1[$ $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante sur cet intervalle ;
• $-x-1 < 0 \iff -1 < x \iff x > -1$: sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante sur cet intervalle ;
• $-x-1 = 0 \iff -1 = x$, $f'(1) = 0$; $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$. Il reste à calculer la liite en plus l'infini : comme $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$.
Or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ (puissances comparées) et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\mathrm{e}^{-x} = 0$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. **a.** f' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (x+1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x+1-1) = x\mathrm{e}^{-x}$.
Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de x, donc :
- f est convexe sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est concave sur $]-\infty\,;\,0]$;

b. – Donc d'après le résultat précédent la courbe $\mathscr{C}_f$ a un seul point d'inflexion de coordonnées $(0\,;2)$.

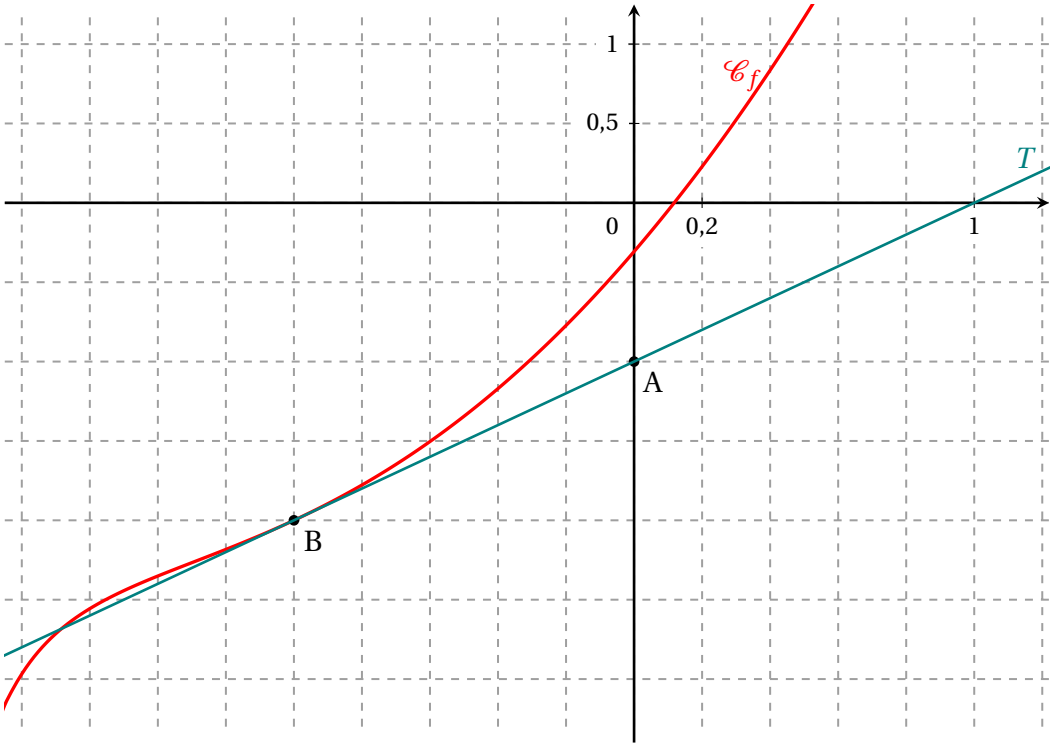
4.
$$I(t) = \int_{-2}^{t} (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

a. On pose $u(x) = x+2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, d'où
$u'(x) = 1$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
Toutes ces fonctions étant continues car dérivables on peut intégrer par parties :
$I(t) = [-(x+2)\mathrm{e}^{-x}]_{-2}^{t} + \displaystyle\int_{-2}^{t} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-(x+2)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{t} = \left[(-x-3)\mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{t} = (-t-3)\mathrm{e}^{-t} + 1\mathrm{e}^{2} = \mathrm{e}^{2} - (t+3)\mathrm{e}^{-t}$.

b. f est positive sur l'intervalle $[-2\,;\,+\infty[$; on sait qu'alors l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = t$ est égale à l'intégrale $I(t)$.
Or quand $t \to +\infty$, la surface n'est pas limitée à droite alors que l'intégrale l'est elle puisqu'on a $\lim\limits_{t\to+\infty} (t+3)\mathrm{e}^{-t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = \mathrm{e}^2$.

Exercice 19.

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1.
On précise que la droite T passe par le point A$(0\,;\,-1)$.



Partie A : exploitation du graphique.

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2. Interpréter graphiquement ce résultat.
   On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > -2$, $\quad f'(x) = \dfrac{2x^2+6x+5}{x+2}$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.

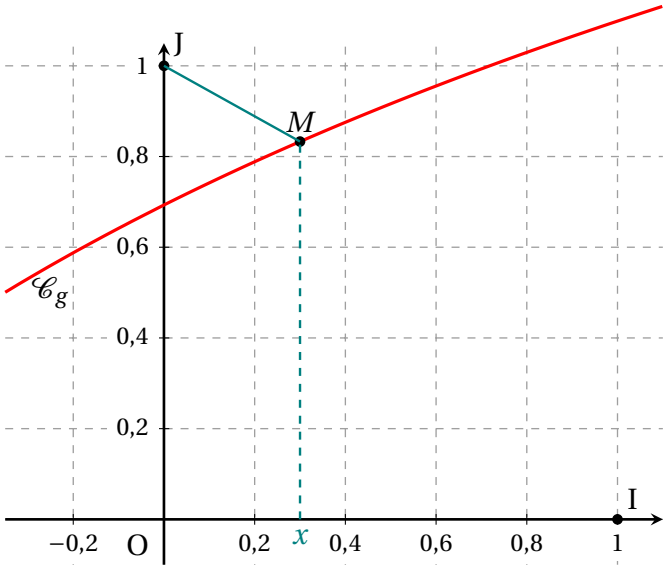
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;\,+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\,;\,+\infty[$.

6. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale.

Soit g la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $\quad g(x)=\ln(x+2)$.
On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (0 ; I , J), représentée ci-après.
Soit M un point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.
Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.
On considère la fonction h définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $\quad h(x)=\text{JM}^2$.



1. Justifier que pour tout $x>-2$, on a : $\quad h(x)=x^2+[\ln(x+2)-1]^2$.

2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.
On admet également que pour tout réel $x>-2$,

$$h'(x)=\frac{2f(x)}{x+2}$$

où f est la fonction étudiée en **partie B**.

a. Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\,;\,+\infty[$.
Les limites ne sont pas demandées.

b. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question **4.** de la **partie B**.

3. On notera M_α le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse α.

a. Montrer que $\quad \ln(\alpha+2)=1-2\alpha-\alpha^2$.

b. En déduire que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α et la droite $(\text{J}M_\alpha)$ sont perpendiculaires.
On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

Corrigé

Partie A : exploitation du graphique.

1. On lit que B a pour coordonnées $(-1\ ;\ -2)$, or la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par B, donc $f(-1) = f(x_B) = y_B = -2$.
   On nous dit que la tangente T, tangente à $\mathscr{C}_f$ en B, d'abscisse -1, est aussi la droite (AB), dont le coefficient directeur est 1, donc $f'(-1) = 1$.
2. La fonction f n'est manifestement pas convexe sur son ensemble de définition, car la courbe $\mathscr{C}_f$ passe en dessous de sa tangente T pour les valeurs x inférieures à $-1,7$, environ. Si la fonction était convexe sur tout son ensemble de définition, elle serait au-dessus de n'importe quelle tangente, sur tout son ensemble de définition.
   Ici, on a l'impression que la fonction est d'abord concave, puis convexe, avec un point d'inflexion dont l'abscisse est aux alentours de $-1,4$.
3. De ce que l'on peut voir de $\mathscr{C}_f$, on ne voit qu'une seule solution à l'équation, qui est environ 0,1 (à 10^{-1} près).

Partie B : étude de la fonction f.

1. On a : $\lim\limits_{x\to -2} x^2+2x-1 = (-2)^2+2\times(-2)-1 = -1$, car $x \longmapsto x^2+2x-1$ est une fonction polynôme, continue sur $\mathbb{R}$ et donc notamment continue en -2.
   de plus : $\lim\limits_{x\to -2}(x+2) = 0$
   et donc, par composition : $\lim\limits_{x\to -2} \ln(x+2) = \lim\limits_{y\to 0} \ln(y) = -\infty$
   finalement, par limite de la somme : $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -\infty$.
   Graphiquement, cela signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale, d'équation $x = -2$.
2. *Remarque :* la justification de la dérivabilité de f, donnée ci-après, n'est généralement pas attendue.
   La fonction $x \longmapsto \ln(x+2)$ est dérivable sur $]-2\ ;\ +\infty[$, en tant que composée de $x \longmapsto x+2$ définie et dérivable sur $]-2\ ;\ +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$, où la fonction ln est définie et dérivable.
   f est dérivable sur $]-2\ ;\ +\infty[$, en tant que somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (une fonction polynôme et une fonction composée).
   $$\begin{aligned}\forall x \in]-2\ ;\ +\infty[,\quad f'(x) &= 2x+2+0+\frac{1}{x+2}\\ &= \frac{(2x+2)(x+2)+1}{x+2}\\ &= \frac{2x^2+4x+2x+4+1}{x+2}\\ &= \frac{2x^2+6x+5}{x+2}.\end{aligned}$$
   On arrive bien à l'expression attendue pour la fonction dérivée f'.
3. Pour tout x réel strictement supérieur à -2, $x+2$ est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le signe de son numérateur. Ledit numérateur étant une expression polynomiale de degré 2 ayant un coefficient dominant (2) positif, cela signifie que les images seront positives, sauf entre d'éventuelles racines.

Déterminons le discriminant du numérateur : $\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times 5 = 36 - 40 = -4 < 0$.

Le trinôme n'a donc pas de racines réelles, et a donc des images strictement positives pour tout x réel.

f' est donc une fonction à valeurs strictement positives sur $]-2\,;\,+\infty[$, et f est donc strictement croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$.

On peut donc établir le tableau de variations suivant :

x	-2		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$	
variations de f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4. La fonction f est continue (car dérivable) sur $]-2\,;\,+\infty[$, de plus, elle est strictement croissante sur cet intervalle et enfin, 0 est une valeur intermédiaire entre $\lim\limits_{-2} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-2\,;\,+\infty[$, que l'on notera α.

Avec une exploration à la calculatrice (éclairée par notre lecture graphique de la partie A), on trouve $0,115 < \alpha < 0,12$, donc une valeur approchée à 10^{-2} de α est $0,12$.

5. Puisque f est strictement croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$, on a :

$-2 < x < \alpha \implies f(x) < f(\alpha)$ $\qquad$ $\alpha < x \implies f(\alpha) < f(x)$

$\implies f(x) < 0$ $\qquad$ $\implies 0 < f(x)$

f est donc à valeurs strictement négatives sur $]-2\,;\,\alpha[$, nulle pour $x = \alpha$ et à valeurs strictement positives sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

6. Pour étudier la présence d'un point d'inflexion, on va étudier le signe de la dérivée seconde de f, notée f''.

f est deux fois dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$, car sa dérivée première est une fraction rationnelle, et donc f' est dérivable partout où elle est définie.

$$\forall x \in]-2\,;\,+\infty[, \quad f''(x) = \frac{(4x+6)\times(x+2) - (2x^2+6x+5)\times 1}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{4x^2+8x+6x+12-2x^2-6x-5}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}$$

Pour tout x réel strictement supérieur à -2, $(x+2)^2$ est une quantité strictement positive, donc le signe de $f''(x)$ est le signe de son numérateur, un polynôme de degré 2, dont le coefficient dominant est strictement positif, dont les images sont strictement positives, sauf entre ses deux éventuelles racines.

Le discriminant est : $\Delta = 8^2 - 4 \times 2 \times 7 = 8 \times 8 - 8 \times 7 = 8 > 0$.

Le trinôme a exactement deux racines réelles distinctes, et donc s'annule en changeant de signe deux fois, pour :

$$x_1 = \frac{-8-\sqrt{8}}{2\times 2} = \frac{-8-2\sqrt{2}}{4} = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
$$x_2 = \frac{-8+\sqrt{8}}{2\times 2} = \frac{-8+2\sqrt{2}}{4} = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La valeur x_1 est manifestement strictement inférieure à -2, et donc :

Sur $\left]-2\,;\,-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$, f'' est à valeurs strictement négatives, on a $f''\left(-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$ et sur $\left]-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\,+\infty\right[$, f'' est à valeurs strictement positives.

Ainsi, f est concave sur $\left]-2\,;\,-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et convexe sur $\left]-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\,+\infty\right[$ et donc son unique point d'inflexion est le point d'abscisse $-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque : On a : $-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\approx -1{,}29$, ce qui n'est pas incohérent avec l'estimation graphique formulée en partie A dans ce corrigé.

Partie C : une distance minimale.

1. Le point J a pour coordonnées $(0\,;\,1)$ et M a pour coordonnées $\big(x\,;\,g(x)\big)$.

Comme on est dans un repère orthonormé, on a : $JM=\sqrt{(x_M-x_J)^2+(y_M-y_J)^2}$

Donc, $\forall x\in]-2\,;\,+\infty[$, $h(x)=JM^2$

$$\begin{aligned}&=(x_M-x_J)^2+(y_M-y_J)^2\\&=(x-0)^2+\big(g(x)-1\big)^2\\&=x^2+\big[\ln(x+2)-1\big]^2.\end{aligned}$$

On arrive bien à l'expression attendue.

2. **a.** La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et la distance JM est nécessairement positive, en tant que distance.

Donc $JM_{x_1}\leqslant JM_{x_2}\iff JM_{x_1}^2\leqslant JM_{x_2}^2$.

La distance JM sera donc minimale pour la valeur x qui rend minimale le carré de cette distance, c'est-à-dire $h(x)$.

On sait que, pour tout x dans $]-2\,;\,+\infty[$, $\dfrac{2}{x+2}$ est strictement positif, donc $h'(x)$ est du signe de $f(x)$.

On peut donc établir le tableau suivant :

x	-2		α		$+\infty$
signe de $f(x)$	‖	$-$	0	$+$	
signe de $h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de h	‖	↘	$h(\alpha)$	↗	

b. Comme h est décroissante sur $]-2\,;\,\alpha[$ et croissante sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est donc bien le nombre α, solution de l'équation $f(x)=0$, défini à la question **4.** de la **partie B**.

3. **a.** On sait que α est la solution de l'équation $f(x)=0$.

$$\begin{aligned}f(x)=0&\iff x^2+2x-1+\ln(x+2)=0\\&\iff \ln(x+2)=1-2x-x^2\end{aligned}$$

Comme α est solution de cette équation, on en déduit bien :
$\ln(\alpha+2) = 1-2\alpha-\alpha^2$.

b. La tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α a pour coefficient directeur : $g'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+2}$.

La droite (JM_α) a pour coefficient directeur :

$$\frac{y_{M_\alpha}-y_J}{x_{M_\alpha}-x_J} = \frac{g(\alpha)-1}{\alpha-0} = \frac{\ln(\alpha+2)-1}{\alpha} = \frac{1-2\alpha-\alpha^2-1}{\alpha} = \frac{\alpha(-2-\alpha)}{\alpha} = -2-\alpha.$$

Le produit de ces deux coefficients directeurs est donc : $\dfrac{1}{\alpha+2}\times(-2-\alpha) = -1$.

On en déduit dont que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.

Remarque : on aurait aussi pu mobiliser des connaissances du programme de première et utiliser des vecteurs normaux ou des vecteurs directeurs de ces deux droites, et en calculer le produit scalaire (entre les deux vecteurs directeurs, ou entre les deux vecteurs normaux) ou vérifier la colinéarité (entre le vecteur directeur de l'une et le vecteur normal de l'autre), pour arriver à la même conclusion.

Exercice 20.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	5	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

a. Affirmation 1 :
La droite d'équation $y=-2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

b. Affirmation 2 :
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{f(x)-5} = +\infty$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

a. Affirmation 3 :
Le point $A\left(2\,;\,\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g.

b. Affirmation 4 :
Pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty\,;\,2[$, on a $g(x)\leqslant x$.

3. Affirmation 5 :
L'équation $x\ln(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Corrigé

1. On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	5	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

a. Affirmation 1 : « La droite d'équation $y=-2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f. »

La droite d'équation $y=-2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f si et seulement si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$.

Or, d'après le tableau de variations de f, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

Affirmation 1 fausse

b. Affirmation 2 : « $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{f(x)-5}=+\infty$. »

D'après le tableau de variations de f, celle-ci est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-2[$, donc sur cet intervalle $f(x)<5$ et donc $f(x)-5<0$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5$, on a donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-5=0^-$ et donc

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)-5}=-\infty$ et enfin $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{f(x)-5}=-\infty$.

Affirmation 2 fausse

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}$.

a. Affirmation 3 : « Le point $\mathrm{A}\left(2\,;\,\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g. »

La fonction g produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle :

$g'(x)=\mathrm{e}^{-x}-x\,\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}(1-x)$, qui est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$g''(x)=-\mathrm{e}^{-x}-(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}(x-2)$.

On a $g''(x)=0 \iff \mathrm{e}^{-x}(x-2) \iff x-2=0$, puisque $\mathrm{e}^{-x}\neq 0$, quel que soit $x\in\mathbb{R}$, donc la dérivée seconde ne s'annule qu'en $x=2$.

Comme $g(2)=2\,\mathrm{e}^{-2}=\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$ et comme $g''(x)$ a le signe de $(x-2)$ et donc change de signe (de moins à plus) en 2, le point $\mathrm{A}\left(2\,;\,\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Affirmation 3 vraie

b. Affirmation 4 : « Pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty\,;\,2[$, on a $g(x)\leqslant x$. »

$g(x)\leqslant x \iff x\,\mathrm{e}^{-x}\leqslant x \iff x\leqslant x\,\mathrm{e}^{x} \iff 0\leqslant x\,\mathrm{e}^{x}-x \iff x(\mathrm{e}^{x}-1)\geqslant 0$

On établit un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		2
x		$-$	0	$+$	
$\mathrm{e}^{x}-1$		$-$	0	$+$	
$x(\mathrm{e}^{x}-1)$		$+$	0	$+$	

Donc, pour tout x de $]-\infty\,;\,2[$, on a $x(\mathrm{e}^{x}-1)\geqslant 0$ donc $g(x)\leqslant x$.

Affirmation 4 vraie

3. **Affirmation 5 :** « L'équation $x\ln(x)=1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. »

   Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=x\ln(x)-1$.

   $x\ln(x)=1 \iff x\ln(x)-1=0 \iff f(x)=0$

   - La fonction f est dérivable et $f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\dfrac{1}{x}-0=\ln(x)+1$.
   - $f'(x)>0 \iff \ln(x)+1>0 \iff \ln(x)>-1 \iff x>\mathrm{e}^{-1}$
   - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x)=0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-1$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
   - $f(\mathrm{e}^{-1})=\mathrm{e}^{-1}\ln(\mathrm{e}^{-1})-1=-\mathrm{e}^{-1}-1<0$

   D'où le tableau de variation de f :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ -1	↘	$-\mathrm{e}^{-1}-1$	↗	$+\infty$

   Sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}[$, la fonction f est négative, donc l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution.

   Sur l'intervalle $]\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty[$, la fonction f, continue et strictement croissante, passe du négatif au positif : d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique.

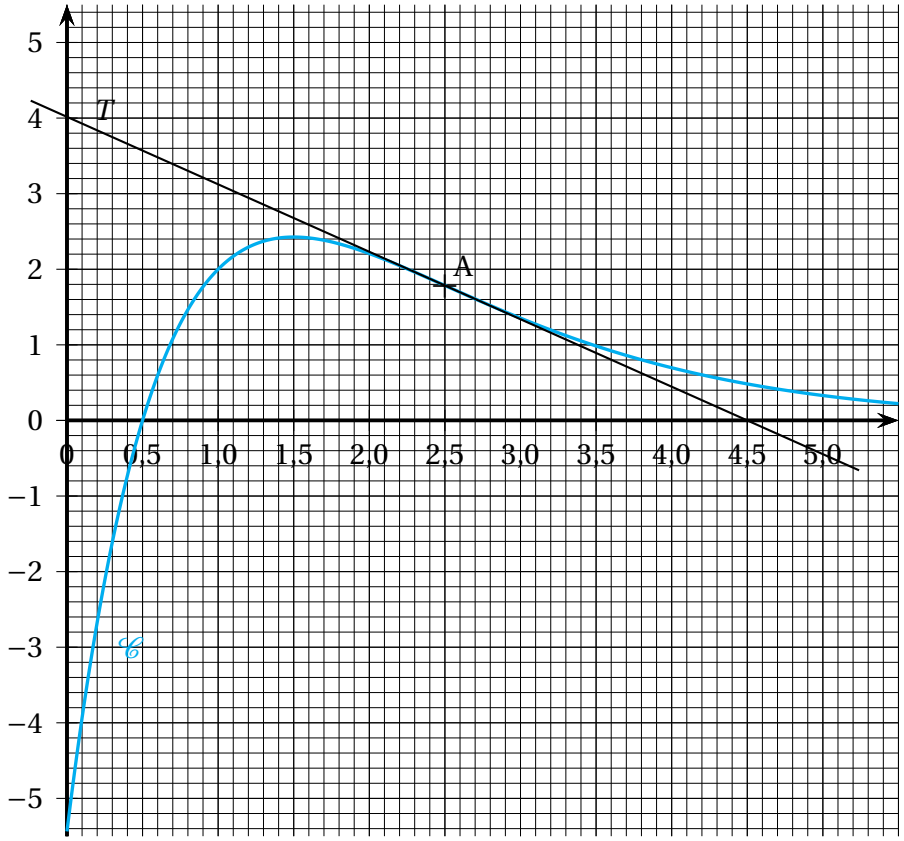
   Affirmation 5 fausse

Exercice 21.

Partie A

On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous.

La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.



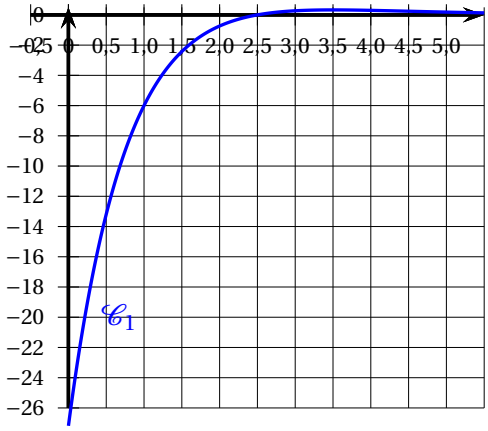
1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$.

2. Que semble présenter la courbe $\mathscr{C}$ au point A ?

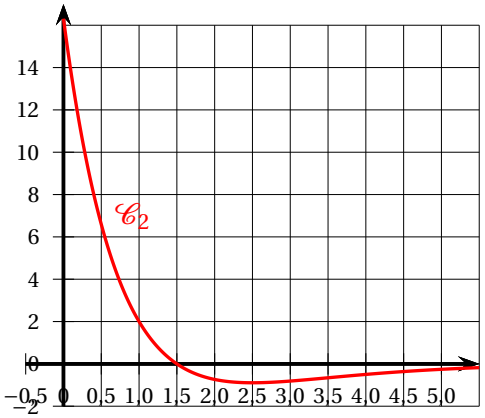
3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.

Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente.

Ce choix sera justifié.

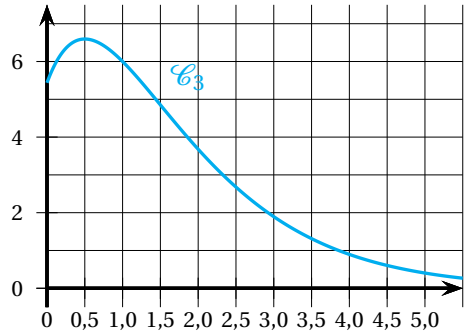


Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

4. La courbe $\mathscr{C}_3$ ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0\ ;\ +\infty[$ d'une primitive de la fonction f ? Justifier.



Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, est définie par

$$f(x) = (4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}.$$

On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

1. Étude de la fonction f

a. Montrer que $f'(x) = (-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1}$.

b. Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c. Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.

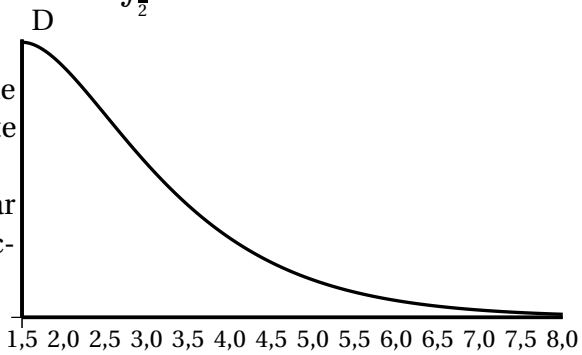
2. On considère une fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.

a. Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b. On admet que $F(x) = (-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'intégrale

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle.
Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}\ ;\ 8\right]$.
L'unité de longueur est le mètre.



a. Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D.

b. La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste. L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75 % de la surface du mur.
Sachant qu'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de 0,8 m^2, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette œuvre.

Corrigé

Partie A

1. Par lecture graphique :

x	0		1,5		5
variations de f	$-5,5$	↗	$2,4$	↘	$0,35$

2. La courbe $\mathscr{C}$ semble traverser la tangente au point A et donc admettre un point d'inflexion au point A.

3. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1,5[$ puis décroissante sur l'intervalle $]1,5\ ;\ 5]$, sa dérivée est donc positive puis négative. La courbe représentant la dérivée f' de f est donc la courbe $\mathscr{C}_2$.

La fonction f est concave sur $[0\ ;\ 2,5[$ puis convexe sur $]2,5\ ;\ 5]$, sa dérivée seconde est donc négative puis positive. La courbe représentant la dérivée seconde f'' de f est donc la courbe $\mathscr{C}_1$.

4. Si F est une primitive de f, on aura donc $f = F'$ et $f' = F''$.

f est négative sur $[0\ ;\ 0,5[$ puis positive, une primitive est donc décroissante sur $[0\ ;\ 0,5[$ puis croissante : ce n'est pas le cas (c'est même exactement le contraire) de la fonction représentée par $\mathscr{C}_3$.

$\mathscr{C}_3$ n'est donc pas la représentation graphique d'une primitive de la fonction f.

Partie B

1. **a.** f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 4x - 2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x+1}$.

On a donc $u'(x) = 4$ et $v'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x+1}$.

$f' = u'v + v'u$ donc, pour tout réel x positif :

$f'(x) = 4 \times \mathrm{e}^{-x+1} - 1 \times \mathrm{e}^{-x+1} \times (4x-2) = (4 - 4x + 2)\mathrm{e}^{-x+1} = (-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1}$.

b. Déterminons le signe de $-4x+6$: $\quad -4x+6 > 0 \iff 6 > 4x$

$$\iff \frac{3}{2} > x$$

les images pertinentes sont : $\quad f(0) = (4 \times 0 - 2)\mathrm{e}^{-0+1} = -2\mathrm{e}$

et $\quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(4 \times \frac{3}{2} - 2\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}+1} = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ $\quad$ (la limite en $+\infty$ est admise).

Remarque : On a $-2\mathrm{e} \approx -5,43$, ce qui confirme la lecture graphique de la **partie A** et $f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2,43$, là aussi, conforme.

On a donc le tableau :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $-4x+6$		$+$	0	$-$	
signe de e^{-x+1}		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$-2\mathrm{e}$	↗	$4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	↘	0

c. Pour tout réel x positif on a :
$f''(x) = -4 \times \mathrm{e}^{-x+1} - 1 \times \mathrm{e}^{-x+1} \times (-4x+6) = (-4+4x-6)\mathrm{e}^{-x+1} = (4x-10)\mathrm{e}^{-x+1}$
Déterminons le signe de $4x-10$: $4x-10>0 \iff 4x>10$
$\iff x>\dfrac{5}{2}$

x	0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
signe de $4x-10$		$-$	0	$+$	
signe de e^{-x+1}		$+$		$+$	
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

La fonction f est donc concave sur $\left[0\,;\,\dfrac{5}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\dfrac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Le point A, d'abscisse $\dfrac{5}{2}$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.

2. **a.** Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$ avec a et b deux nombres réels.
F est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$.
Pour tout réel x positif on a :
$F'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x+1} - \times \mathrm{e}^{-x+1} \times (ax+b) = (a-ax-b)\mathrm{e}^{-x+1} = (-ax-b+a)\mathrm{e}^{-x+1}$
F est une primitive de $f \iff F' = f$
$\iff \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (-ax-b+a)\mathrm{e}^{-x+1} = (4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$
$\iff \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (-ax-b+a) = (4x-2) \quad$ car $\quad \mathrm{e}^{-x+1} > 0$
$\iff \begin{cases} -a = 4 \\ a-b = -2 \end{cases}$ par identification des coefficients
$\iff \begin{cases} a = -4 \\ b = a+2 = -4+2 = -2 \end{cases}$
$F(x) = (-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. $I = \displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\mathrm{d}x = \left[(-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}\right]_{\frac{3}{2}}^{8} = (-4\times 8-2)\mathrm{e}^{-8+1} - \left(-4\times\frac{3}{2}-2\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}+1} = -34\mathrm{e}^{-7} + 8\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

$I \approx 4,821$ soit $4,82$ à 10^{-2} près.

3. **a.** La hauteur du point de départ est égale à $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 2,426$
soit $2,43\,\mathrm{m}$ au centimètre près.

b. L'aire, en unité d'aire, est égale à l'intégrale I calculée à la question **3.**
L'unité est le mètre, une unité d'aire est donc égale à $1\,\mathrm{m}^2$.
On veut donc couvrir une surface de : $\frac{75}{100} \times 4,82\,\mathrm{m}^2$ soit environ $3,62\,\mathrm{m}^2$.
De plus : $\frac{3,62}{0,8} \approx 4,525$
Il faudra donc 5 bombes de peinture pour réaliser cette œuvre.

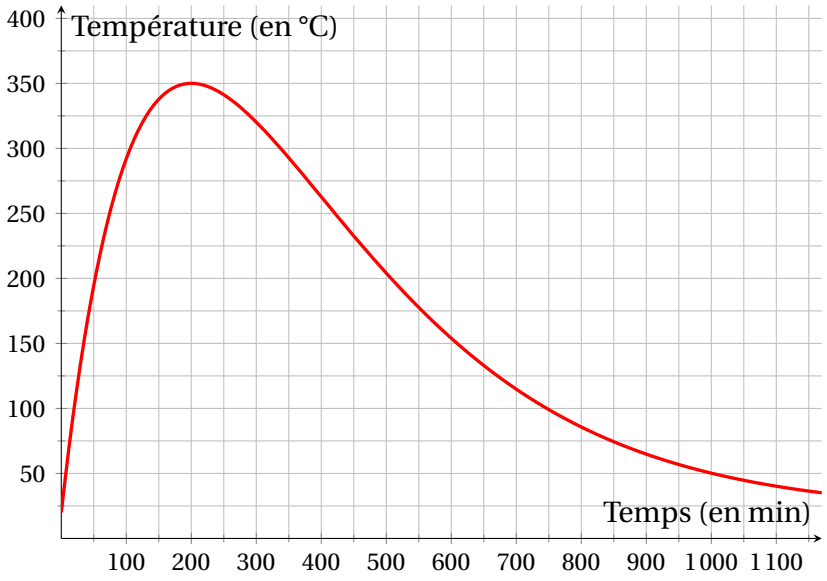
Exercice 22.

Un organisme certificateur est missionné pour évaluer deux appareils de chauffage, l'un d'une marque A et l'autre d'une marque B.

Les parties 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

Partie 1 : appareil de la marque A

À l'aide d'une sonde, on a mesuré la température à l'intérieur du foyer d'un appareil de la marque *A*.
On a représenté, ci-dessous, la courbe de la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer en fonction du temps écoulé, exprimé en minutes, depuis l'allumage du foyer.



Par lecture graphique :

1. Donner le temps au bout duquel la température maximale est atteinte à l'intérieur du foyer.
2. Donner une valeur approchée, en minutes, de la durée pendant laquelle la température à l'intérieur du foyer dépasse 300 °C.

3. On note f la fonction représentée sur le graphique.

Estimer la valeur de $\dfrac{1}{600}\displaystyle\int_0^{600} f(t)\,\mathrm{d}t$. Interpréter le résultat.

Partie 2 : étude d'une fonction

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(t) = 10t\,\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 20.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, $g'(t) = (-0{,}1t + 10)\,\mathrm{e}^{-0{,}01t}$.

b. Étudier les variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$ et construire son tableau de variations.

3. Démontrer que l'équation $g(t) = 300$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[0\,;\,+\infty[$. En donner des valeurs approchées à l'unité.

4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie 3 : évaluation

Pour un appareil de la marque B, la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer t minutes après l'allumage est modélisée sur $[0\,;\,600]$ par la fonction g.

L'organisme certificateur attribue une étoile par critère validé parmi les quatre suivants :

— Critère 1 : la température maximale est supérieure à 320 °C.

— Critère 2 : la température maximale est atteinte en moins de 2 heures.

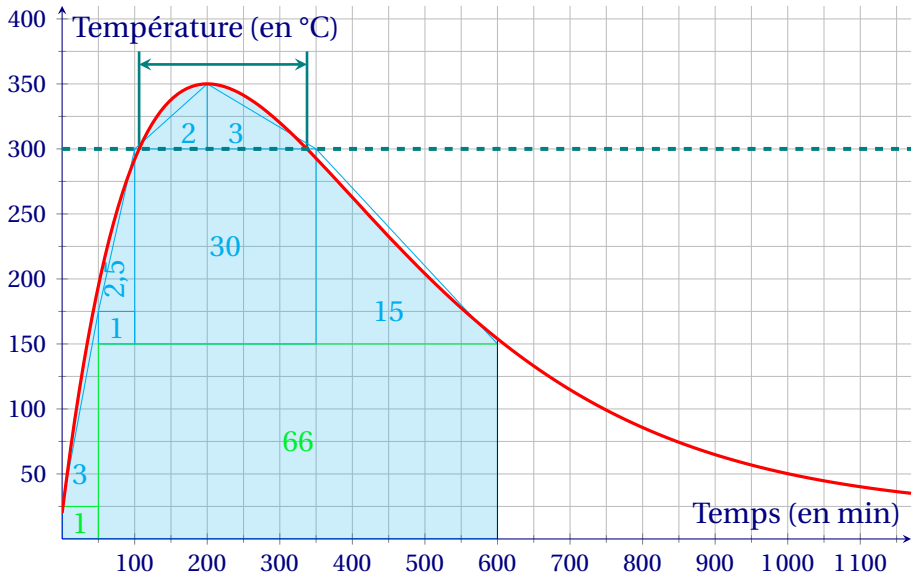
— Critère 3 : la température moyenne durant les 10 premières heures après l'allumage dépasse 250 °C.

— Critère 4 : la température à l'intérieur du foyer ne doit pas dépasser 300 °C pendant plus de 5 heures.

Chaque appareil obtient-il exactement trois étoiles ? Justifier votre réponse.

Corrigé

Partie 1 : appareil de la marque A



1. Le point le plus haut de la courbe est à (200 ; 350), c'est donc au bout de 200 minutes (soit 3 h 20 min) que la température maximale (de 350 °C) est atteinte.

2. (voir les tracés en vert pour la justification).

On mesure environ 2 cm de large sur lesquels la courbe est au dessus de la droite d'équation $y = 300$, donc, avec 1 000 minutes représentées par 9,5 cm, on en déduit que la durée pendant laquelle la température à l'intérieur du foyer dépasse 300 °C est d'environ : $\dfrac{2,2 \times 1\,000}{9,5} \approx 232$ minutes.

(Ici, la précision de la lecture pouvait donner des résultats assez variables, une différence d'un millimètre dans la lecture donnant environ 11 minutes d'écart).

3. Si f est la fonction représentée sur le graphique, manifestement à valeurs positives sur l'intervalle [0 ; 600], alors $\displaystyle\int_0^{600} f(t)\,\mathrm{d}t$ est la mesure de la surface de la zone colorée sur le graphique, délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentant f, et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 600$, exprimée en unités d'aires.

On peut donc compter les carreaux colorés, ce sera une estimation, bien sûr, en délimitant des zones, pour ne pas compter individuellement les carreaux. Avec le découpage proposé en bleu, on compte 123,5 carreaux colorés, et donc, un carreau représentant une largeur de 50 unités pour une hauteur de 25 unités, chaque carreau correspond à 1 250 unités d'aire.

Une estimation de l'intégrale est donc de : $1\,250 \times 123,5 = 154\,375$ unités d'aire.

On a donc : $\dfrac{1}{600}\displaystyle\int_0^{600} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \dfrac{1}{600} \times 154\,375 \approx 257,3$.

Le quotient de l'intégrale de 0 à 600 de la fonction par 600 (qui est l'amplitude de l'intervalle de 0 à 600) fait que la valeur demandée est exactement la définition de la *valeur moyenne* de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 600].

On peut donc interpréter notre estimation en disant que, au cours des 10 premières heures (de 0 à 600 minutes, donc), la température moyenne de l'intérieur du foyer est donc de 257 °C, environ.

Partie 2 : étude d'une fonction

1. Pour tout t réel strictement positif, on a :

$g(t) = 10 \times (-100) \times (-0,01t)\,\mathrm{e}^{-0,01t} + 20 = -1000 \times (-0,01t)\,\mathrm{e}^{-0,01t} + 20$

Comme $-0,01 < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} -0,01t = -\infty$.

Par composition (en posant $y = -0,01t$) : $\lim\limits_{t\to+\infty} -0,01t\,\mathrm{e}^{-0,01t} = \lim\limits_{y\to-\infty} y\,\mathrm{e}^{y} = 0$.

La limite $\lim\limits_{y\to-\infty} y\,\mathrm{e}^{y} = 0$ est connue par la propriété des croissances comparées.

Finalement, par limite du produit et de la somme, on a :

$\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = -1\,000 \times 0 + 20 = 20$.

2. **a.** Pour tout t réel positif, on pose : $u(t) = 10t$ et $v(t) = \mathrm{e}^{-0,01t}$,

donc on a, pout t réel positif : $u'(t) = 10$ et $v'(t) = -0,01 \times \mathrm{e}^{-0,01t}$.

$g = u \times v + 20$, donc $g' = u'v + v'u + 0$

On a donc, pour t réel positif : $g'(t) = 10 \times \mathrm{e}^{-0,01t} + \left(-0,01\,\mathrm{e}^{-0,01t}\right) \times 10t$

$= \left(10 - 0,01 \times 10t\right)\mathrm{e}^{-0,01t}$

$= \left(-0,1t + 10\right)\mathrm{e}^{-0,01t}$.

b. La fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives, on en déduit que, pour tout réel t positif, on a : $\mathrm{e}^{-0,01t} > 0$ et donc $g'(x)$ a le signe de $(-0,1t+10)$.

$-0,1t+10>0 \iff -0,1t>-10$

$\iff t<100$, car $-0,1<0$

La fonction g est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0;100]$, puis strictement décroissante sur $[100\,;+\infty[$.

On calcule $g(0)=10\times 0\times \mathrm{e}^{0}+20=20$ et $g(100)=10\times 100\times \mathrm{e}^{-1}+20=1000\,\mathrm{e}^{-1}+20$ (avec $g(100)\approx 388$).

On peut donc établir le tableau de variations suivant :

x	0		100		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de g	20	↗	$1000\,\mathrm{e}^{-1}+20$	↘	20

3.

- Sur $[0\,;\,100]$, la fonction g est continue (car dérivable), strictement croissante et 300 est une valeur intermédiaire entre $g(0)=20$ et $g(100)\approx 388$, donc en appliquant le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, on en déduit que 300 admet un unique antécédent par g dans l'intervalle $[0;100]$ (et cet antécédent n'est pas 100, dont l'image n'est pas 300).
- De même, sur $[100;+\infty[$, g reste continue, est cette fois strictement décroissante, et 300 est une valeur strictement intermédiaire entre $g(100)\approx 388$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=20$, donc d'après le même corollaire, 300 admet un unique antécédent par g sur $[100\,;+\infty[$.

Ainsi, l'équation $g(t)=300$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[\,0\,;+\infty[$: une strictement inférieure à 100, l'autre strictement supérieure à 100.

Avec la calculatrice, on a des valeurs approchées qui sont : 43 et 193.

4. $\displaystyle\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{600} \left(10t\,\mathrm{e}^{-0,01t}+20\right)\mathrm{d}t$

$\displaystyle= 10\int_0^{600}\left(t\,\mathrm{e}^{-0,01t}\right)\mathrm{d}t + \int_0^{600} 20\,\mathrm{d}t$ par linéarité de l'intégrale

$\displaystyle= 10\int_0^{600}\left(t\,\mathrm{e}^{-0,01t}\right)\mathrm{d}t + 20\times 600$

$\displaystyle= 12\,000 + 10\int_0^{600}\left(t\,\mathrm{e}^{-0,01t}\right)\mathrm{d}t$

Ensuite, on pose, pour tout réel positif t : $u(t)=t$ et $v'(t)=\mathrm{e}^{-0,01t}$.

On a alors : $u'(t)=1$ et, par exemple, $v(t)=-100\,\mathrm{e}^{-0,01t}$.

Avec ces fonctions u et v ainsi introduites, on a :

$\displaystyle\int_0^{600}\left(t\,\mathrm{e}^{-0,01t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{600} u(t)\times v'(t)\,\mathrm{d}t.$

D'après la propriété d'intégration par parties, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_0^{600} \left(t\,\mathrm{e}^{-0{,}01t}\right)\mathrm{d}t &= \Big[u(t)\times v(t)\Big]_0^{600} - \int_0^{600} u'(t)\times v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[t\times(-100)\,\mathrm{e}^{-0{,}01t}\Big]_0^{600} - \int_0^{600} 1\times(-100)\times \mathrm{e}^{-0{,}01t}\,\mathrm{d}t \\
&= -100\Big[t\,\mathrm{e}^{-0{,}01t}\Big]_0^{600} + 100\int_0^{600} \mathrm{e}^{-0{,}01t}\,\mathrm{d}t \\
&= -100\Big(600\,\mathrm{e}^{-6} - 0\,\mathrm{e}^{0}\Big) + 100\Big[-100\,\mathrm{e}^{-0{,}01t}\Big]_0^{600} \\
&= -60\,000\,\mathrm{e}^{-6} - 10\,000\Big(\mathrm{e}^{-6} - \mathrm{e}^{0}\Big) \\
&= -60\,000\,\mathrm{e}^{-6} - 10\,000\Big(\mathrm{e}^{-6} - 1\Big) \\
&= 10\,000 - 70\,000\,\mathrm{e}^{-6}
\end{aligned}$$

Ainsi, en reprenant le calcul de départ, et en y intégrant ce dernier résultat :

$$\begin{aligned}
\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t &= 12\,000 + 10\int_0^{600} \left(t\,\mathrm{e}^{-0{,}01t}\right)\mathrm{d}t \\
&= 12\,000 + 10\Big(10\,000 - 70\,000\,\mathrm{e}^{-6}\Big) \\
&= 112\,000 - 700\,000\,\mathrm{e}^{-6}
\end{aligned}$$

(On a une valeur approchée pour cette intégrale de 110 265, à l'unité près.)

Partie 3 : évaluation

Reprenons les résultats de la partie A (pour l'appareil A) et de la partie B (pour l'appareil B) afin de voir quels critères sont satisfaits :

— Critère 1 : la température maximale est supérieure à 320 °C.

Validé pour les deux appareils (on a une température maximale d'environ 350 ° C pour l'appareil A, environ 388 ° C pour l'appareil B).

— Critère 2 : la température maximale est atteinte en moins de 2 heures.

Validé pour l'appareil B, qui atteint sa température maximale pour $t = 100$ minutes après l'allumage, soit 1 h 40 min après l'allumage. L'appareil A, lui, n'atteint sa température maximale qu'au bout de 200 minutes, soit 3 h 20 min.

— Critère 3 : la température moyenne durant les 10 premières heures après l'allumage dépasse 250 ° C.

Validé pour l'appareil A, on a une température moyenne sur les 10 premières heures d'environ 250 ° C.

Pour l'appareil B, déterminons la température moyenne :

$\mu = \dfrac{1}{600}\displaystyle\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{112\,000 - 700\,000\,\mathrm{e}^{-6}}{600} \approx 184$. L'appareil B ne valide pas ce critère, sa température moyenne pour les dix premières heures après l'allumage n'est que d'environ 184 °C.

— Critère 4 : la température à l'intérieur du foyer ne doit pas dépasser 300°C pendant plus de 5 heures.

Ce critère est validé pour l'appareil A, on avait trouvé une durée totale au dessus de 300 ° C d'environ 233 minutes, soit 3 h 53.

Pour l'appareil B, entre les variations de la fonction g et les antécédants de 300 approchés, on a une durée au-dessus de 300° C de $193 - 43 = 150$ minutes, soit 2 h 30 min : le critère est vérifié également.

Les deux appareils obtiennent bien exactement trois étoiles : tous les critères sauf le n° 2 sont validés par l'appareil A, et pour l'appareil B, ce sont tous les critères, sauf le n° 3.

Exercice 23.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 1.
   b. En déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f'(x)=\frac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}.$$

   b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f''(x)=\frac{\left(x^2-4x+5\right)\mathrm{e}^x}{(x-1)^3}.$$

   a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :

$$\mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1).$$

5. **a.** Justifier que l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Corrigé

1. **a.** La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc : $\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}>0$.
   Par limite de la somme, on a : $\lim\limits_{x\to 1}x-1=0$, et comme on travaille sur $]-\infty\,;\,1[$, on a $x-1<0$. (on peut noter $\lim\limits_{x\to 1}x-1=0^-$).
   Par limite du quotient, on a : $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\infty$.
   b. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale, d'équation $x=1$.
2. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$;
   Par limite de la somme, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}x-1=-\infty$,
   Par limite du quotient, on en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.
   On en déduit que $\mathscr{C}$ admet également une asymptote, d'équation $y=0$, au voisinage de $-\infty$.

3. **a.** f est dérivable sur $]-\infty\,;\,1[$, en tant que quotient de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle, avec la fonction au dénominateur ne s'annulant pas sur l'intervalle.

$$\forall x \in]-\infty\,;\,1[,\quad f'(x) = \frac{e^x \times (x-1) - e^x \times 1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{e^x \times (x-1-1)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$$

b. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, et pour tout x dans $]-\infty\,;\,1[$, $(x-1)^2$ est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $(x-2)$.

$x-2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$, donc sur $]-\infty\,;\,1[$, $(x-2)$ est strictement négatif, donc $f'(x)$ également.

Finalement, on peut donc en déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$, et donc, on a le tableau de variations suivant (avec les limites justifiées aux questions **1. a.** et **2.**) :

x	$-\infty$		1
signe de $f'(x)$	‖	$-$	‖
variations de f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖

4. **a.** Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on va étudier le signe de $f''(x)$.

Comme, pour tout x dans $]-\infty\,;\,1[$, on a $(x-1) < 0$ et donc $(x-1)^3 < 0$ et $e^x > 0$, on en déduit que le signe de $f''(x)$ est l'opposé du signe du trinôme : $x^2 - 4x + 5$.

Or, ce trinôme a un discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4$ qui est strictement négatif, donc n'admet pas de racine, et donne des images strictement positives (car le coefficient dominant est positif) pour tout réel x.

Rem. On peut écrire :

$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 - 4 + 5 = (x-2)^2 + 1 \geqslant 1 > 0$: le trinôme est positif quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Finalement, la dérivée seconde f'' est à valeurs strictement négatives sur $]-\infty\,;\,1[$, on en déduit que la fonction f est concave sur $]-\infty\,;\,1[$.

b. Pour déterminer l'équation de T, il nous faut connaître $f'(0)$ et $f(0)$:

— $f'(0) = \dfrac{(0-2)e^0}{(0-1)^2} = \dfrac{-2}{1} = -2$;

— $f(0) = \dfrac{e^0}{0-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$.

La formule classique donne une équation pour T :

$y = f'(0)(x-0) + f(0) \iff y = -2x - 1$

L'équation réduite de T est donc : $y = -2x - 1$.

c. Puisque f est concave sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, la courbe $\mathscr{C}$ est donc située sous ses tangentes, notamment sous la tangente T, sur cet intervalle.

Pour tout réel x dans cet intervalle, l'ordonnée d'un point sur la courbe $\mathscr{C}$ (c'est-à-dire $f(x)$) est donc inférieure ou égale à l'ordonnée du point ayant la même abscisse sur la tangente T (or, sur la tangente T, l'ordonnée du point d'abscisse x est $-2x-1$, d'après la question précédente).

On en déduit donc : $x \in]-\infty\,;\,1[\implies f(x) \leqslant -2x-1$

$$\implies \frac{\mathrm{e}^x}{x-1} \leqslant -2x-1$$

$$\implies \mathrm{e}^x \geqslant (x-1)(-2x-1)$$

car sur $]-\infty\,;\,1[$, $\quad x-1<0$

$$\implies \mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1)$$

On arrive donc à l'inégalité demandée.

5. **a.** La fonction f est :

- continue sur $]-\infty\,;\,1[$ (car dérivable sur cet intervalle) ;
- strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$ (d'après la question **3. b.**) ;
- telle que -2 est une valeur intermédiaire entre $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{1} f = -\infty$;

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

b. Comme on a repéré à la question **4. b.** que $f(0) = -1$, on sait que la solution sera à chercher dans l'intervalle $]0\,;\,1[$.

À l'aide de la calculatrice, par balayage, on a :

- $f(0{,}31) \approx -1{,}98 > -2$;
- $f(0{,}32) \approx -2{,}03 < -2$;

Un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} est $0{,}31 < \alpha < 0{,}32[$.