Annales baccalauréat spécialité
Géométrie dans l'espace

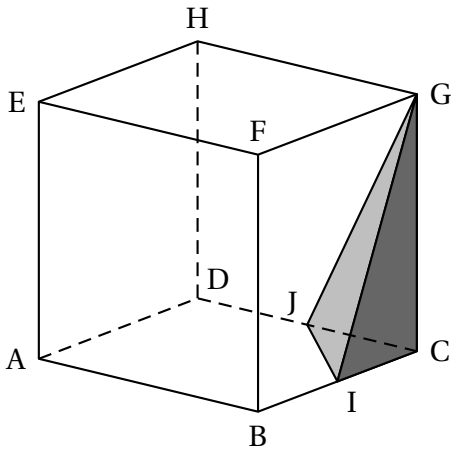
Exercice 1.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les cinq questions sont indépendantes.

1. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la mesure de sa hauteur relative à cette base.
On considère le cube ABCDEFGH de côté de longueur 6 cm représenté ci-dessous :



Le point I est le milieu du segment [BC] et le point J est le milieu du segment [CD].
Le volume du tétraèdre CIJG vaut :

a. 36 cm^3 **b.** 9 cm^3 **c.** 18 cm^3 **d.** 27 cm^3

Pour les questions suivantes, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

2. le plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et passant par le point K(5 ; 3 ; −1) admet pour équation cartésienne :

a. $x-2y+3z-3=0$ **b.** $x-2y+3z+5=0$
c. $x-2y+3z+4=0$ **d.** $5x+3y-z-35=0$

3. On considère les points R(2 ; −1 ; 3), S(4 ; 2 ; 2) et T(−2 ; 3 ; 1).
La droite qui passe par le point T et qui est parallèle à la droite (RS) admet pour représentation paramétrique :

a. $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = 3+3t \\ z = 1+t \end{cases}$ avec t réel

b. $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = 3+3t \\ z = 1-t \end{cases}$ avec t réel

c. $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = 3-t \\ z = 1+3t \end{cases}$ avec t réel

d. $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+3t \\ z = 3-t \end{cases}$ avec t réel

4. Soit Q le plan d'équation cartésienne $2x-y+3z-5=0$ et D la droite qui admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4+2k \\ y = 6+7k \\ z = 3+k \end{cases} \text{ avec } k \text{ réel}$$

On a :

a. La droite D est strictement parallèle au plan Q .

b. La droite D est sécante au plan Q et lui est orthogonale.

c. La droite D est sécante au plan Q mais ne lui est pas orthogonale.

d. La droite D est incluse dans le plan Q.

5. On considère les points M(0 ; 1 ; 2), N(3 ; 0 ; 2) et P(3 ; 1 ; 0). Une mesure en degré, arrondie au dixième près, de l'angle $\widehat{\text{MNP}}$ est :

a. 60,3° **b.** 37,9° **c.** 47,3° **d.** 81,9°

Corrigé

1.

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \text{CJ} \times \text{CI} \times \text{CG} = \frac{1}{6} \times 3 \times 3 \times 6 = 9$$

Réponse b. 9 cm^3

2. Une équation cartésienne de plan dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est de la forme :

$$x-2y+3z+e=0$$

Comme K(5 ; 3 ; −1) appartient au plan :

$$5-2\times 3+3\times(-1)+e=0 \iff e=4$$

Réponse c. $x-2y+3z+4=0$

3. La droite qui passe par le point T et qui est parallèle à la droite (RS) admet pour représentation paramétrique :

a. $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = 3+3t \\ z = 1+t \end{cases}$ avec t réel

b. $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = 3+3t \\ z = 1-t \end{cases}$ avec t réel

c. $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = 3-t \\ z = 1+3t \end{cases}$ avec t réel

d. $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+3t \\ z = 3-t \end{cases}$ avec t réel

On considère M$(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de la droite parallèle à (RS) passant par T.

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{MT}}$ et $\overrightarrow{\text{RS}}$ sont colinéaires. Pour tout point M$(x\,;\,y\,;\,z)$ de la droite, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{\text{MT}} = t \times \overrightarrow{\text{RS}}$$

En écrivant cette relation suivant chacune des coordonnées :

$$\begin{cases} x-(-2) &= t\times(4-2) \\ y-(-1) &= t\times(2-(-1)) \\ z-3 &= t\times(2-3) \end{cases} \iff \begin{cases} x-(-2) &= t\times 2 \\ y-(-1) &= t\times 3 \\ z-3 &= t\times(-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 2+2t \\ y &= -1+3t \\ z &= 3-t \end{cases}$$

Réponse d. $\begin{cases} x &= 2+2t \\ y &= -1+3t \\ z &= 3-t \end{cases}$ avec t réel

4. On détermine si un vecteur normal au plan est colinéaire à un vecteur directeur de la droite (cas où la droite est orthogonale au plan) ou si un vecteur normal au plan est orthogonal à un vecteur directeur de la droite (cas où la droite est strictement parallèle au plan ou incluse dans le plan). Le dernier cas est la droite sécante mais non orthogonale au plan.

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vecteur normal à Q et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de D.

$\vec{n}\cdot\vec{v} = 2\times 2+(-1)\times 7+3\times 1 = 0$

La droite D est donc parallèle au plan Q.

On détermine si la droite et le plan ont un point d'intersection, on remplace les coordonnées d'un point du plan par les coordonnées paramétriques d'un point de la droite. L'existence d'un paramètre k satisfaisant l'équation obtenue est équivalente à l'existence d'un point commun à la droite et au plan.

$$\begin{aligned} 2(-4+2k)-(6+7k)+3(3+k) &= 0 \iff -8+4k-6-7k+9+3k = 0 \\ &\iff -5 = 0 \end{aligned}$$

La dernière égalité étant fausse, il n'existe pas de point appartenant à D et à Q.

Réponse a. La droite D est strictement parallèle au plan Q .

5. On a :

$\overrightarrow{\text{NP}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\left\|\overrightarrow{\text{NP}}\right\| = \sqrt{5}$, $\overrightarrow{\text{NM}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\left\|\overrightarrow{\text{NM}}\right\| = \sqrt{10}$, $\overrightarrow{\text{NP}}\cdot\overrightarrow{\text{NM}} = \left\|\overrightarrow{\text{NP}}\right\|\left\|\overrightarrow{\text{NM}}\right\|\cos\left(\widehat{\text{MNP}}\right)$.

$\cos\left(\widehat{\text{MNP}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{\text{NP}}\cdot\overrightarrow{\text{NM}}}{\left\|\overrightarrow{\text{NP}}\right\|\left\|\overrightarrow{\text{NM}}\right\|} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}$. $\arcsin\left(\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\right) \approx 1{,}429$ en radians. $1{,}429\times\dfrac{180}{\pi} \approx 81{,}9$

Réponse d. 81,9°

Exercice 2.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
On considère les points :

$$A(3;-2;2), \quad B(6;1;5) \quad \text{et} \quad C(6;-2;-1).$$

PARTIE A :

1. Justifier que le triangle ABC est rectangle en A .
2. Soit P le plan d'équation cartésienne $x+y+z-3=0$.
   Montrer que A est un point du plan P.
   On admet que ce plan est orthogonal à la droite (AB).
3. Soit P' le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par A.
   Donner une équation cartésienne de P'.
4. Soit (Δ) la droite d'intersection des deux plans P et P'.
   Justifier qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\begin{cases} x &= t+1 \\ y &= -2t+2 \\ z &= t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

PARTIE B :

Soit D le point de coordonnées $(0;4;-1)$.

1. Montrer que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC).
2. Calculer le volume de la pyramide ABCD.
   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par $V=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.
3. En calculant de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$
   montrer que :
$$\widehat{BDC}=\frac{\pi}{4},$$
4. Justifier que l'aire du triangle BDC est égale à 27.
5. En déduire la distance du point A au plan (BCD).

Corrigé

Partie A

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}:\begin{pmatrix}6-3\\1-(-2)\\5-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}:\begin{pmatrix}6-3\\-2-(-2)\\-1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$$

On a alors : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times3-3\times3=0$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et donc que le triangle ABC est rectangle A.

2. On considère le plan P d'équation cartésienne $x+y+z-3=0$. Les coordonnées du point A vérifient cette équation cartésienne, en effet : $x_A+y_A+z_A-3=3-2+2-3=0$, le point A est donc un point du plan P.

3. On note P' le plan orthogonal à (AC) passant par A. Un vecteur normal à P' est $\overrightarrow{AC}$ qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$. Une équation cartésienne du plan P' est donc de la forme $3x-3z+\delta=0$.

Le point A est dans P', ses coordonnées vérifient son équation cartésienne :

$A\in P' \iff 3x_A-3z_A+\delta=0 \iff 9-6+\delta=0 \iff \delta=-3$.

Une équation de P' est alors $3x-3z-3=0$, ou bien, plus simplement $x-z-1=0$.

4. Soit Δ la droite d'intersection des plans P et P'.

Remarque : d'après leurs équations cartésiennes, ils ne sont pas confondus, ni parallèles car leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires. Les deux plans sont bien sécants selon une droite.

La droite Δ est définie par le système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases}x-z-1=0\\x+y+z-3=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=z+1\\z+1+y+z-3=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=z+1\\y=-2z+2\end{cases} \iff \begin{cases}x=t+1\\y=-2t+2\\z=t\end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

Partie B

1. On considère le point D de coordonnées $(0\,;\,4\,;\,-1)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$ sont alors $\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$. D'où : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=(-3)\times3+6\times3-3\times3=0$;

de même :

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=(-3)\times3+6\times0-3\times(-3)=0$.

La droite (AD) est donc orthogonale aux droites (AB) et (AC) sécantes en A, elle est donc orthogonale au plan (ABC).

2. Calculons le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide ABCD.

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\mathcal{A}(\text{ABC})\times\text{AD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\text{AB}\times\text{AC}\times\text{AD}.$$

Le triangle ABC est en effet rectangle en A, son aire est donc égale à $\frac{1}{2}\times\text{AB}\times\text{AC}$.

Soit

$$\mathcal{V}=\frac{\text{AB}\times\text{AC}\times\text{AD}}{6}.$$

D'après les composantes des trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ calculées précédemment, on obtient :

$\text{AB}=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$;

$\text{AC}=\sqrt{3^2+0^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$;

$\text{AD}=\sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$.

Finalement, en unité de volume :

$$\mathcal{V} = \frac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}}{6} = 27$$

3. Calculons de deux façons différentes le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{\text{DB}} : \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{DC}} : \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

- à l'aide des coordonnées : $\overrightarrow{\text{DB}} \cdot \overrightarrow{\text{DC}} = 6 \times 6 + (-3) \times (-6) = 54$.
- à l'aide de la formule du cosinus : $\overrightarrow{\text{DB}} \cdot \overrightarrow{\text{DC}} = \text{DB} \times \text{DC} \times \cos(\widehat{\text{BDC}})$

On en déduit alors :

$$\cos(\widehat{\text{BDC}}) = \frac{54}{\text{DB} \times \text{DC}} = \frac{54}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 6^2} \times \sqrt{6^2 + (-6)^2}} = \frac{54}{\sqrt{81} \times \sqrt{72}} = \frac{54}{9 \times 6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

et on a bien :

$$\cos(\widehat{\text{BDC}}) = \frac{\pi}{4}.$$

4. Calculons l'aire du triangle DBC en unité d'aire :

$$\mathcal{A}(\text{DBC}) = \frac{1}{2} \times \text{DB} \times \text{DC} \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 27$$

5. Le volume du tétraèdre ABCD peut également être calculé de la façon suivante :

$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}(\text{DBC}) \times \text{d(A, (BCD))}$, où d(A, (BCD)) désigne la distance du point A au plan (BCD).

On en déduit :

$$\text{d(A, (BCD))} = \frac{3\mathcal{V}}{\mathcal{A}(\text{DBC})} = \frac{3 \times 27}{27} = 3$$

Exercice 3.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm.

Partie A

On considère les points de l'espace R(1;0;6), S(1;3;2), T(3,5;7;5) et A(−2,5;8;4,5).

1. Démontrer que les points R, S et T ne sont pas alignés.

2. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (RST).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (RST).

3. a. Vérifier que la point A n'appartient pas au plan (RST).

b. On note d_1 la droite passant par le point A et orthogonale au plan (RST).
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d_1.

c. Soit le point H projeté orthogonal de A sur (RST).
Vérifier que ses coordonnées sont (2,5;6;3).

4. a. Démontrer que le triangle RST est rectangle en S.

b. Vérifier que le volume du tétraèdre ARST est égal à $\frac{625}{24}$ cm^3.

On rappelle que le volume du tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

Partie B

Soit M$(x;y;z)$ un point de la droite d_2 de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4{,}5 + s \\ y = 4 - 4s \\ z = 5{,}5 - 2s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

1. Démontrer que $AM^2 = 21s^2 + 24s + 21$.

2. Déterminer les coordonnées du point M de la droite d_2 pour lesquelles la distance AM est minimale.

Corrigé

Partie A

1. On a $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

Puisque $\frac{0}{2{,}5} \neq \frac{3}{7}$, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ ne sont pas colinéaires et les points R, S et T ne sont pas alignés.

2. a. Les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base du plan (RST).

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{RS} = 0 + 12 - 12 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{RT} = -25 + 28 - 3 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs formant une base du plan (RST) donc le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (RST).

b. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (RST) donc une équation du plan (RST) est de la forme $-10x + 4y + 3z + d = 0$.

Le point R$(1;0;6)$ appartient au plan (RST) donc on doit avoir $-10 \times 1 + 4 \times 0 + 3 \times 6 + d = 0$ soit $d = -8$.

Ainsi, l'équation $-10x + 4y + 3z - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (RST).

3. a. On a $-10x_A + 4y_A + 3z_A - 8 = -10 \times (2{,}5) + 4 \times 8 + 3 \times 4{,}5 - 8 = -25 + 32 + 13{,}5 - 8 \neq 0$.

On en déduit que A n'appartient pas à (RST).

b. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (RST) donc c'est un vecteur directeur de la droite d_1.

De plus, A$(-2{,}5;8;4{,}5) \in d_1$ donc une représentation paramétrique de d_1 est

$$\begin{cases} x = -2{,}5 - 10t \\ y = 8 + 4t \\ z = 4{,}5 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

c. A $\in d_1$ et d_1 est orthogonale au plan (RST) donc le projeté orthogonal de A sur (RST) est le point d'intersection de d_1 et de (RST).

Puisque $-10\times(2{,}5)+4\times6+3\times3-8=-25+24+9-8=0$, le point de coordonnées (2,5;6;3) appartient à (RST).

Puisque le système $\begin{cases}2{,}5=-2{,}5-10t\\6=8+4t\\3=4{,}5+3t\end{cases}$ admet pour solution $t=-\dfrac{1}{2}$, le point de coordonnées (2,5;6;3) appartient à d_1.

Le point de coordonnées (2,5;6;3) appartient à d_1 et à (RST) (qui sont sécants) donc ce point est le point d'intersection de d_1 et (RST). C'est le point H, projeté orthogonal de A sur (RST).

4. a. $\overrightarrow{\text{SR}}\cdot\overrightarrow{\text{ST}}=0\times2{,}5-3\times4+4\times3=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{SR}}$ et $\overrightarrow{\text{ST}}$ sont orthogonaux donc les droites (SR) et (ST) sont orthogonale (et perpendiculaires, car sécantes en S) et le triangle RST est rectangle en S.

b. Pour calculer le volume du tétraèdre, on choisit le triangle RST comme base et la hauteur associée est la droite (AH).

Ainsi $\mathcal{V}_{ARST}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}SR\times ST\times AH$

Or $SR=\sqrt{0^2+(-3)^2+(-4)^2}=5$,

$ST=\sqrt{2{,}5^2+4^2+3^2}=\sqrt{31{,}25}$,

et $AH=\sqrt{5^2+(-2)^2+(-1{,}5)^2}=\sqrt{31{,}25}$.

Donc $\mathcal{V}_{ARST}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times5\times\sqrt{31{,}25}\times\sqrt{31{,}25}=\dfrac{625}{24}$.

Comme l'unité graphique du repère est le centimètre, toutes les longueurs ont été exprimées en centimètre, et l'unité de volume est bien le cm^3, on a bien $\mathcal{V}_{ARST}=\dfrac{625}{24}$ cm^3.

Partie B

1. $\text{AM}^2=(x_M-x_A)^2+\left(y_M-y_A\right)^2+(z_M-z_A)^2=(-2+s)^2+(-4-4s)^2+(1-2s)^2$

$=4-4s+s^2+16+32s+16s^2+1-4s+4s^2=21s^2+24s+21$

On arrive bien à l'expression souhaitée.

2. La fonction du second degré $x\longmapsto21s^2+24s+21$ admet un minimum en $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{24}{42}=-\dfrac{6\times4}{6\times7}=-\dfrac{4}{7}$.

Ainsi la distance est minimale pour $s=-\dfrac{4}{7}$ soit pour $\text{M}\left(-\dfrac{71}{14};\dfrac{44}{7};\dfrac{93}{14}\right)$.

Exercice 4.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Les affirmations sont indépendantes.
Pour toutes les questions, l'espace est muni d'un repère orthonormé.

1. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ trois vecteurs de l'espace .

   Affirmation 1 : Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.

2. Soit quatre points de l'espace :

$$\text{A}(1\,;2\,;3),\ \text{B}(2\,;0\,;1),\ \text{C}(0\,;1\,;2),\ \text{D}(0\,;4\,;-1)$$

   On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   Affirmation 2 : La droite (CD) est orthogonale au plan (ABC).

3. Soit d une droite de l'espace dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= 2t \\ y &= -2+4t \\ z &= -2+t \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

   Soit P_1 le plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et passant par E(1 ; 1 ; −1).

   Affirmation 3 : L'intersection de la droite d et du plan P_1 est le point M(2 ; 2 ; −1).

4. Soit N(2 ; 0 ; −2) et H(1 ; −2 ; 0) deux points de l'espace.
   Soit P_2 le plan d'équation cartésienne $x+2y-2z+3=0$.
   Affirmation 4 : La distance de N au plan P_2 est NH.

Corrigé

1. **Affirmation 1** :

   Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (la première coordonnée de $\vec{v}$ est nulle, pas celle de $\vec{u}$).

   On cherche deux réels a et b tels que $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$: $\begin{cases}2=a\\1=b\\0=2a+3b\end{cases}\iff\begin{cases}a=2\\b=1\\0=7\end{cases}$

   La dernière ligne est fausse : le vecteur $\vec{w}$ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les trois vecteurs ne sont donc pas coplanaires : ils forment une base de l'espace.

   L'affirmation est **vraie**.

2. **Affirmation 2** :

   On a $\overrightarrow{\text{CD}}\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Les points A, B et C n'étant pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base du plan (ABC).

$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times 1 + 3 \times (-2) + (-3) \times (-2) = 0$ et $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times (-1) + 3 \times (-1) + (-3) \times (-1) = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est orthogonal à deux vecteurs formant une base du plan (ABC) donc le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est normal au plan (ABC) et la droite (CD) est orthogonale au plan (ABC).

L'affirmation est **vraie**.

3. **Affirmation 3** :

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan P_1 donc une équation du plan P_1 est de la forme

$$x - 2y + 3z + d = 0$$

Le point E(1 ; 1 ; −1) appartient au plan P_1 donc on doit avoir $1 - 2 \times 1 + 3 \times (-1) + d = 0$ soit $d = 4$.

Ainsi, l'équation $x - 2y + 3z + 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan P_1.

Le point M(2 ; 2 ; −1) appartient bien à la droite d (pour $t = 1$), mais :

$x_M - 2y_M + 3z_M + 4 = 2 - 4 - 3 + 4 = -1 \neq 0$.

On en déduit que M n'appartient pas à P_1 : ce n'est donc pas le point d'intersection de d et P_1.

L'affirmation est **fausse**.

4. **Affirmation 4** :

La distance du point N au plan P_2 est la distance NH où H est le projeté orthogonal de N sur le plan P_2. Il faut donc vérifier que H appartient à P_2 et que le vecteur $\overrightarrow{NH}$ est normal à P_2.

On a $1 + 2 \times (-2) - 2 \times 0 + 3 = 0$

Les coordonnées de H vérifient l'équation du plan P_2 donc H appartient à P_2.

Le vecteur $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ est normal au plan P_2 et $\overrightarrow{NH}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{NH} = -\overrightarrow{n_2}$: les vecteurs $\overrightarrow{NH}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{NH}$ est normal à P_2.

H est donc le projeté orthogonal de N sur P_2 et la distance de N au plan P_2 est $NH = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$.

L'affirmation est **vraie**.

Exercice 5.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(-1;1;1),\quad B(1;-6;-1)\quad \text{et}\quad C(-5;2;3).$$

1. **a.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\-2\\13\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

c. En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

$$6x-2y+13z-5=0.$$

2. On considère le plan (P) d'équation cartésienne $8x-2y-4z+18=0$.

On admet que deux plans sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux.

Démontrer que les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.

3. Soit (d) une droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases}x=-4+t\\y=-11+6t\\z=2-t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Démontrer que la droite (d) intersecte le plan (ABC) en un unique point qu'on nommera E, et qui a pour coordonnées E$(-3;-5;1)$.

4. Soit H$(-2;1;0)$.

a. Montrer que H est le projeté orthogonal de A sur (d).

b. En déduire la distance du point A à la droite (d).

c. Montrer que le triangle AHE est rectangle et que son aire est égale à $\sqrt{19}$ unités d'aire.

Corrigé

1. **a.** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-7\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$. On voit que les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles : les vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés : ils déterminent donc un plan (ABC).

b. On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=12+14-26=0$; de même
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-24-2+26=0$.
Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : c'est donc un vecteur normal à ce plan (ABC).

c. On sait que les coordonnées du vecteur $\vec{n}$ sont les coefficients respectifs de x, y et z dans l'équation du plan (ABC), soit
$M(x;y;z)\in(\text{ABC})\iff 6x-2y+13z+d=0$,
avec $d\in\mathbb{R}$.
En particulier on a $A(-1;1;1)\in\text{ABC})\iff 6\times(-1)-2\times1+13\times1+d=0\iff -6-2+13+d=0\iff 5+d=0\iff d=-5$.
Conclusion : $M(x;y;z)\in(\text{ABC})\iff 6x-2y+13z-5=0$.

2. Comme on l'a vu à la question précédente les coefficients respectifs de x, y et z dans l'équation du plan (P) sont les coordonnées d'un vecteur $\vec{p}$ normal à ce plan.

On a donc $\vec{p}\begin{pmatrix}8\\-2\\-4\end{pmatrix}$.

Or $\vec{n}\cdot\vec{p} = 6\times8-2\times(-2)+13\times(-4) = 48+4-52 = 0$: d'après la propriété admise les deux vecteurs normaux aux deux plans sont orthogonaux donc les deux plans sont orthogonaux.

3. La droite (d) est sécante au plan (ABC) s'il existe un point dont les coordonnées vérifient les équations paramétriques de (d) et l'équation cartésienne du plan (ABC), autrement dit si les coordonnées $(x;y;z)$ vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases} x & = & -4+t \\ y & = & -11+6t \\ z & = & 2-t \\ 6x-2y+13z-5 & = & 0 \end{cases}$$

En remplaçant x, y et z par leurs expressions en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$6(-4+t)-2(-11+6t)+13(2-t)-5=0 \iff -24+6t+22-12t+26-13t-5=0$,

soit enfin $\quad 19-19t=0 \iff 19=19t \iff 1=t$.

En reportant cette valeur $t=1$ dans les équations paramétriques de (d), on obtient $\quad x=-4+1=-3$, $\ y=-11+6=-5$, $\ z=2-1=1$.

La droite (d) et le plan (ABC) ont bien un point commun E$(-3;-5;1)$.

4. **a.** H est le projeté orthogonal de A sur (d) si :

- H $\in (d)$, ce qui est aisé à voir en prenant la valeur $t=2$ dans les équations paramétriques de (d) qui conduit bien aux coordonnées $(-2;1;0)$ qui sont bien celles de H ;
- la droite (AH) est perpendiculaire à (d) ;

Or $\overrightarrow{\text{AH}}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{\delta}\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d) (d'après ses équations paramétriques)

et $\overrightarrow{\text{AH}}\cdot\vec{\delta} = -1+0+1=0$, ce qui montre que les vecteurs $\overrightarrow{\text{AH}}$ et $\vec{\delta}$ sont orthogonaux donc que les droites (AH) et (d) sont perpendiculaires.

Le point H est le projeté orthogonal de A sur (d).

b. La distance du point A à la droite (d) est la distance de A à son projeté orthogonal sur la droite (d), soit la distance AH.

Des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AH}}$, on calcule $\text{AH}^2 = (-1)^2+0^2+1^2 = 1+1=2$. Conclusion AH $=\sqrt{2}$.

c. H et E sont deux points de (d) et la droite (AH) est perpendiculaire à (d) : le triangle AHE est donc rectangle en H et son aire est égale au demi-produit des longueurs de ses côtés perpendiculaires :

$\mathscr{A}(\text{AHE}) = \dfrac{\text{AH}\times\text{HE}}{2}$

On a $\text{HE}^2 = (-3+2)^2+(-5-1)^2+(1-0)^2 = 1+36+1=38$, d'où HE $=\sqrt{38}$ et

$\mathscr{A}(\text{AHE}) = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{38}}{2} = \dfrac{\sqrt{76}}{2} = \dfrac{\sqrt{76}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\dfrac{76}{4}} = \sqrt{19}$.

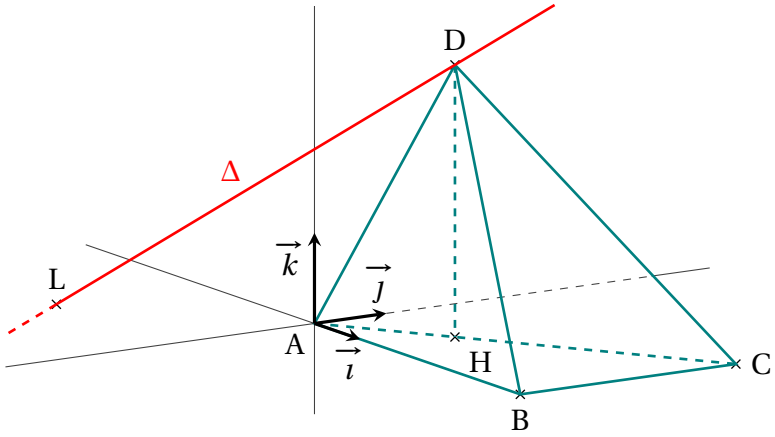
Exercice 6.

Dans une salle d'escalade, un nouveau module en forme de tétraèdre, destiné à être posé au sol, est en cours de fabrication.
Ce module servira à créer des plans inclinés.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
L'unité est le mètre.

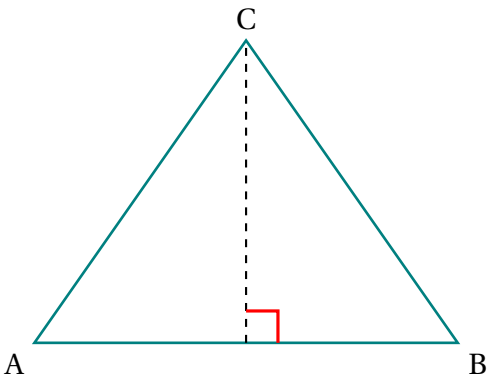
On considère les trois points suivants : $B\left(\frac{9}{2};0;0\right)$, $C\left(\frac{9}{4};3;0\right)$ et $D\left(\frac{3}{2};1;3\right)$.

On modélise le module par le tétraèdre ABCD.
On souhaite analyser ce module pour des raisons de construction et de sécurité.



Partie A

1. On représente ci-contre le triangle ABC et sa hauteur issue de C.



a. Montrer que le triangle ABC est isocèle en C.

b. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $6{,}75\,\text{m}^2$.

2. **a.** Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $z = 0$.

b. Montrer que le point $H\left(\frac{3}{2};1;0\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

3. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à la base $\mathcal{B}$.
En déduire le volume du module.

Partie B

1. On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}$.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est :

$$4x+3y+3z-18=0.$$

c. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (BCD) et passant par D.

2. On admet que la droite Δ et le plan (ABC) sont sécants et on désigne par L leur point d'intersection.

Montrer que L a pour coordonnées $\left(-\frac{5}{2};-2;0\right)$.

3. Le module est considéré adapté aux débutants si l'angle $\widehat{\text{LDH}}$ est strictement inférieur à 60 °.

Montrer que ce module est adapté aux débutants.

Corrigé

Partie A

1. a. Comme le repère est orthonormé :

- $\text{AC}=\sqrt{\left(\frac{9}{4}-0\right)^2+(3-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{\frac{81}{16}+9}=\sqrt{\frac{81}{16}+\frac{144}{16}}=\sqrt{\frac{225}{16}}=\frac{15}{4}$;
- $\text{CB}=\sqrt{\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}\right)^2+(3-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2+9}=\sqrt{\frac{81}{16}+\frac{144}{16}}=\sqrt{\frac{225}{16}}=\frac{15}{4}$;

Les longueurs sont égales, donc le triangle est bien isocèle en C.

b. • Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi une médiane (et une médiatrice).

La hauteur issue de C est donc le segment [CI], où I est le milieu de [AB].

I a donc pour coordonnées : $\text{I}\left(\frac{x_\text{A}+x_\text{B}}{2};\frac{y_\text{A}+y_\text{B}}{2};\frac{z_\text{A}+z_\text{B}}{2}\right)$ soit $\left(\frac{9}{4};0;0\right)$.

- L'aire d'un triangle est donnée par : $\mathscr{A}=\frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}$.

Ici, on choisit comme base le segment [AB] et la hauteur correspondante, [CI].

- La distance AB est : $\text{AB}=\sqrt{\left(\frac{9}{2}-0\right)^2+(0-0)^2+(0-0)^2}=\frac{9}{2}$;

La distance CI est : $\text{CI}=\sqrt{\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)^2+(3-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{9}=3$;

On a donc : $\mathscr{A}_\text{ABC}=\frac{\text{AB}\times\text{CI}}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\times3=\frac{27}{4}=6{,}75$.

L'aire du triangle ABC est bien égale à 6,75 m^2.

2. a. On a : $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$. et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}\frac{9}{4}\\3\\0\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ont des coordonnées non proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont pas alignés, donc ils définissent un plan.

De plus $z_A = z_B = z_C = 0$

donc une équation cartésienne du plan (ABC) est bien : $z = 0$.

b. H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) si et seulement si

$\begin{cases} H \in (ABC) \\ \text{la droite (HD) est orthogonale au plan (ABC)} \end{cases}$.

- $z_H = 0$ donc $H \in (ABC)$
- $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} x_D - x_H \\ y_D - y_H \\ z_D - z_H \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \\ 1 - 1 \\ 3 - 0 \end{pmatrix}$ finalement : $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

  Or, une équation cartésienne du plan (ABC) étant $z = 0$, un vecteur normal au plan (ABC) est $\vec{m}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Les vecteurs $\vec{m}$ et $\overrightarrow{HD}$ sont colinéaires, donc la droite (HD) est orthogonale au plan (ABC).

Donc le point $H\left(\frac{3}{2}; 1; 0\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

3. Avec les questions précédentes, on a calculé l'aire du triangle ABC, qui est l'une des quatre bases possibles pour le tétraèdre.

Si on choisit ABC comme base de ABCD, alors la hauteur correspondante est la distance séparant le quatrième sommet (ici D), du plan contenant la base ABC, c'est-à-dire le plan (ABC).

Cette distance est donc la distance séparant D de son projeté orthogonal sur (ABC), c'est-à-dire H, dont on a déterminé les coordonnées à la question **2 b.**.

$DH = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = 3$.

On a donc : $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times DH = \frac{1}{3} \times 6,75 \times 3 = 6,75$.

Le volume du module est égal à $6,75\,m^3$.

Partie B

1. a. Déterminons les coordonnées des vecteurs :

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \\ z_C - z_B \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} \frac{9}{4} - \frac{9}{2} \\ 3 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$ finalement : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ont des coordonnées non proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires.

Les points B, C et D ne sont pas alignés, donc ils définissent un plan.

On est dans un repère orthonormé, donc on peut utiliser la formule analytique du produit scalaire :

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \times \frac{-9}{4} + 3 \times 3 + 3 \times 0 = -9 + 9 + 0 = 0$;
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 4 \times (-3) + 3 \times 1 + 3 \times 3 = -12 + 3 + 9 = 0$;
- $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont deux vecteurs non colinéaires qui forment une base du plan (BCD).

$\vec{n}$ est orthogonal à ces deux vecteurs, donc c'est un vecteur normal du plan (BCD).

b. Si $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD), alors, par propriété, une équation du plan (BCD) peut avoir la forme : $4\times x+3\times y+3\times z+d=0$, où d est un réel.

Comme B est un point de (BCD), on doit avoir : $4x_B+3y_B+3z_B+d=0$.

$$\begin{aligned}4x_B+3y_b+3z_B+d=0 &\iff 4\times\frac{9}{2}+3\times 0+3\times 0+d=0\\ &\iff 18+d=0\\ &\iff d=-18\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (BCD) est donc bien : $4x+3y+3z-18=0$.

c. Si la droite Δ est orthogonale au plan (BCD), alors, par définition, elle doit être dirigée par un vecteur normal au plan (BCD), donc ici, on en déduit que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}$ dirige la droite Δ.

Comme la droite Δ passe par le point $D\left(\frac{3}{2};1;3\right)$, une représentation paramétrique de la droite Δ est donnée par : $\begin{cases}x=x_D+x_{\vec{n}}\times t\\ y=y_D+y_{\vec{n}}\times t\\ z=z_D+z_{\vec{n}}\times t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

En remplaçant par les valeurs connues, on a : $\begin{cases}x=\frac{3}{2}+4t\\ y=1+3t\\ z=3+3t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

2. Le point L est l'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

Comme c'est un point de la droite Δ, il existe un réel t_0 tel que les coordonnées de ce point sont $\left(\frac{3}{2}+4t_0;1+3t_0;3+3t_0\right)$.

C'est aussi un point de (ABC) dont ses coordonnées vérifient l'équation du plan.

Autrement dit, t_0 est solution de l'équation :

$$\begin{aligned}3+3t_0=0 &\iff 3t_0=-3\\ &\iff t_0=-1\end{aligned}$$

Le point L a donc pour coordonnées : $\left(\frac{3}{2}-4;1-3;3-3\right)$ soit $L\left(-\frac{5}{2};-2;0\right)$.

3. Afin de déterminer l'angle $\widehat{LDH}$, calculons le produit scalaire $\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{DH}$ de deux manières différentes.

On a $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$. et $\overrightarrow{DL}\begin{pmatrix}-4\\-3\\-3\end{pmatrix}$.

Nous sommes dans un repère orthonormé, nous pouvons utiliser la formule analytique :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{DL} &= x_{DH}\times x_{DL}+y_{DH}\times y_{DL}+z_{DH}\times z_{DL}\\ &= 0\times(-4)+0\times(-3)-3\times(-3)\\ &= 9\end{aligned}$$

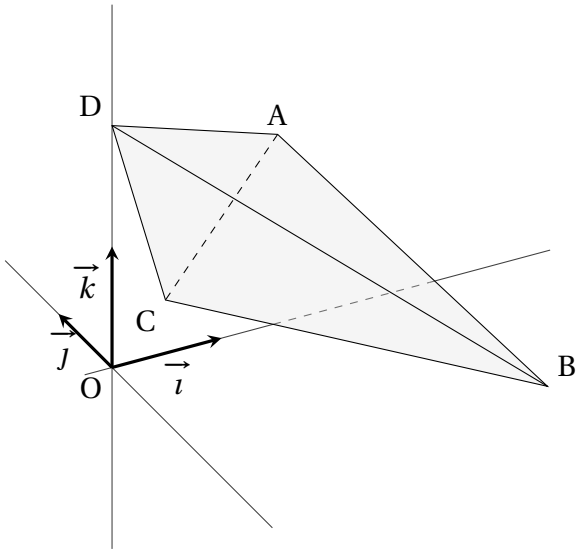
On a aussi : $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{DL}=\left\|\overrightarrow{DH}\right\|\times\left\|\overrightarrow{DL}\right\|\times\cos(\widehat{LDH})$

Calculons la longueur DL : $DL=\sqrt{(-4)^2+3^2+3^2}=\sqrt{16+9+9}=\sqrt{34}$

En remplaçant dans la formule précédente on obtient :
$9 = 3 \times \sqrt{34} \times \cos(\widehat{LDH})$
D'où : $\cos(\widehat{LDH}) = \dfrac{9}{3\sqrt{34}} = \dfrac{3\sqrt{34}}{34}$
donc $\widehat{LDH} \approx 59{,}04\,°$.
L'angle $\widehat{LDH}$ est strictement inférieur à 60 ° donc le module est bien adapté aux débutants.

Exercice 7.

Dans le repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :
A(2;1;1), B(3;−2;0), C(0;−1;1) et D(0;0;2).



1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x - y + 4z - 5 = 0.$$

3. Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et orthogonale au plan (ABC) est donnée par :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

4. Montrer que le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est le point $H\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$.

5. **a.** Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

b. Montrer que l'aire du triangle ABC est $3\sqrt{2}$.

6. **a.** En déduire que le volume du tétraèdre ABCD est égal à 1.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

b. On admet que la distance du point A au plan (BCD) est égale à $\sqrt{2}$.
En déduire l'aire du triangle BCD.

7. Dans cette question, on note D_k le point ayant pour coordonnées $(0;0;k)$, où k est un réel.

a. Déterminer la valeur de k pour laquelle les points A, B, C et D_k sont coplanaires.
Quel est alors le projeté orthogonal du point D_k sur le plan (ABC) ?

b. Peut-on trouver une valeur de k telle que A soit le projeté orthogonal de D_k sur le plan (ABC) ?

Corrigé

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-2 \\ -2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix}$ finalement : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Ces vecteurs ont des coordonnées non proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires.
Les points A, B et C ne sont pas alignés, donc ils définissent un plan.

2. **a.** On est dans un repère orthonormé, donc on peut utiliser la formule analytique du produit scalaire :

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 - 1 \times (-3) + 4 \times (-1) = 1 + 3 - 4 = 0$;
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) - 1 \times (-2) + 4 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0$;
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires qui forment une base du plan (ABC).
  $\vec{n}$ est orthogonal à ces deux vecteurs, donc c'est un vecteur normal du plan (ABC).

b. Si $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal à (ABC), alors, par propriété, une équation de (ABC) peut avoir la forme : $1 \times x + (-1) \times y + 4 \times z + d = 0$, où d est un réel.
Comme A est un point de (ABC), on doit avoir : $x_A - y_A + 4z_A + d = 0$.

$$\begin{aligned} x_A - y_A + 4z_A + d = 0 &\iff 2 - 1 + 4 \times 1 + d = 0 \\ &\iff 5 + d = 0 \\ &\iff d = -5 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (ABC) est donc bien : $x - y + 4z - 5 = 0$.

3. Si la droite Δ est orthogonale au plan (ABC), alors, par définition, elle doit être dirigée par un vecteur normal au plan (ABC), donc ici, on en déduit que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ dirige la droite Δ.
Comme la droite Δ passe par le point D(0;0;2), une représentation paramétrique de la droite Δ est donnée par : $\begin{cases} x = x_D + x_{\vec{n}} \times t \\ y = y_D + y_{\vec{n}} \times t \\ z = z_D + z_{\vec{n}} \times t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

En remplaçant par les valeurs connues, on a bien : $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

4. Le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est l'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
Comme c'est un point de la droite Δ, il existe un réel t_0 tel que les coordonnées de ce point sont $(t_0;-t_0;2+4t_0)$.
C'est aussi un point de (ABC) sont ses coordonnées vérifient l'équation du plan.
Autrement dit, t_0 est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} t_0-(-t_0)+4(2+4t_0)-5=0 &\iff t_0+t_0+8+16t_0-5=0\\ &\iff 18t_0=-3\\ &\iff t_0=\frac{-1}{6}\end{aligned}$$

Le point H a donc pour coordonnées : $\left(\frac{-1}{6};-\frac{-1}{6};2+4\times\frac{-1}{6}\right)$ soit $\mathrm{H}\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{6};\frac{4}{3}\right)$.

5. a. Comme le repère est orthonormé :

- $\mathrm{AB}=\sqrt{(3-2)^2+(-2-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{1^2+(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$;
- $\mathrm{CB}=\sqrt{(3-0)^2+(-2-(-1))^2+(0-1)^2}=\sqrt{3^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$;

Les longueurs sont égales, donc le triangle est bien isocèle en B.

b. • Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi une médiane (et une médiatrice).
La hauteur issue de B est donc le segment [BI], où I est le milieu de [AC].
I a donc pour coordonnées : $\mathrm{I}\left(\frac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{C}}{2};\frac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{C}}{2};\frac{z_\mathrm{A}+z_\mathrm{C}}{2}\right)$ soit $(1;0;1)$.

- L'aire d'un triangle est donnée par : $\mathscr{A}=\dfrac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}$.
Ici, on choisit comme base le segment [AC] et la hauteur correspondante, [BI].
- La distance AC est : $\mathrm{AC}=\sqrt{(0-2)^2+(-1-1)^2+(1-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.
La distance BI est : $\mathrm{BI}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{9}=3$.

On a donc : $\mathscr{A}_{\mathrm{ABC}}=\dfrac{\mathrm{AC}\times\mathrm{BI}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}\times3}{2}=3\sqrt{2}$.

6. a. Avec les questions précédentes, on a calculé l'aire du triangle ABC, qui est l'une des quatre bases possibles pour le tétraèdre.
Si on choisit ABC comme base de ABCD, alors la hauteur correspondante est la distance séparant le quatrième sommet (ici D), du plan contenant la base ABC, c'est-à-dire le plan (ABC).
Cette distance est donc la distance séparant D de son projeté orthogonal sur (ABC), c'est-à-dire H, dont on a déterminé les coordonnées à la question **4.**.

$$\mathrm{DH}=\sqrt{\left(\frac{-1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{4}{3}-2\right)^2}=\sqrt{\frac{18}{36}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On a donc : $\mathscr{V}_{\mathrm{ABCD}}=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}_{\mathrm{ABC}}\times\mathrm{DH}=\dfrac{1}{3}\times3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\times2}{2}=1$.
Le volume du tétraèdre est bien égal à 1.

b. En faisant le même raisonnement, mais avec la base BCD et la hauteur associée, issue de A, que l'on peut noter h, on en déduit : $\mathscr{V}_{\mathrm{ABCD}}=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}_{\mathrm{BCD}}\times h$.

En remplaçant par les valeurs connues, on a : $1=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}_{\mathrm{BCD}}\sqrt{2}\iff\mathscr{A}_{\mathrm{BCD}}=\dfrac{1\times3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

L'aire du triangle BCD est donc égale à $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

7. a. Avec D_k ayant pour coordonnées $(0;0;k)$ (le point D du début de l'énoncé est donc D_2).
On va chercher quand ces coordonnées vérifient l'équation du plan (ABC).

$$\begin{aligned} D_k \in (ABC) &\iff x_{D_k} - y_{D_k} + 4z_{D_k} - 5 = 0 \\ &\iff 0 - 0 + 4k - 5 = 0 \\ &\iff k = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Seul le point $D_{\frac{5}{4}}$ est sur le plan (ABC).
Son projeté orthogonal sur (ABC) est alors lui-même, par définition du projeté orthogonal.

b. Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD_k}$: $\overrightarrow{AD_k}\begin{pmatrix}-2\\-1\\k-1\end{pmatrix}$. On rappelle : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$.
Quelle que soit la valeur de k, ces vecteurs ne sont pas colinéaires : ils ont des ordonnées égales, mais des abscisses différentes.
Donc le vecteur $\overrightarrow{AD_k}$ n'est jamais orthogonal au plan (ABC) et donc A n'est jamais le projeté orthogonal de D_k sur (ABC).

Exercice 8.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.
On considère les points A(1 ;2 ; −1), B(0 ;3 ; 2), C(−2 ;4 ; 0) et D(8 ;2 ; −11).

1. a. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\8\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $5x + 8y - z - 22 = 0$.

d. Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (ABC).

2. a. On considère la droite Δ, orthogonale au plan (ABC) et passant par D.
Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = 8 + 5t \\ y = 2 + 8t \\ z = -11 - t \end{cases}, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

b. On appelle E le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
Démontrer que le point E a pour coordonnées $\left(\frac{11}{2}\,;\,-2\,;\,-\frac{21}{2}\right)$.

c. En déduire la valeur exacte de la longueur DE, distance du point D au plan (ABC).

3. On note H le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}\,;\frac{10}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$.
On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (BC) est :

$$\begin{cases} x = -2k \\ y = 3+k \\ z = 2-2k \end{cases}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Avec un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats suivants :

Entrée 1 : $(-2/3-1)*(-2)+(10/3-2)*1+(4/3-(-1))*(-2)$ **Sortie 1 :** $\rightarrow 0$
Entrée 2 : RésoudreSystème$(-2k=-2/3,\ 3+k=10/3,\ 2-2k=4/3)$ **Sortie 2 :** $\rightarrow k=1/3$
Entrée 3 : RacineCarrée$\left((-2/3-1)^2+(10/3-2)^2+(4/3+1)^2\right)$ **Sortie 3 :** $\rightarrow$ RacineCarrée(10)
Entrée 4 : RacineCarrée$\left((-2-0)^2+(4-3)^2+(0-2)^2\right)$ **Sortie 4 :** $\rightarrow 3$

a. En utilisant les deux premiers résultats obtenus avec la feuille de calculs ci-dessus, justifier que le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

b. En exploitant les autres résultats obtenus avec la feuille de calculs ci-dessus, déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.

Corrigé

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

On considère les points A(1 ;2 ; −1), B(0 ;3 ; 2), C(−2 ;4 ; 0) et D(8 ;2 ; −11).

1. **a.** Les points A, B et C définissent un plan si et seulement si ils ne sont pas alignés, si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 3-2 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

De même le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 4-2 \\ 0-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Or $x_{\overrightarrow{AB}} \times 3 = x_{\overrightarrow{AC}}$ et $y_{\overrightarrow{AB}} \times 3 = 3 \neq y_{\overrightarrow{AC}}$; donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

On en conclut que les trois points A, B et C définissent un plan.

b. On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 5 \times (-1) + 8 \times 1 + (-1) \times 3 = -5 + 8 - 3 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times (-3) + 8 \times 2 + (-1) \times 1 = -15 + 16 - 1 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{\text{AM}} \perp \vec{n}$.

$\overrightarrow{\text{AM}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\text{AM}} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{\text{AM}} \cdot \vec{n} = 0 \iff (x-1)\times 5 + (y-2)\times 8 + (z+1)\times(-1) = 0$$
$$\iff 5x - 5 + 8y - 16 - z - 1 = 0 \iff 5x + 8y - z - 22 = 0$$

Donc le plan (ABC) a pour équation cartésienne : $5x + 8y - z - 22 = 0$.

d. On regarde si les coordonnées de D vérifient l'équation du plan.

$5x_{\text{D}} + 8y_{\text{D}} - z_{\text{D}} - 22 = 8\times 5 + 8\times 2 - (-11) - 22 = 40 + 16 + 11 - 22 = 45 \neq 0$

Donc le point D n'appartient pas au plan (ABC).

2. **a.** On considère la droite Δ, orthogonale au plan (ABC) et passant par D.

La droite Δ est orthogonale au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur n'importe quel vecteur normal au plan, en particulier le vecteur $\vec{n}$.

La droite Δ est donc l'ensemble des points M $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{\text{DM}}$ et $\vec{n}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{\text{DM}} = t.\vec{n}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{\text{DM}} = t.\vec{n} \iff \begin{cases} x-8 &= 5t \\ y-2 &= 8t \\ z-(-11) &= -t \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 8+5t \\ y &= 2+8t \\ z &= -11-t \end{cases}$$

Donc une représentation paramétrique de la droite Δ est : $\begin{cases} x &= 8+5t \\ y &= 2+8t, \text{ avec } t \in \mathbb{R} \\ z &= -11-t \end{cases}$

b. On appelle E le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

- Le point E appartient au plan (ABC) donc $5x_{\text{E}} + 8y_{\text{E}} - z_{\text{E}} - 22 = 0$.
- Le point E appartient à la droite Δ donc il existe un réel t tel que $\begin{cases} x_{\text{E}} &= 8+5t \\ y_{\text{E}} &= 2+8t \\ z_{\text{E}} &= -11-t \end{cases}$

Le réel t vérifie donc l'équation : $5(8+5t) + 8(2+8t) - (-11-t) - 22 = 0$, c'est-à-dire : $40 + 25t + 16 + 64t + 11 + t - 22 = 0$ soit : $90t + 45 = 0$ donc : $t = -\dfrac{1}{2}$

On a donc : $\begin{cases} x_{\text{E}} &= 8+5\times\left(-\frac{1}{2}\right) \\ y_{\text{E}} &= 2+8\times\left(-\frac{1}{2}\right) \\ z_{\text{E}} &= -11-\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} x_{\text{E}} &= \frac{11}{2} \\ y_{\text{E}} &= -2 \\ z_{\text{E}} &= -\frac{21}{2} \end{cases}$

c. La valeur exacte de la longueur DE, distance du point D au plan (ABC) est :

$$\text{DE} = \sqrt{(x_{\text{E}}-x_{\text{D}})^2 + \left(y_{\text{E}}-y_{\text{D}}\right)^2 + (z_{\text{E}}-z_{\text{D}})^2} = \sqrt{\left(\frac{11}{2}-8\right)^2 + (-2-2)^2 + \left(-\frac{21}{2}-(-11)\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + (-4)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 16 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{90}{4}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

3. On note H le point de coordonnées $\left(-\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{10}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$.

On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (BC) est :

$$\begin{cases} x = & -2k \\ y = 3 + k & , \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}. \\ z = 2 - 2k \end{cases}$$

Avec un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats suivants :

Entrée 1 : $(-2/3-1)*(-2)+(10/3-2)*1+(4/3-(-1))*(-2)$ **Sortie 1 :** $\rightarrow 0$
Entrée 2 : RésoudreSystème$(-2k=-2/3,\ 3+k=10/3,\ 2-2k=4/3)$ **Sortie 2 :** $\rightarrow k=1/3$
Entrée 3 : RacineCarrée$\left((-2/3-1)^2+(10/3-2)^2+(4/3+1)^2\right)$ **Sortie 3 :** $\rightarrow$ RacineCarrée(10)
Entrée 4 : RacineCarrée$\left((-2-0)^2+(4-3)^2+(0-2)^2\right)$ **Sortie 4 :** $\rightarrow 3$

a.

- $\overrightarrow{\text{AH}}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}-1 \\ \frac{10}{3}-2 \\ \frac{4}{3}-(-1) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}$: $\begin{pmatrix} -2-0 \\ 4-3 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

  Le premier résultat de la feuille de calculs signifie que le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AH}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}}$ est nul, donc que (AH) $\perp$ (BC).

- D'après le 2e résultat de la feuille de calculs, le système $\begin{cases} -2k &= -\frac{2}{3} \\ 3+k &= \frac{10}{3} \\ 2-2k &= \frac{4}{3} \end{cases}$ admet une solution unique ; donc les coordonnées de H vérifient la représentation paramétrique de la droite (BC).

  Donc le point H appartient à la droite (BC).

De ces deux résultats, on peut déduire que le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

b. On veut déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

Le volume du tétraèdre ABCD est égal à un tiers du produit de l'aire de la base ABC par la hauteur h relative à cette base.

- La hauteur h est la distance entre le point D et le plan (ABC), c'est-à-dire DE soit $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.
- D'après la question précédente, [AH] est la hauteur du triangle ABC relative au côté [BC] ; donc l'aire du triangle ABC est : $\mathscr{A} = \dfrac{\text{AH} \times \text{BC}}{2}$.

  D'après le 3e résultat de la feuille de calculs, on a : AH $= \sqrt{10}$.

  D'après le 4e résultat de la feuille de calculs, on a : BC $= 3$.

  On en déduit que $\mathscr{A} = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

Le volume du tétraèdre ABCD est égal à : $\frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{10}}{2} \times \frac{3\sqrt{10}}{2} = \frac{15}{2}$.

Exercice 9.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse donnée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère :

- les points $S(-1\,;\,\sqrt{2}\,;-4)$, $A(2\,;\,\sqrt{2}\,;\,-1)$, $B(1\,;\,\sqrt{2}\,;0)$ et $C(2\,;\,0\,;-1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$\begin{cases} x = 2-k \\ y = \sqrt{2}\,k \\ z = -1-k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}\,;$$

- le plan P dont une équation cartésienne est : $x - z + 1 = 0$.

On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 1 : Le vecteur $\overrightarrow{SA}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 2 : Les droites (SB) et d sont sécantes.

Affirmation 3 : La droite d est parallèle au plan P.

Affirmation 4 : Le projeté orthogonal de S sur le plan P est le point H de coordonnées $(-3\,;\,\sqrt{2}\,;\,-2)$.

Corrigé

1. Affirmation 1 : Vraie

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1-2 \\ \sqrt{2}-\sqrt{2} \\ 0-(-1) \end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2-2 \\ 0-\sqrt{2} \\ -1-(-1) \end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Et : $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix} x_A - x_S \\ y_A - y_S \\ z_A - z_S \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix} 2-(-1) \\ \sqrt{2}-\sqrt{2} \\ -1-(-4) \end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on va utiliser la formule analytique pour calculer les produits scalaires :

- $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times (-1) + 0 \times 0 + 3 \times 1 = -3 + 0 + 3 = 0$. $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux ;
- $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 0 + 0 \times (-\sqrt{2}) + 3 \times 0 = 0$ $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{SA}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires qui forment une base du plan (ABC), donc il est normal au plan (ABC).

Le vecteur $\overrightarrow{SA}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

2. Affirmation 2 : Fausse

On a : $\overrightarrow{\text{SB}}\begin{pmatrix} x_\text{B}-x_\text{S} \\ y_\text{B}-y_\text{S} \\ z_\text{B}-z_\text{S}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{SB}}\begin{pmatrix} 1-(-1) \\ \sqrt{2}-\sqrt{2} \\ 0-(-4)\end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{\text{SB}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4\end{pmatrix}$.

La droite (SB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\text{SB}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4\end{pmatrix}$.

Par lecture de sa représentation paramétrique, on peut dire que (d) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -1\end{pmatrix}$.

Les deux vecteurs ont des coordonnées clairement non proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires.

Les droites (SB) et (d) ne sont donc pas parallèles (ni strictement, ni confondues).

Elles peuvent donc être sécantes, ou non coplanaires.

Pour trancher, cherchons à établir si elles ont un point commun.

Une représentation paramétrique de (SB) est : $\begin{cases} x = x_\text{S} + x_{\overrightarrow{\text{SB}}} \times t \\ y = y_\text{S} + y_{\overrightarrow{\text{SB}}} \times t \\ z = z_\text{S} + z_{\overrightarrow{\text{SB}}} \times t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

Soit, en remplaçant par les valeurs connues : $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = \sqrt{2} \\ z = -4+4t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

Le point de paramètre k sur (d) est confondu avec le point de paramètre t sur (AB) si et seulement si $(k;t)$ est solution du système :

$$\begin{cases} 2-k = -1+2t \\ \sqrt{2}k = \sqrt{2} \\ -1-k = -4+4t \end{cases} \iff \begin{cases} 3-k = 2t \\ k = 1 \\ 3-k = 4t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2t = 3-1 = 2 \\ k = 1 \\ 4t = 3-1 = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 1 \\ k = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Les équations 1 et 3 du système sont incompatibles.

Le système n'a pas de solution.

Il n'y a donc aucun point commun entre les droites (SB) et (d), qui sont donc non coplanaires, et pas sécantes.

Les droites (SB) et d ne sont pas sécantes.

3. Affirmation 3 : Vraie

Par lecture de sa représentation paramétrique, on peut dire que (d) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -1\end{pmatrix}$.

Par lecture de son équation cartésienne, on peut dire qu'un vecteur normal au plan P est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on va utiliser la formule analytique pour calculer les produits scalaires :

$\vec{n}\cdot\vec{u} = -1\times 1+\sqrt{2}\times 0+(-1)\times(-1) = -1+0+1 = 0$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux donc la droite d est parallèle au plan P.

4. Affirmation 4 : Vraie

Le point H est le projeté orthogonal de S sur le plan P si : $\begin{cases} H\in P;\\ \text{La droite (SH) est orthogonale au plan } P.\end{cases}$

- $x_H - z_H + 1 = -3-(-2)+1 = -3+2+1 = 0$

  Donc H est bien un point du plan P.
- On a : $\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix}x_H-x_S\\y_H-y_S\\z_H-z_S\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix}-3-(-1)\\\sqrt{2}-\sqrt{2}\\-2-(-4)\end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$.

  Les vecteurs $\overrightarrow{SH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc la droite (SH) est orthogonale au plan P.

Le point H de coordonnées $(-3;\sqrt{2};-2)$ est donc le projeté orthogonal de S sur le plan P.

Exercice 10.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère :

- la droite (d) dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = t\\ y = -1,5-t \quad \text{où } t\in\mathbb{R};\\ z = 2-2t\end{cases}$$
- les points A(3;0;2) et B(2;1;−3) ;
- le plan $(\mathscr{P})$ d'équation : $-x+y-5z-0,5=0$.

a. Affirmation 1 :

Le plan $(\mathscr{P})$ est orthogonal à la droite (AB), et passe par le milieu du segment [AB].

b. Affirmation 2 :

Les droites (d) et (AB) sont sécantes.

c. On considère le point C de coordonnées $(1,5;-3;-1)$.

Affirmation 3 :

La mesure de l'angle $\widehat{ACB}$, arrondie à 10^{-1}, est égale à $70,5\,°$.

2. Titouan et Clotilde participent à un escape game. Ils se retrouvent dans une salle possédant deux portes de sortie, A et B, chacune protégée par un digicode équipé de 8 touches portant des symboles différents :

- le digicode de la porte A utilise un code de 3 symboles différents devant être saisis dans l'ordre ;
- celui de la porte B utilise un code de 4 symboles différents qui peuvent être saisis dans n'importe quel ordre.

N'étant pas parvenus à obtenir d'indices, ils décident de procéder au hasard à la saisie des codes.

Clotilde choisit un code pour la porte A, et Titouan choisit un code pour la porte B.

On considère que les choix des codes sont équiprobables.

Affirmation 4 :

Titouan a plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

Corrigé

1. a. Affirmation 1 : Vraie.

Par lecture de l'équation cartésienne du plan on peut affirmer que $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $(\mathscr{P})$.

La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$, de coordonnées : $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$

soit : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-3\\1-0\\3-2\end{pmatrix}$ et donc : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{AB}=\vec{n}$, le vecteur directeur de la droite (AB) est donc normal au plan $(\mathscr{P})$.

Par définition, la droite (AB) est donc orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

Le milieu du segment [AB] est le point I, et ses coordonnées vérifient :

$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ soit $I\left(\frac{3+2}{2};\frac{0+1}{2};\frac{2-3}{2}\right)$ et finalement $I(2,5;0,5;-0,5)$.

Vérifions si les coordonnées de I vérifient l'équation du plan $(\mathscr{P})$:

$-x_I+y_I-5z_I-0,5=-2,5+0,5-5\times(-0,5)-0,5=-2,5+0,5+2,5-0,5=0$

I est donc un point du plan $(\mathscr{P})$.

Le plan $(\mathscr{P})$ est bien orthogonal à la droite (AB), et passe par le milieu du segment [AB] (autrement dit, c'est le plan médiateur du segment [AB]).

b. Affirmation 2 : Fausse.

La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$.

Par lecture de sa représentation paramétrique, on peut dire que (d) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

Les deux vecteurs ont des coordonnées clairement non proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires.

Les droites (AB) et (d) ne sont donc pas parallèles (ni strictement, ni confondues).

Elles peuvent donc être sécantes, ou non coplanaires.

Pour trancher, cherchons à établir si elles ont un point commun.

Une représentation paramétrique de (AB) est : $\begin{cases} x = x_A + x_{\overrightarrow{AB}} \times s \\ y = y_A + y_{\overrightarrow{AB}} \times s \\ z = z_A + z_{\overrightarrow{AB}} \times s \end{cases}$ où $s \in \mathbb{R}$

Soit, en remplaçant par les valeurs connues : $\begin{cases} x = 3 - s \\ y = s \\ z = 2 - 5s \end{cases}$ où $s \in \mathbb{R}$

Le point de paramètre t sur (d) est confondu avec le point de paramètre s sur (AB) si et seulement si $(s;t)$ est solution du système :

$$\begin{cases} 3 - s = t \\ s = -1,5 - t \\ 2 - 5s = 2 - 2t \end{cases} \iff \begin{cases} 3 - s = t \\ s = -1,5 - (3 - s) \\ 2 - 5s = 2 - 2(3 - s) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3 - s = t \\ s = -1,5 - 3 + s \\ 2 - 5s = 2 - 6 + 2s \end{cases}$$

Les équations du système sont incompatibles (la deuxième équation est équivaut à $0 = -4,5$).

Le système n'a pas de solution.

Il n'y a donc aucun point commun entre les droites (AB) et (d), qui sont donc non coplanaires, et pas sécantes.

c. Affirmation 3 : Vraie

On a : $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 0,5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Comme ce sont des coordonnées dans un repère orthonormé, on utilise la formule analytique du produit scalaire : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 1,5 \times 0,5 + 3 \times 4 + 3 \times (-2) = 0,75 + 12 - 6 = 6,75$.

Par ailleurs, on peut calculer les longueurs CA et CB :

$CA = \sqrt{1,5^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{20,25} = 4,5$. $CB = \sqrt{0,5^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20,25} = 4,5$.

On remarque donc (même si c'est hors sujet) que le triangle ACB est isocèle en C.

En utilisant la définition trigonométrique du produit scalaire, on a :

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos\left(\widehat{ACB}\right)$.

En remplaçant les valeurs connues, on a : $6,75 = 4,5 \times 4,5 \times \cos\left(\widehat{ACB}\right)$,

ce qui équivaut à $\cos\left(\widehat{ACB}\right) = \dfrac{6,75}{4,5^2} = \dfrac{1}{3}$.

On en déduit : $\widehat{ACB} = \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) \approx 70,53\,°$.

On a donc bien $\widehat{ACB} \approx 70,5\,°$, à 10^{-1} près.

2. Affirmation 4 : Vraie.

- Titouan doit, pour ouvrir sa porte, trouver les quatre symboles différents de son code, et les saisir dans un ordre quelconque.
  Il s'agit donc d'une combinaison (pas de répétition des éléments, l'ordre ne compte pas) de quatre éléments, dans un ensemble de cardinal 8 (huit symboles sur le digicode).
  $\binom{8}{4} = 70$.
  Titouan a donc 70 codes différents possibles, chacun ayant donc une probabilité de $\frac{1}{70}$, puisque tous les choix des codes sont équiprobables.
- Clotilde, elle, doit saisir trois symboles différents, mais en tenant compte de l'ordre.
  Il s'agit donc d'un arrangement (pas de répétition, l'ordre compte) de trois éléments dans un ensemble de cardinal 8.
  $\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$.
  Clotilde a donc 336 codes différents possibles, tous ayant une probabilité de $\frac{1}{336}$.

Comme $\frac{1}{70} > \frac{1}{336}$ la probabilité que Titouan ouvre sa porte est bien supérieur à la probabilité que Clotilde ouvre la sienne.

Exercice 11.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère :

- les points de l'espace A(1;0;3), B(2;1;−1), C(1;1;1) et H(0;2;1) ;
- le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan de l'espace.

2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

4. Vérifier que le point H appartient au plan (ABC).

5. Déterminer la mesure en degré de l'angle $\widehat{\text{BAH}}$.

6. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (ABC) et passant par le point H.

7. Déterminer les coordonnées du point $S\left(x_S; y_S; z_S\right)$ de la droite (d) tel que :

- la distance entre le point S et le plan (ABC) est 6 ;
- son abscisse x_S est positive.

Corrigé

1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ -1-3 \end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

De même : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 1-3 \end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

Ils définissent donc un plan de l'espace.

2. Comme le repère est orthonormé, on va utiliser la formule analytique pour calculer les produits scalaires :

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \times 1 + 4 \times 1 + 2 \times (-4) = 4 + 4 - 8 = 0$. $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux;
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 0 + 4 \times 1 + 2 \times (-2) = 0 + 4 - 4 = 0$ $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

$\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires qui forment une base du plan (ABC), donc il est normal au plan (ABC).

3. Par propriété, on en déduit qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $4 \times x + 4 \times y + 2 \times z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

A étant un point du plan (ABC), ses coordonnées doivent vérifier l'équation du plan.

$$\begin{aligned} A \in (ABC) &\iff 4 \times 1 + 4 \times 0 + 2 \times 3 + d = 0 \\ &\iff 4 + 0 + 6 + d = 0 \\ &\iff d = -10 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan est donc bien $4x + 4y + 2z - 10 = 0$.

En divisant cette équation par 2 (qui est non nul), on obtient une équation équivalente, donc une équation du plan (ABC) : $2x + 2y + z - 5 = 0$.

4. Vérifions que le point H appartient au plan (ABC).

$2 \times x_H + 2 \times y_H + z_H - 5 = 2 \times 0 + 2 \times 2 + 1 - 5 = 0 + 4 + 1 - 5 = 0$

Donc le point H appartient bien au plan (ABC).

5. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Et : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \\ z_H - z_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-0 \\ 1-3 \end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, le produit scalaire peut se calculer avec la formule analytique :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 1 \times (-1) + 1 \times 2 - 4 \times (-2) = -1 + 2 + 8 = 9$.

Comme on est dans un repère orthonormé :

$AB = \sqrt{x_{\overrightarrow{AB}}^2 + y_{\overrightarrow{AB}}^2 + z_{\overrightarrow{AB}}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

et de même : $AH = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$.

L'expression trigonométrique du produit scalaire donne :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH \times \cos\left(\widehat{BAH}\right)$

donc, avec les valeurs connues : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 3\sqrt{2} \times 3 \times \cos\left(\widehat{BAH}\right)$

$= 9\sqrt{2}\cos\left(\widehat{BAH}\right)$

On a donc deux expressions du même produit scalaire, ce qui donne :

$9 = 9\sqrt{2}\cos\left(\widehat{BAH}\right) \iff \cos\left(\widehat{BAH}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D'où : $\widehat{BAH} = 45°$.

6. La droite (d) orthogonale au plan (ABC) donc tout vecteur normal au plan (ABC) est un vecteur directeur de la droite (d).

(d) admet donc le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur directeur et passe par le point H.

Une représentation paramétrique de la droite (d) est donc :

$$\begin{cases} x = 0 + 4 \times t \\ y = 2 + 4 \times t \\ z = 1 + 2 \times t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

7. Soit S un point de la droite (d).

Le point H appartient à la fois au plan (ABC) et à la droite (d) qui est orthogonale au plan (ABC) donc H est le projeté orthogonal du point S sur le plan (ABC).

La distance entre le point S et le plan (ABC) est donc égale à la distance SH.

S est un point de la droite (d) donc il existe un réel t tel que $\begin{cases} x_S = 4t \\ y_S = 2 + 4t \\ z_S = 1 + 2t \end{cases}$.

On a :

$SH = \sqrt{(x_H - x_S)^2 + \left(y_H - y_S\right)^2 + (z_H - z_S)^2}$

$= \sqrt{(0 - 4t)^2 + (2 - 2 - 4t)^2 + (1 - 1 - 2t)^2}$

$= \sqrt{16t^2 + 16t^2 + 4t^2}$.

$= \sqrt{36t^2}$

$= 6|t|$ car une distance est positive

De plus, la distance entre le point S et le plan (ABC) doit être égale à 6, on a donc :

$6|t| = 6 \iff |t| = 1$

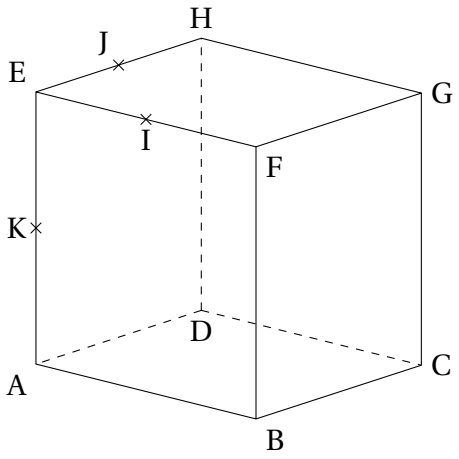
$\iff t = -1$ ou $t = 1$

Enfin, l'abscisse x_S doit être positive, on doit donc avoir $4t \geq 0$ soit $t \geq 0$.

On a donc : $t = 1$ et les coordonnés de S sont : $(4;6;3)$.

Exercice 12.

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormal $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
Soit I le milieu du segment [EF], J le milieu de [EH] et K le milieu de [AE].

1. Donner les coordonnées des points I, J et K.

2. **a.** Déterminer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.

b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$ arrondie au dixième de degré.

3. **a.** Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{KC}$ est un vecteur normal au plan (AIJ).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (AIJ) est

$$x + y - \frac{1}{2}z = 0$$

4. Soit L le projeté orthogonal du point C sur le plan (AIJ).

a. Déterminer les coordonnées du point L.

b. En déduire que la distance du point C au plan (AIJ) est égale à $\frac{4}{3}$.

5. Soit M un point de la droite (FG).
On admet que les coordonnées de M sont $(1; m; 1)$ avec m appartenant à $\mathbb{R}$.

a. Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IM) est

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \\ y = ms \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{avec } s \in \mathbb{R}$$

b. Peut-on affirmer que les droites (IM) et (KC) sont coplanaires quelle que soit la valeur de m ?

Corrigé

1. ABCDEFGH est un cube donc, dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on a :

A(0;0;0) ; E(0;0;1) F(1;0;1) et H(0;1;1).

I est le milieu du segment [EF] donc $x_I=\dfrac{x_E+x_F}{2}=\dfrac{0+1}{2}=\dfrac{1}{2}$, $y_I=\dfrac{x_E+x_F}{2}=\dfrac{0+0}{2}=0$ et $z_I=\dfrac{z_E+z_F}{2}=\dfrac{1+1}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

Donc I a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2};0;1\right)$

Par le même raisonnement on a : J $\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$ et K $\left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)$

2. **a.** On a : $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}x_I-x_A\\y_I-y_A\\z_I-z_A\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-0\\0-0\\1-0\end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$.

De même : $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}x_J-x_A\\y_J-y_A\\z_J-z_A\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}0-0\\\frac{1}{2}-0\\1-0\end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, le produit scalaire peut se calculer avec la formule analytique : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=\dfrac{1}{2}\times 0+0\times\dfrac{1}{2}+1\times 1=1$.

b. Comme on est dans un repère orthonormé :

$AI=\sqrt{x_{\overrightarrow{AI}}^2+y_{\overrightarrow{AI}}^2+z_{\overrightarrow{AI}}^2}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+0^2+1^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+0+1}=\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

et de même : $AJ=\sqrt{0^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{0\dfrac{1}{4}+1}=\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

L'expression trigonométrique du produit scalaire donne :

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=AI\times AJ\times\cos\left(\widehat{IAJ}\right)$

donc, avec les valeurs connues : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\cos\left(\widehat{IAJ}\right)$

$=\dfrac{5}{4}\cos\left(\widehat{IAJ}\right)$

On a donc deux expressions du même produit scalaire, ce qui donne :

$1=\dfrac{5}{4}\cos\left(\widehat{IAJ}\right)\iff\cos\left(\widehat{AIJ}\right)=\dfrac{4}{5}$

D'où : $\widehat{AIJ}\approx 36,9°$ au dixième de degré près.

3. **a.** On a : $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$.

Ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

On a : $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}x_C-x_K\\y_C-y_K\\z_C-z_K\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormal, on va utiliser la formule analytique pour calculer les produits scalaires :

- $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{AI} = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 - \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont orthogonaux;
- $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{AJ} = 1 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (-1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{KC}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires qui forment une base du plan (AIJ), donc il est normal au plan (AIJ).

b. Par propriété, on en déduit qu'une équation cartésienne du plan (AIJ) est de la forme $1 \times x + 1 \times y - \frac{1}{2} \times z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

A étant un point du plan (AIJ), ses coordonnées doivent vérifier l'équation du plan.

$$\begin{aligned} A \in (AIJ) &\iff 1 \times 0 + 1 \times 0 - \frac{1}{2} \times 0 + d = 0 \\ &\iff 0 + d = 0 \\ &\iff d = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan est donc bien $x + y - \frac{1}{2}z = 0$.

4. **a.** Le vecteur $\overrightarrow{KC}$ est un vecteur normal au plan (AIJ) donc la droite (KC) est orthogonale au plan (AIJ).

Le point L, projeté orthogonal du point C sur le plan (AIJ) sera donc l'intersection du plan (AIJ) et de la droite (KC).

La droite (KC) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{KC}$ et passe par le point C donc une représentation paramétrique de la droite (KC) est :

$$\begin{cases} x = 1 + 1 \times t \\ y = 1 + 1 \times t \\ z = 0 - \frac{1}{2}t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

L est un point de la droite (KC) donc ses coordonnées sont donc de la forme $\left(1 + t; 1 + t; -\frac{1}{2}t\right)$ avec un t réel.

Comme c'est aussi un point du plan (AIJ), ces coordonnées doivent vérifier l'équation du plan :

$$\begin{aligned} x_L + y_L - \frac{1}{2}z_L = 0 &\iff (1 + t) + (1 + t) - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}t\right) = 0 \\ &\iff 2t + \frac{1}{4}t = -2 \\ &\iff \frac{9}{4}t = -2 \\ &\iff t = -\frac{8}{9} \end{aligned}$$

L a donc pour coordonnées : $\left(1 - \frac{8}{9}; 1 - \frac{8}{9}; -\frac{1}{2} \times \frac{-8}{9}\right)$ soit $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{9}; \frac{4}{9}\right)$.

b. L est le projeté orthogonal du point C sur le plan (AIJ) donc la distance du point C au plan (AIJ) est égale à CL.

Comme on est dans un repère orthonormal :

$$\text{CL} = \sqrt{(x_\text{L}-x_\text{C})^2+(y_\text{L}-y_\text{C})^2+(z_\text{L}-z_\text{C})^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{9}-1\right)^2+\left(\frac{1}{9}-1\right)^2+\left(\frac{4}{9}-0\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{8}{9}\right)^2+\left(-\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{81}+\frac{64}{81}+\frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{144}{81}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

5. **a.** On a : $\overrightarrow{\text{IM}}\begin{pmatrix} x_\text{M}-x_\text{I} \\ y_\text{M}-y_\text{I} \\ z_\text{M}-z_\text{I}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{IM}}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2} \\ m-0 \\ 1-1\end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{\text{IM}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ m \\ 0\end{pmatrix}$.

La droite (IM) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{\text{IM}}$ et passe par le point I donc une représentation paramétrique de la droite (IM) est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times s \\ y = 0+m\times s \\ z = 1+0\times s\end{cases} \quad \text{avec } s\in\mathbb{R} \qquad \text{soit} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times s \\ y = ms \\ z = 1\end{cases} \quad \text{avec } s\in\mathbb{R}$$

b. Un vecteur directeur de la droite (KC) est : $\overrightarrow{\text{KC}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de la droite (IM) est : $\overrightarrow{\text{IM}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ m \\ 0\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites (IM) et (KC) ne sont pas parallèles.
Recherchons un point d'intersection éventuel.

Les droites (IM) et (KC) sont sécantes si et seulement si le système (S) : $\begin{cases} 1+t = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}s \\ 1+t = ms \\ -\frac{1}{2}t = 1\end{cases}$

admet une solution.

$$\begin{cases} 1+t = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}s \\ 1+t = ms \\ -\frac{1}{2}t = 1\end{cases} \iff \begin{cases} 2+2t = 1+s \\ 1+t = ms \\ t = -2\end{cases} \iff \begin{cases} 2-4-1 = s \\ 1-2 = ms \\ t = -2\end{cases} \iff \begin{cases} s = -3 \\ m = \frac{1}{3} \\ t = -2\end{cases}$$

Le système (S) admet donc une unique solution pour $m = \frac{1}{3}$ et pas de solution sinon.

Les droites (IM) et (KC) sont donc coplanaires uniquement pour $m = \frac{1}{3}$.

Donc les droites (IM) et (KC) ne sont pas coplanaires quelle que soit la valeur de m.

Exercice 13.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(1;2;3),\quad B(-1;3;1),\quad C(2;1;6)\quad \text{et}\quad D(3;-2;-1).$$

1. **a.** Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. **a.** Déterminer une équation paramétrique de la droite (d), perpendiculaire au plan (ABC) et passant par le point D.

b. Déterminer les coordonnées du point H qui est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

c. En déduire que la distance du point D au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{2}$.

3. **a.** Montrer que

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = -\frac{3\sqrt{11}}{11}$$

b. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\widehat{BAC}\right)$.

c. Montrer que l'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

4. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times\mathcal{B}\times h,\quad \text{où } \mathcal{B} \text{ est l'aire d'une base et } h \text{ la hauteur qui lui est associée.}$$

Corrigé

1. a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}\quad \begin{pmatrix}-1-1\\3-2\\1-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC}\quad \begin{pmatrix}2-1\\1-2\\6-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan.

b. Calculons les produits scalaires :

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} &= 1\times(-2)+4\times1+1\times(-2) = -2+4-2 = 0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} &= 1\times1+4\times(-1)+1\times3 = 1-4+3 = 0\end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), il est donc normal à ce plan.

c. Une équation du plan (ABC) est de la forme $x+4y+z+d=0$. Le point A(1 ; 2 ; 3) appartient au plan, donc :

$$1+4\times 2+3+d = 0 \iff 12+d=0 \iff d=-12$$

Une équation cartésienne est : $x+4y+z-12=0$.

2. a. La droite (d) est dirigée par le vecteur normal $\vec{n}(1\ ;\ 4\ ;\ 1)$ et passe par D(3 ; −2 ; −1). Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= 3+t \\ y &= -2+4t \\ z &= -1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

b. Le point H appartient à (d), il existe donc $t\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_H = 3+t \\ y_H = -2+4t \\ z_H = -1+t \end{cases}$

De plus H appartient au plan (ABC), ses coordonnées vérifient donc l'équation du plan (ABC) : $x_H+4y_H+z_H-12=0$. On en déduit que t est solution de :

$$\begin{aligned} (3+t)+4(-2+4t)+(-1+t)-12 &= 0 \\ 3+t-8+16t-1+t-12 &= 0 \\ 18t-18 &= 0 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Les coordonnées de H sont donc $x_H=3+1=4$, $y_H=-2+4(1)=2$, $z_H=-1+1=0$. Soit H(4 ; 2 ; 0).

c. La distance de D au plan (ABC) correspond à la longueur DH :

$$\begin{aligned} \text{DH} &= \sqrt{(4-3)^2+(2-(-2))^2+(0-(-1))^2} \\ &= \sqrt{1^2+4^2+1^2} \\ &= \sqrt{18}=3\sqrt{2} \end{aligned}$$

3. a. On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= -2(1)+1(-1)-2(3)=-9 \\ AB &= \sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3 \\ AC &= \sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{11} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} -9 &= 3\times\sqrt{11}\times\cos(\widehat{BAC}) \\ \cos(\widehat{BAC}) &= \frac{-9}{3\sqrt{11}}=\frac{-3}{\sqrt{11}}=\frac{-3\sqrt{11}}{11} \end{aligned}$$

b. Sachant que $\cos^2(\widehat{BAC})+\sin^2(\widehat{BAC})=1$:

$$\begin{aligned} \sin^2(\widehat{BAC}) &= 1-\left(-\tfrac{3}{\sqrt{11}}\right)^2 \\ &= 1-\tfrac{9}{11}=\frac{2}{11} \end{aligned}$$

L'angle $\widehat{BAC}$ étant dans $[0\ ;\ \pi]$, son sinus est positif : $\sin(\widehat{BAC})=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

c. L'aire du triangle ABC est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \tfrac{1}{2} \times \text{AB} \times \text{AC} \times \sin(\widehat{\text{BAC}}) \\ &= \tfrac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{11} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

4. Le volume du tétraèdre ABCD est :

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{\text{ABC}} \times \text{DH} \\ &= \tfrac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} \\ &= \tfrac{1}{3} \times \frac{18}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

Exercice 14.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les points suivants

$$\text{A}(0;0;1); \quad \text{B}(1;2;3); \quad \text{C}(3;3;1); \quad \text{E}(2;-2;2); \quad \text{F}(3;0;4) \quad \text{et} \quad \text{G}(5;1;2)$$

1. **a.** Montrer que les points B, C et E ne sont pas alignés.

b. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{\text{AF}}$ est normal au plan (BCE).

c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (BCE) est $x+z-4=0$.

2. **a.** Montrer que le point G n'appartient pas au plan (BCE).

b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{BE}}$, $\overrightarrow{\text{BC}}$ et $\overrightarrow{\text{AG}}$ ne sont pas coplanaires.

c. En déduire que la droite (AG) et le plan (BCE) sont sécants.

Pour la suite de l'exercice, on appellera P le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BCE).

3. **a.** Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (AG) est :

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 1+t \end{cases}$$

b. En déduire les coordonnées du point P.

c. Montrer que le point P est le milieu du segment [EC].

4. Déterminer l'intersection des plans (BCE) et (ACG).

Corrigé

1. **a.** On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3-1\\3-2\\1-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ Et : $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2-1\\-2-2\\2-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$

Ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, et donc les trois points B, C et E ne sont pas alignés.

Ils définissent donc un plan (BCE).

b. On a : $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}3-0\\0-0\\4-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$

Comme le repère est orthonormé, on va utiliser la formule analytique pour calculer les produits scalaires :

- $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC} = 3\times 2+0\times 1+3\times(-2) = 6+0-6 = 0$. $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux;
- $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE} = 3\times 1+0\times(-4)+3\times(-1) = 3+0-3 = 0$ $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{AF}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires qui forment une base du plan (BCE), donc il est normal au plan (BCE).

c. Par propriété, on en déduit qu'une équation cartésienne du plan (BCE) est de la forme $3\times x+0\times y+3\times z+d = 0$.

B étant un point du plan (BCE), ses coordonnées doivent vérifier l'équation du plan.

$$\begin{aligned}B\in(BCE) &\iff 3\times 1+3\times 3+d = 0\\ &\iff 12+d = 0\\ &\iff d = -12\end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan est donc $3x+3z-12 = 0$.

En divisant cette équation par 3 (qui est non nul), on obtient une équation équivalente, donc une équation du plan (BCE) est bien : $x+z-4 = 0$

2. **a.** Voyons si les coordonnées de G vérifient l'équation du plan :

$x_G+z_G-4 = 5+1-4 = 2\neq 0$

Les coordonnées de G ne vérifient pas l'équation du plan (BCE) donc le point G n'appartient pas au plan (BCE).

b. Comme $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaire (prouvé à la question **1. a.**), on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont coplanaires si et seulement si on peut exprimer $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des deux autres vecteurs.

Autrement dit, si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{BC}+b\overrightarrow{BE}$.

On a : $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$.

Donc : $\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{BC}+b\overrightarrow{BE} \iff \begin{cases}2a+b = 5\\ a-4b = 1\\ -2a-b = 1\end{cases}$

$$\iff \begin{cases}-2a-b = -5\\ a-4b = 1\\ -5 = 1\end{cases}$$

Les équations du système ne sont pas compatibles.

Donc le système n'a pas de solution.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires.

c. La droite (AG) est dirigée par $\overrightarrow{AG}$, qui n'est pas un vecteur du plan (BCE), donc la droite (AG) n'est pas parallèle au plan (ni strictement parallèle, ni incluse dans le plan).

Une droite et un plan n'ont que trois positions relatives possibles, et on vient de justifier que deux ne sont pas possibles.

Par élimination, on peut conclure que la droite (AG) et le plan (BCE) sont sécants.

3. **a.** Par propriété, une représentation paramétrique de (AG) est : $\begin{cases} x = x_A + x_{\overrightarrow{AG}} \times t \\ y = y_A + y_{\overrightarrow{AG}} \times t \\ z = z_A + z_{\overrightarrow{AG}} \times t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

En remplaçant par le coordonnées connues, cela donne : $\begin{cases} x = 0 + 5 \times t \\ y = 0 + 1 \times t \\ z = 1 + 1 \times t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

On a donc bien une représentation paramétrique de (AG) qui est : $\begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

b. Par définition, le point P est un point de (AG).

Ses coordonnées sont donc de la forme $(5t ; t ; 1 + t)$ avec un t réel.

Comme c'est aussi un point du plan (BCE), ces coordonnées doivent vérifier l'équation du plan :

$$\begin{aligned} x_P + z_P - 4 = 0 &\iff 5t + (1 + t) - 4 = 0 \\ &\iff 6t = 3 \\ &\iff t = 0,5 \end{aligned}$$

P a donc pour coordonnées : $(5 \times 0,5 ; 0,5 ; 1 + 0,5)$ soit $(2,5 ; 0,5 ; 1,5)$.

c. Le milieu du segment [EC] a pour coordonnées : $\left(\frac{x_E + x_C}{2} ; \frac{y_E + y_C}{2} ; \frac{z_E + z_C}{2}\right)$.

En remplaçant par les valeurs connues : $\left(\frac{2+3}{2} ; \frac{-2+3}{2} ; \frac{2+1}{2}\right)$

En effectuant les calculs, on retrouve $(2,5 ; 0,5 ; 1,5)$ c'est-à-dire les coordonnées de P.

P est donc bien le milieu de [EC].

4. Les plans (BCE) et (ACG) sont sécants, en effet :

- ils ont le point C en commun, de façon évidente : on en déduit que les plans ne sont pas strictement parallèles ;
- ils ne sont pas confondus, car le point G appartient à (ACG), mais pas à (BCE) (prouvé à la question **2. a.**).

Deux plans sécants ont une intersection qui est une droite, que l'on va nommer d.

- P étant par définition sur la droite (AG), il est un point de (ACG) ;
- P est aussi par définition un point du plan (BCE).

P est donc un autre point commun aux plans (ACG) et (BCE), donc la droite (CP) est incluse dans l'intersection des plans (ACG) et (BCE).

Comme cette intersection est réduite à une droite, on en déduit que :
l'intersection des plans (BCE) et (ACG) est la droite (CP).

Exercice 15.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\right)$.
On considère :

- les points A(4 ; 2 ; 2), B(5 ; −2 ; 3) et C(1 ; 1 ; 1) ;
- la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par

$$\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= 1+\ t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z &= 1+2t \end{cases}$$

- le plan $\mathscr{P}$ contenant le point A et perpendiculaire à la droite Δ.

1. Vérifier que la droite Δ contient le point C(1 ; 1 ; 1) mais pas le point A.

2. **a.** Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $2x+y+2z-14=0$.

b. Vérifier que le plan $\mathscr{P}$ contient le point B mais pas le point C.

3. On considère le point D(3 ; 2 ; 3).

a. Démontrer que le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathscr{P}$.

b. Justifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

d. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V=\dfrac{1}{3}\times B\times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.

4. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

a. Vérifier que les coordonnées du point H sont $\left(\dfrac{73}{29}\ ;\ \dfrac{-4}{29}\ ;\ \dfrac{51}{29}\right)$.

b. Démontrer que l'aire du triangle ABC est $\dfrac{3\sqrt{22}}{2}$.

c. En déduire la distance du point D au plan (ABC).

Corrigé

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\right)$.
On considère :

- les points A(4 ; 2 ; 2), B(5 ; −2 ; 3) et C(1 ; 1 ; 1) ;
- la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par

$$\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= 1+\ t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z &= 1+2t \end{cases}$$

- le plan $\mathscr{P}$ passant par le point A et perpendiculaire à la droite Δ.

1. — Pour $t = 0$ on trouve :
$$\begin{cases} x = 1 + 2 \times 0 = 1 = x_C \\ y = 1 + 0 = 1 = y_C \\ z = 1 + 2 \times 0 = 1 = z_C \end{cases}$$
donc le point C appartient à la droite Δ.

— Le point A appartient à la droite Δ si et seulement si il existe un réel t tel que $\begin{cases} x_A = 1 + 2t \\ y_A = 1 + t \\ z_A = 1 + 2t \end{cases}$

c'est à dire si et seulement si le système $\begin{cases} 4 = 1 + 2t \\ 2 = 1 + t \\ 2 = 1 + 2t \end{cases}$ admet une unique solution.

Or la première équation donne $t = \dfrac{3}{2}$ et la deuxième $t = 1$, ce système n'admet donc pas de solution d'où le point A n'appartient pas à la droite Δ.

2. a. Le plan $\mathscr{P}$ est perpendiculaire à la droite Δ, un vecteur directeur de la droite Δ est donc un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

La représentation paramétrique de Δ nous donne $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donc de la forme $2x + y + 2z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus, le plan $\mathscr{P}$ contient le point A donc :

$2x_A + y_A + 2z_A + d = 0 \iff 2 \times 4 + 2 + 2 \times 2 + d = 0 \iff 8 + 2 + 4 + d = 0 \iff d = -14$

Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est donc bien : $2x + y + 2z - 14 = 0$.

b. Un point appartient à un plan si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation de ce plan.

$2x_B + y_B + z_B - 14 = 2 \times 5 - 2 + 2 \times 3 - 14 = 10 - 2 + 6 - 14 = 0$

donc le point B appartient au plan $\mathscr{P}$.

$2x_C + y_C + z_C - 14 = 2 \times 1 + 1 + 2 \times 1 - 14 = 2 + 1 + 2 - 14 = -9 \neq 0$

donc le point C n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$.

3. a. Le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathscr{P}$ si et seulement si le point D appartient au plan $\mathscr{P}$ et si la droite (DC) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

On a $\overrightarrow{\text{CD}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on sait que $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{CD}}$ et $\vec{n}$ sont égaux et par suite colinéaires, donc la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

De plus : $2x_D + y_D + z_D - 14 = 2 \times 3 + 2 + 2 \times 3 - 14 = 6 + 2 + 6 - 14 = 0$

donc le point D appartient au plan $\mathscr{P}$.

Donc le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathscr{P}$.

b. Par définition du point A, il appartient au plan $\mathscr{P}$.

D'après la question 2.b., le point B appartient au plan $\mathscr{P}$

D est le projeté du point C sur le plan $\mathscr{P}$, donc il appartient au plan $\mathscr{P}$. C distinct de D est sur la perpendiculaire en D au plan $\mathscr{P}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires

(par exemple $\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$).

Conclusion : les points A, B et D définissent bien le plan $\mathscr{P}$ et C $\notin \mathscr{P}$: les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

c. On est dans un repère orthonormé donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \times (-1) - 4 \times 0 + 1 \times 1 = 0$.

d. Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ est nul donc ABD est un triangle rectangle en A.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABD.

On a $\mathscr{A} = \dfrac{AB \times AD}{2}$

$$= \frac{\sqrt{1^2+4^2+1^2} \times \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{18} \times \sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2 \times 9 \times 2}}{2}$$

$$= 3$$

Dans la pyramide ABCD, la hauteur associé à la base ABD est le segment [CD] car le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan (ABD).

D'où $V = \dfrac{1}{3} \times 3 \times CD$

$$= \sqrt{2^2+1^2+2^2}$$

$$= \sqrt{9} = 3$$

Le volume de la pyramide ABCD est 3 unités de volume.

4. a. H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) si et seulement H appartient à la droite (BC) et les droites (BC) et (AH) sont perpendiculaires.

— Soit $X\left(\frac{73}{29} ; \frac{-4}{29} ; \frac{51}{29}\right)$.

On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AX}\begin{pmatrix}-\frac{43}{29}\\-\frac{62}{29}\\\frac{-7}{29}\end{pmatrix}$

Le repère étant orthonormé on peut calculer le produit scalaire :

$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{172}{29} - \frac{186}{29} + \frac{14}{29} = \frac{186}{29} - \frac{186}{29} = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AX}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

D'autre part $\overrightarrow{BX} = \begin{pmatrix}-\frac{72}{29}\\\frac{54}{29}\\-\frac{72}{29}\end{pmatrix}$ et on constate que $\overrightarrow{BX} = \frac{18}{29}\overrightarrow{BC}$.

Conclusion les vecteurs $\overrightarrow{BX}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires ou encore X appartient à la droite (BC).

X est donc le projeté orthogonal de A sur (BC) ; les coordonnées de H sont bien $\left(\frac{73}{29} ; \frac{-4}{29} ; \frac{21}{29}\right)$.

Donc le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

b. Le segment [AH] est donc la hauteur issue de A dans le triangle ABC. L'aire du triangle ABC est donc $\mathscr{A}' = \dfrac{BC \times AH}{2}$.

$AH^2 = \left(-\frac{43}{29}\right)^2 + \left(-\frac{62}{29}\right)^2 + \left(-\frac{7}{29}\right)^2 = \frac{5742}{29^2} = \frac{198}{29}$

$BC^2 = (-4)^2 + 3^2 + (-2)^2 = 16 + 9 + 4 = 29$

D'où $\mathscr{A}' = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{198}{29}} \times \sqrt{29} = \frac{\sqrt{198}}{2} = \frac{\sqrt{22 \times 9}}{2} = \frac{3\sqrt{22}}{2}$.

c. Soit h la distance du point D au plan (ABC).

h sera la hauteur associé à la base (ABC) dans la pyramide ABCD.

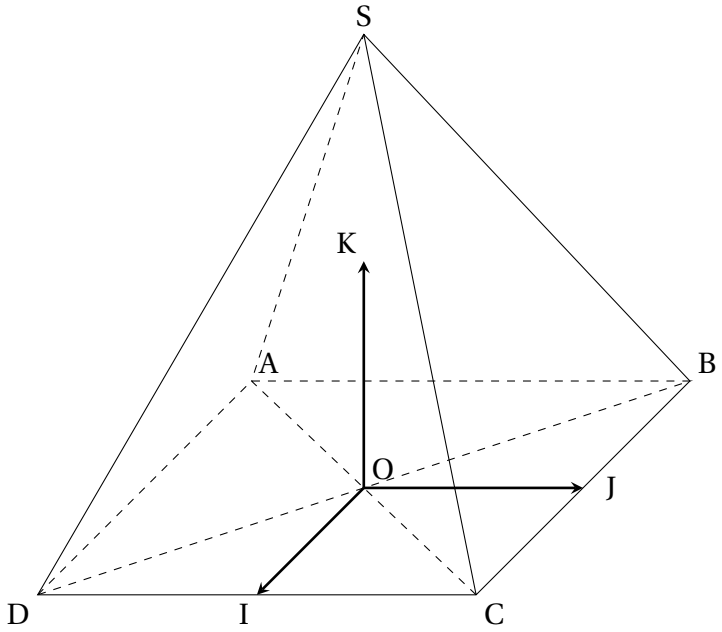
On a donc $V = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}' \times h$

D'où $3 = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{22}}{2} \times h$ donc $h = \frac{3 \times 2}{\sqrt{22}} = \frac{3\sqrt{22}}{11}$

La distance du point D au plan (ABC) est donc égale à $\frac{3\sqrt{22}}{11}$.

Exercice 16.

Dans cet exercice l'unité est le centimètre.
On considère une pyramide à base carrée SABCD comme dans la figure ci-dessous.



Dans cette figure :

— AB = BC = CD = DA = OS = 2 cm ;

— I est le milieu de [CD], J le milieu de [BC] et K le milieu de [OS].

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\right)$.
On admet que B(−1 ; 1 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), et S(0 ; 0 ; 2).

Les **parties A** et **B** sont indépendantes.

1. Donner les coordonnées des points A et D.

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB}$.

3. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BSC}$ arrondie au dixième de degré près.

On se propose dans cette partie de déterminer la distance du point O au plan (SBC).

1. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (SBC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (SBC) est $2y + z - 2 = 0$.

2. On note H le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC).

a. a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (OH) est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

b. Calculer les coordonnées du point H.

c. En déduire que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

On se propose ici de retrouver le résultat de la **partie B** par une autre méthode.

1. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{ aire de la base} \times \text{hauteur}$$

a. Calculer le volume de la pyramide SABCD.

b. En déduire que le volume de la pyramide OCBS est égal à $\dfrac{2}{3}$ cm^3.

2. Déterminer l'aire du triangle SBC.

3. Déduire des questions précédentes que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

Corrigé

1. Dans le repère $\left(O;\vec{OI},\vec{OJ},\vec{OK}\right)$ on a : $A(-1\ ;\ -1\ ;\ 0)$ et $D(1\ ;\ -1\ ;\ 0)$.

2. Étant données les coordonnées de S et C, on a donc :

$\vec{SC}\begin{pmatrix}x_C-x_S\\y_C-y_S\\z_C-z_S\end{pmatrix}$ soit $\vec{SC}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-2\end{pmatrix}$ finalement : $\vec{SC}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et de même : $\vec{SB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

On est dans un repère orthonormé donc :

$\vec{SC}\cdot\vec{SB}=1\times(-1)+1\times1+(-2)\times(-2)=-1+1+4=4.$

3. On a $SC=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$ et $SB=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}\vec{SC}\cdot\vec{SB}=SC\times SB\times\cos\left(\widehat{BSC}\right)&\iff 4=\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\cos\left(\widehat{BSC}\right)\\&\iff\frac{4}{6}=\cos\left(\widehat{BSC}\right)\\&\iff\frac{2}{3}=\cos\left(\widehat{BSC}\right)\end{aligned}$$

D'où $\widehat{BSC}=\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\approx 48,1897(°)$ soit $\widehat{BSC}\approx 48,2(°)$, arrondi au dixième de degré près.

1. a. Les vecteurs $\vec{SB}$ et $\vec{SC}$ ne sont pas colinéaires. (On peut le justifier par étude des coordonnées des vecteurs, ou parce que l'angle $\widehat{BSC}$ n'est ni plat ni nul, ou parce que le plan étant nommé (SBC), cela implique que les points S, B et C ne sont pas alignés).

De plus : $\vec{n}\cdot\vec{SB}=0\times(-1)+2\times1+1\times(-2)=0+2-2=0$

et $\vec{n}\cdot\vec{SC}=0\times(1)+2\times1+1\times(-2)=0+2-2=0$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (SBC) donc le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (SBC).

b. Le vecteur $\vec{n}$ étant normal au plan (SBC), une équation cartésienne de ce plan est de la forme : $0x+2y+z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

$S(0\ ;\ 0\ ;\ 2)\in(SBC)$ donc $0+2\times0+2+d=0\iff d=-2$.

Donc une équation cartésienne du plan (SBC) est $2y+z-2=0$.

2. a. H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC) donc la droite (OH) est orthogonale au plan (SBC). Un vecteur normal au plan (SBC) sera donc un vecteur directeur de la droite (OH).

Un vecteur directeur de la droite (OH) est donc le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.

De plus le point O, de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ appartient à la droite (OH) donc une représentation de la droite (OH) est : $\begin{cases}x=x_O+x_{\vec{n}}t\\y=y_O+y_{\vec{n}}t\\z=z_O+z_{\vec{n}}t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ soit $\begin{cases}x=0\\y=2t\\z=t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

b. H est le projeté orthogonal de O sur (SBC), alors H = (OH) ∩ (SBC).

Donc H est le point de (OH) dont le paramètre fait que les coordonnées paramétriques vérifient l'équation de (SBC).

On résout donc : $4t + t - 2 = 0 \iff 5t = 2$

$$\iff t = \frac{2}{5}$$

H est donc le point de paramètre $t = \frac{2}{5}$ sur (OH),

donc ses coordonnées sont : $\mathrm{H}\left(0\,;\,\frac{4}{5}\,;\,\frac{2}{5}\right)$.

c. La distance OH vaut donc : $\mathrm{OH} = \sqrt{(0-0)^2 + \left(\frac{4}{5} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - 0\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \sqrt{\frac{4 \times 5}{5^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

La distance du point O au plan (SBC), c'est-à-dire la distance de O à son projeté orthogonal sur (SBC), est donc bien égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (cm).

1. a. La base de la pyramide SABCD est le carré ABCD, de côté 2 cm et sa hauteur associé est le segment [SO], de longueur 2 cm.

Donc $V = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 2 = \frac{8}{3}$ (cm^3.

Son volume est donc égal à $\frac{8}{3}$ (cm^3).

b. La base de la pyramide OCBS est le triangle OCB et sa hauteur associé est le segment [SO].

L'aire du triangle OCB est égale au quart de l'aire du carré ABCD car O est le centre du carré ABCD.

La hauteur étant la même, le volume de la pyramide OCBS est égal au quart du volume de la pyramide SABCD.

$V' = \frac{1}{4}V = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$.

Donc le volume de la pyramide OCBS est bien égal à $\frac{2}{3}$ (cm^3).

2. Dans le triangle SBC, on a : $\mathrm{SB} = \mathrm{SC} = \sqrt{6}$ donc SBC est un triangle isocèle en S.

J étant le milieu du segment [BC], le segment [SJ] est la hauteur issue de S dans le triangle SBC.

Le triangle JSB est rectangle en J donc, d'après le théorème de Pythagore,

$\mathrm{SB}^2 = \mathrm{SJ}^2 + \mathrm{BJ}^2 \iff \mathrm{SJ}^2 = \mathrm{SB}^2 - \mathrm{BJ}^2$

$$\iff \mathrm{SJ}^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 - 1^2 = 6 - 1 = 5$$

$\iff \mathrm{SJ} = \sqrt{5}$ car une longueur est positive

Soit A l'aire du triangle SBC.

On a : $A = \frac{\text{longueur de la base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

L'aire du triangle SBC est donc $\sqrt{5}$ (cm^2).

3. Calculons le volume de la pyramide OCBS en prenant le triangle SBC comme base. La hauteur associée sera donc le segment [OH] car H est le projeté orthogonal de O sur le plan (SBC).

On a donc : $V_{OCBS} = \dfrac{1}{3} \times \sqrt{5} \times OH$

Or, d'après la question **1. b.** de la **Partie C**, $V_{OCBS} = \dfrac{2}{3}$ (cm^3).

Donc $\dfrac{2}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}OH \iff OH = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}x = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Donc la distance du point O au plan (SBC), c'est-à-dire la distance de O à son projeté orthogonal sur (SBC), est bien égale à $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (cm).

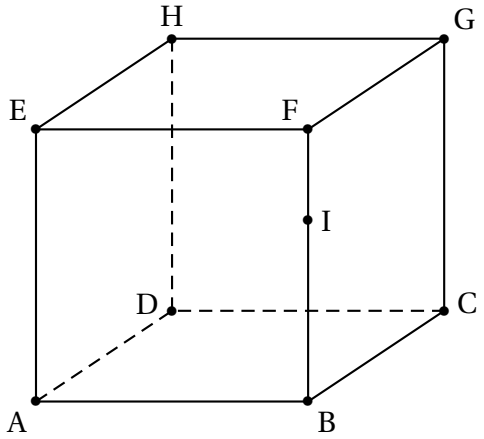
Cela confirme bien le résultat de la **Partie B**.

Exercice 17.

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1 et le point I défini par $\overrightarrow{FI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{FB}$.

On pourra se placer dans le repère orthonormé de l'espace $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.



1. On considère le triangle HAC.
   Affirmation 1 : Le triangle HAC est un triangle rectangle.
2. On considère les droites (HF) et (DI).
   Affirmation 2 : Les droites (HF) et (DI) sont sécantes.
3. On considère un réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,\pi[$.
   On considère le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \sin(\pi - \alpha) \\ \sin(-\alpha) \end{pmatrix}$.
   Affirmation 3 : Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (FAC).
4. Le cube ABCDEFGH possède 8 sommets. On s'intéresse au nombre N de segments que l'on peut construire en reliant 2 sommets distincts quelconques du cube.
   Affirmation 4 : $N = \dfrac{8^2}{2}$.

Corrigé

1. Dans un cube toutes les faces sont des carrés de même côté, donc les diagonales de chaque face ont même longueur.
Or dans le triangle HAC, chaque côté est une diagonale d'une face ([HA] est une diagonale de ADHE, [AC] est une diagonale de ABCD et [CH] est une diagonale de CDHG). Les trois côtés du triangle HAC ont donc même longueur $\sqrt{2}$, c'est donc un triangle équilatéral.
Or les angles aux sommets d'un triangle équilatéral mesurent 60°, donc HAC n'est pas rectangle.

L'affirmation 1 est **FAUSSE**.

2. Les droites (DH) et (BF) sont des arêtes opposées du cube, elles sont donc parallèles, et donc coplanaires. Donc (BF) est une droite du plan (DFH).
Comme I est un point de (BF) il appartient au plan (DFH). Donc les droites (DI) et (HF) sont coplanaires.
Puisque (BD) est la droite parallèle à (HF) passant par D (arêtes opposées), et que B et I sont distincts, d'après l'axiome d'Euclide, la droite (DI) n'est pas parallèle à (HF). Or si deux droites sont coplanaires, elles sont soit parallèles soit sécantes. Donc (DI) et (HF) sont sécantes.

L'affirmation 2 est **VRAIE**.

3. Si le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (FAC) alors il est orthogonal à tout vecteur de ce plan.
On calcule donc le produit scalaire $\vec{u} \cdot \overrightarrow{FC}$, puisque deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

$$\overrightarrow{FC} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \overrightarrow{FC} &= \sin(\alpha) \times 0 + \sin(\pi - \alpha) \times 1 + \sin(-\alpha) \times (-1) \\ &= \sin(\pi - \alpha) - \sin(-\alpha) \\ &= \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \\ &= \boxed{2\sin(\alpha) \neq 0} \quad \text{puisque } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{u}$ n'est donc pas orthogonal au vecteur $\overrightarrow{FC}$. Donc, puisqu'il existe un vecteur de (FAC) qui n'est pas orthogonal à $\vec{u}$, $\vec{u}$ n'est pas un vecteur normal à (FAC).

L'affirmation 3 est **FAUSSE**.

4. Un cube possède **8 sommets**.
Pour former un segment, on doit choisir 2 sommets distincts parmi ces 8 sommets. L'ordre n'a pas d'importance (le segment reliant A à B est le même que celui reliant B à A).
On utilise donc une combinaison :

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = \frac{56}{2} = 28.$$

Il existe **28 segments** pouvant relier deux sommets distincts d'un cube.

L'affirmation 4 est **FAUSSE**.

Exercice 18.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(4\,;\,-4\,;\,4),\quad B(5\,;\,-3\,;\,2),\quad C(6\,;\,-2;\,;\,3),\quad D(5\,;\,1\,;\,1)$$

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

2. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x-y-8=0.$$

3. On note d la droite passant par le point D et orthogonale au plan (ABC).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b. On note H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
Déterminer les coordonnées du point H.

c. Montrer que $DH = 2\sqrt{2}$.

4. **a.** Montrer que le volume de la pyramide ABCD est égal à 2.
On rappelle que le volume V d'une pyramide se calcule à l'aide de la formule :

$$V=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h$$

où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base de la pyramide et h la hauteur correspondante.

b. On admet que l'aire du triangle BCD est égale à $\dfrac{\sqrt{42}}{2}$.
En déduire la valeur exacte de la distance du point A au plan (BCD).

Corrigé

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(4\,;\,-4\,;\,4),\quad B(5\,;\,-3\,;\,2),\quad C(6\,;\,-2;\,;\,3),\quad D(5\,;\,1\,;\,1)$$

1. On a : $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5-1\\-3-(-4)\\2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}5-6\\-3-(-2)\\2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=1\times(-1)+1\times(-1)-2\times(-1)=-1-1+2=0$.

Puisque leur produit scalaire est nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en B.

2. D'après la question précédente, les points A, B et C étant non alignés, ils définissent bien un plan. Leurs coordonnées vérifient donc toute équation cartésienne du plan ainsi défini.

Or on a : $4-(-4)-8=4+4-8=0$, donc les coordonnées de A vérifient l'équation $x-y-8=0$.

De même $5-(-3)-8=5+3-8=0$ et $6-(-2)-8=6+2-8=0$, donc les coordonnées de B et C vérifient également l'équation $x-y-8=0$.

Donc $x-y-8=0$ est bien une équation cartésienne du plan (ABC).

3. **a.** On sait que si $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à un plan, alors ce plan a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$. Or on a vu à la question précédente que $x - y - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC), donc $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Puisque d est orthogonale au plan (ABC), le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. De plus, la droite d passe par le point D (5 ; 1 ; 1).
Donc une représentation paramétrique de d est :

$$\boxed{\begin{cases} x &= 5 + t \\ y &= 1 - t \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z &= 1 \end{cases}}$$

b. Puisque la droite d est orthogonale au plan (ABC) et passe par D, le projeté orthogonal H de D sur (ABC) est le point d'intersection de la droite D et du plan (ABC). Les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ du point H vérifient donc à la fois la représentation paramétrique de d et l'équation cartésienne de (ABC). Elles sont donc solution du système :

$$\begin{cases} x &= 5 + t \\ y &= 1 - t \\ z &= 1 \\ x - y - 8 &= 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 5 + t - (1 - t) - 8 = 0 \iff 2t - 4 = 0 \iff 2t = 4 \iff t = 2$$

$$\begin{cases} x &= 5 + 2 = 7 \\ y &= 1 - 2 = -1 \\ z &= 1 \end{cases}$$

Les coordonnées du projeté orthogonal H de D sur (ABC) sont donc :

$$\boxed{\text{H}(7\,;\,-1\,;\,1)}$$

c. $\text{DH} = \sqrt{(7-5)^2 + (-1-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$

4. **a.** La pyramide ABCD admet pour base le triangle ABC et pour hauteur le segment [DH].
On a donc $V = \dfrac{1}{3} \times \text{aire (ABC)} \times \text{DH}$.

Puisque ABC est rectangle en B, on a :

$$\begin{aligned}\text{aire (ABC)} &= \frac{\text{AB}\times\text{CB}}{2} = \frac{\|\overrightarrow{\text{AB}}\|\times\|\overrightarrow{\text{CB}}\|}{2}\\ &= \frac{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\times\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{1+1+4}\times\sqrt{1+1+1}}{2} = \frac{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2}\\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

On a donc :

$$V = \frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}\sqrt{2}}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\sqrt{2} = \boxed{2}$$

Le volume de la pyramide ABCD est 2.

b. La distance du point A au plan (BCD) est la longueur de la hauteur issue de A de la pyramide ABCD. Soit x cette distance. On a alors $V = \frac{1}{3}\times\text{aire (BCD)}\times x$. Donc :

$$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{42}}{2}\times x = 2 \iff x\sqrt{42} = 2\times3\times2 \iff x = \frac{12}{\sqrt{42}} = \frac{2\times6}{\sqrt{6}\times\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \boxed{\frac{2\sqrt{42}}{7}}$$

La distance du point A au plan (BCD) est $\frac{2\sqrt{42}}{7}$.

Exercice 19.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans toutes les questions suivantes, l'espace est rapporté à un repère orthonormé.

1. On considère la droite Δ_1 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1-3t \\ y = 4+2t \\ z = t \end{cases}$, où $t\in\mathbb{R}$ ainsi que la droite Δ_2 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4+s \\ y = 2+2s \\ z = -1+s \end{cases}$, où $s\in\mathbb{R}$.

a. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.

b. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales.

c. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont sécantes.

2. On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 3-t \\ z = 1+2t \end{cases}$, où $t \in R$, et le plan P d'équation cartésienne : $4x+2y-z+3=0$.

a. La droite d est incluse dans le plan P.

b. La droite d est parallèle strictement au plan P.

c. La droite d est sécante au plan P.

3. On considère les points A(3 ; 2 ; 1), B(7 ; 3 ; 1), C(−1 ; 4 ; 5) et D(−3 ; 3 ; 5).

a. Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

b. Les points A, B et C sont alignés.

c. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

4. On considère les plans Q et Q' d'équation cartésienne respective $3x-2y+z+1=0$ et $4x+y-z+3=0$.

a. Le point R(1 ; 1 ; −2) appartient aux deux plans.

b. Les deux plans sont orthogonaux.

c. Les deux plans sont sécants avec pour intersection la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 7t+4 \\ z = 11t+7 \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

Corrigé

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans toutes les questions suivantes, l'espace est rapporté à un repère orthonormé.

1. • Δ_1 a pour vecteur directeur $\delta_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et Δ_2 a pour vecteur directeur $\delta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$: les premières coordonnées ne sont pas égales, les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, les droites Δ_1 et Δ_2 ne sont pas parallèles ;

En remplaçant respectivement dans les équations paramétriques s par 2 et t par 1, on trouve que le point de coordonnées (−2 ; 6 ; 1) appartient bien aux deux droites.

2. **a.** $M(x = 1+2t\ ;\ y = 3-t\ ;\ z = 1+2t) \in d$ appartient à P si ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de P, donc si

$4(1+t)+2(3-t)-(1+2t)+3=0 \iff 4+4t+6-2t-1-2t+3=0 \iff 0t+12=0 \iff 0t=-12$: cette équation n'a pas de solution : cela signifie que la droite d est parallèle strictement au plan P.

3. On considère les points A(3 ; 2 ; 1), B(7 ; 3 ; 1), C(−1 ; 4 ; 5) et D(−3 ; 3 ; 5).

Commençons par la deuxième affirmation : on a

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Il reste donc la première affirmation que l'on peut démontrer :

A, B, C et D sont coplanaires, c'est-à-dire si par exemple D appartient au plan (ABC) et dans ce cas si $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ (car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas des vecteurs colinéaires.

Avec $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-6\\1\\4\end{pmatrix}$, l'égalité vectorielle précédente se traduit par le système :

$$\begin{cases} -6 = 4x-4y \\ 1 = x+2y \\ 4 = 4y \end{cases} \iff \begin{cases} -6 = 4x-4 \\ 1 = x+2 \\ 1 = y \end{cases} \iff \begin{cases} -2 = 4x \\ -1 = x \\ 1 = y \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{2} = x \\ -1 = x \\ 1 = y \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution. Donc le point D n'appartient pas au plan défini par les points A, B et C ou encore A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

4. **a.** R(1 ; 1 ; −2) $\in (Q) \iff 3\times 1 + -2\times 1 - 2 + 1 = 0 \iff 3-2-2+1=0$ qui est vraie ;

R(1 ; 1 ; −2) $\in (Q') \iff 4\times 1 + 1\times 1 - (-2) + 3 = 0 \iff 10 = 0$ qui est fausse : la première affirmation est fausse ;

b. (Q) a pour vecteur normal $\vec{q}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$; (Q') a pour vecteur normal $\vec{q'}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$;

$\vec{q}\cdot\vec{q'} = 3\times 4 - 2\times 1 + 1\times(-1) = 12-2-1 = 9 \neq 0$: les vecteurs normaux ne sont pas orthogonaux, les plans (Q) et (Q') ne sont pas perpendiculaires.

c. Les points communs aux deux plans sont les points dont les coordonnées vérifient les équations de ces deux plans donc le système :

$$\begin{cases} 3x-2y+z+1 = 0 \\ 4x+y-z+3 = 0 \end{cases}$$

On peut poser $x = t$, avec $t \in \mathbb{R}$ et on obtient le système aux deux inconnues y et z suivant :

$$\begin{cases} x = t \\ 3x-2y+z+1 = 0 \\ 4x+y-z+3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ -2y+z = -3t-1 \\ y-z = -4t-3 \end{cases}$$

La somme membre à membre des deux dernières équations donne

$-y = -7t-4 = 0 \iff y = 7t+4$;

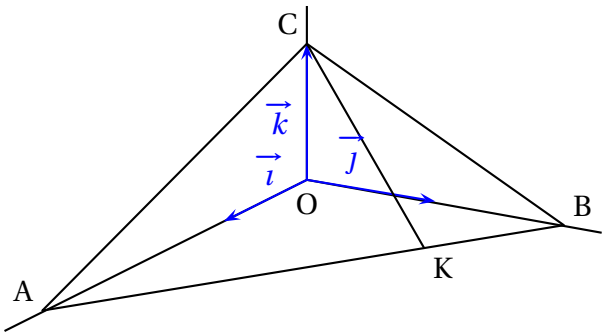
enfin la deuxième équation $-2y+z = -3t-1$ donne $z = 2y-3t-1 = 2(7t+4)-3t-1 = 14t+8-3t-1 = 11t+7$.

Conclusion : les points communs aux deux plans sont les points dont les coordonnées vérifient le système : $\begin{cases} x &= t \\ y &= 7t+4 \\ z &= 11t+7 \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$: c'est l'équation de la droite contenant le point K$(0\,;\,4\,;\,7)$ et dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\7\\11\end{pmatrix}$. : la troisième affirmation est vraie.

Exercice 20.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère les points

$$\text{A}\left(2\sqrt{3}\,;\,0\,;\,0\right),\quad \text{B}(0\,;\,2\,;\,0),\quad \text{C}(0\,;\,0\,;\,1)\quad \text{et}\quad \text{K}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{3}{2}\,;\,0\right).$$



1. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (CK) est :

$$\begin{cases} x &= \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ y &= \dfrac{3}{2}t \\ z &= 1-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2. Soit M(t) un point de la droite (CK) paramétrée par un réel t.
Établir que $\text{OM}(t) = \sqrt{4t^2-2t+1}$.

3. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \text{OM}(t)$.

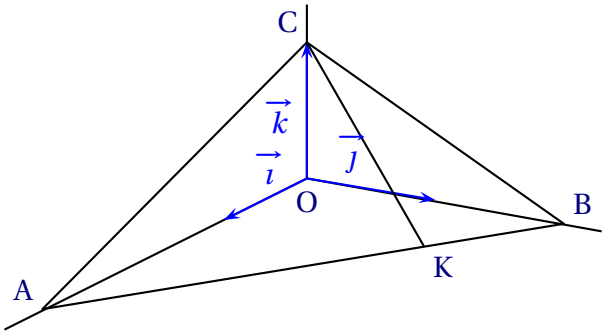
a. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire la valeur de t pour laquelle f atteint son minimum.

4. En déduire que le point $\text{H}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8}\,;\,\dfrac{3}{8}\,;\,\dfrac{3}{4}\right)$ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK).

5. Démontrer, à l'aide de l'outil produit scalaire, que le point H est l'orthocentre (intersection des hauteurs d'un triangle) du triangle ABC.
6. **a.** Démontrer que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).
   b. En déduire une équation du plan (ABC).
7. Calculer, en unité d'aire, l'aire du triangle ABC.

Corrigé



L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

On considère les points $A\left(2\sqrt{3}\,;\,0\,;\,0\right)$, $B\,(0\,;\,2\,;\,0)$, $C\,(0\,;\,0\,;\,1)$ et $K\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{3}{2}\,;\,0\right)$.

1. La droite (CK) est l'ensemble des points $M\left(x\,,\,y\,,\,z\right)$ tels que $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CK}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{CM} = t.\overrightarrow{CK}$ où $t \in \mathbf{R}$.

   $\overrightarrow{CM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_M - x_C \\ y_M - y_C \\ z_M - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{CK}$ sont $\begin{pmatrix} x_K - x_C \\ y_K - y_C \\ z_K - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

   $$\overrightarrow{CM} = t.\overrightarrow{CK} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = t.\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x &= \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y &= \frac{3}{2}t \\ z &= -t+1 \end{cases}$$

   La droite (CK) a donc pour représentation paramétrique $\begin{cases} x &= \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y &= \frac{3}{2}t \\ y &= -t+1 \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$
2. Soit $M(t)$ un point de la droite (CK) paramétrée par un réel t. Le point M a donc pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\,,\,\frac{3}{2}t\,,\,-t+1\right)$

   $$OM(t)^2 = (x_M - x_O)^2 + \left(y_M - y_O\right)^2 + (z_M - z_O)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 + \left(\frac{3}{2}t\right)^2 + (-t+1)^2$$

   $$= \frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{4}t^2 + t^2 - 2t + 1 = 4t^2 - 2t + 1$$

   Donc : $OM(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$.
3. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = OM(t)$.

a. $f(t)=\sqrt{4t^2-2t+1}$ donc $f'(t)=\dfrac{8t-2}{2\sqrt{4t^2-2t+1}}$

On étudie le signe de $f'(t)$ sur $\mathbf{R}$.

t	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$8t-2$		$-$	0	$+$	
$2\sqrt{4t^2-2t+1}$		$+$		$+$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$	

Donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,,\,\frac{1}{4}\right]$, et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\,,\,+\infty\right[$.

b. On en déduit que f atteint son minimum pour $t=\frac{1}{4}$.

4. Le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK) est le point M de la droite (CK) tel que la distance OM soit minimale ; le point de la droite (CK) réalisant ce minimum correspond donc à $t=\frac{1}{4}$.

C'est donc le point de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{4}\,,\,\frac{3}{2}\times\frac{1}{4}\,,\,-\frac{1}{4}+1\right)$ soit $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\,,\,\frac{3}{8}\,,\,\frac{3}{4}\right)$ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK) ; on l'appelle H.

5. On montre que H appartient au plan (ABC).

- $\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{3}\\ \frac{3}{2}-0\\ 0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\\ \frac{3}{2}\\ 0-0\end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix}0-2\sqrt{3}\\ 2-0\\ 0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$

  Donc $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ donc les points A, K et B sont alignés donc K $\in$ (AB).
- On a : $\left.\begin{array}{r}\text{K}\in(\text{AB})\\ (\text{AB})\subset(\text{ABC})\end{array}\right\}\Longrightarrow \text{K}\in(\text{ABC})\Longrightarrow(\text{CK})\subset(\text{ABC})$
- On a : $\left.\begin{array}{r}\text{H}\in(\text{CK})\\ (\text{CK})\subset(\text{ABC})\end{array}\right\}\Longrightarrow \text{H}\in(\text{ABC})$

Donc H est un point du plan (ABC).

On montre que H est l'orthocentre du triangle ABC.

- $\overrightarrow{CK}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{\sqrt{3}}{8}\times\left(-2\sqrt{3}\right)+\frac{3}{8}\times2+\left(-\frac{1}{4}\right)\times0=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+0=0$ donc $\overrightarrow{CK}\perp\overrightarrow{AB}$ donc (CK) $\perp$ (AB).
  Comme H $\in$ (CK), on en déduit que (CH) $\perp$ (AB).
- $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{8}-2\sqrt{3}\\ \frac{3}{8}-0\\ \frac{3}{4}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{15}{8}\sqrt{3}\\ \frac{3}{8}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{BC}$ sont $\begin{pmatrix}0-0\\ 0-2\\ 1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$

  $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{15}{8}\sqrt{3}\times0+\frac{3}{8}\times(-2)+\frac{3}{4}\times1=0-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=0$ donc $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ donc (AH) $\perp$ (BC).

(AH) et (CH) sont donc deux hauteurs du triangle (ABC) donc H est l'orthocentre de ce triangle.

6. **a.** On démontre que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).

- On sait que $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{CK}$.
- $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{\sqrt{3}}{8} \times \left(-2\sqrt{3}\right) + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{4} \times 0 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc c'est un vecteur normal au plan (ABC). Donc la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).

b. D'après le cours, si le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (a, b, c) est normal à un plan $\mathscr{P}$, alors ce plan a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{OH}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}\right)$ est un vecteur normal au plan (ABC), donc le plan (ABC) a une équation de la forme $\frac{\sqrt{3}}{8}x + \frac{3}{8}y + \frac{3}{4}z + d = 0$ c'est-à-dire $x\sqrt{3} + 3y + 6z + 8d = 0$.

On détermine la valeur de d en exprimant que le point A appartient au plan (ABC).

$$\text{A} \in \text{(ABC)} \iff x_\text{A}\sqrt{3} + 3y_\text{A} + 6z_\text{A} + 8d = 0 \iff 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} + 3 \times 0 + 6 \times 0 + 8d = 0$$
$$\iff 6 + 8d = 0 \iff 8d = -6$$

Le plan (ABC) a pour équation : $x\sqrt{3} + 3y + 6z - 6 = 0$.

7. (CK) est une hauteur du triangle (ABC) donc l'aire de ce triangle est égale à $\frac{1}{2}\text{CK} \times \text{AB}$.

- Le vecteur $\overrightarrow{CK}$ a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)$ donc :
  $\overrightarrow{CK}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-1)^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + 1 = 4$ donc CK = 2.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(-2\sqrt{3}, 2, 0\right)$ donc :
  $\overrightarrow{AB}^2 = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (2)^2 + (0)^2 = 12 + 4 + 0 = 16$ donc AB = 4.

L'aire du triangle (ABC) est donc égale, en unités d'aire, à : $\frac{1}{2} \times 2 \times 4$ soit 4.

Exercice 21.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points

$$\text{A}(4 ; -1 ; 3), \quad \text{B}(-1 ; 1 ; -2), \quad \text{C}(0 ; 4 ; 5) \text{ et } \text{D}(-3 ; -4 ; 6).$$

1. **a.** Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés.
On admet qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $29x + 30y - 17z = 35$.

b. Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ? Justifier.

On admet que lorsque quatre points ne sont pas coplanaires, il existe un unique point situé à égale distance de ces quatre points.
L'objectif de cet exercice est de déterminer le point H se situant à égale distance des quatre points A, B, C, D.
On définit le plan médiateur d'un segment comme le plan passant par le milieu de ce segment et orthogonal à la droite portant ce segment. C'est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

2. Soit P_1 le plan médiateur du segment [AB].

a. Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB].

b. En déduire qu'une équation cartésienne de P_1 est : $5x-2y+5z=10$.

3. On note P_2 le plan médiateur du segment [CD].

a. Soit M un point du plan P_2 de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$.
Exprimer MC^2 et MD^2 en fonction des coordonnées de M.
En déduire qu'une équation cartésienne du plan P est : $-3x-8y+z=10$.

b. Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

4. Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= -2-1,9t \\ y &= t \\ z &= 4+2,3t \end{cases} \text{ où } t\in\mathbb{R}$$

Démontrer que Δ est la droite d'intersection de P_1 et P_2.

On note P_3 le plan médiateur du segment [AC].
On admet qu'une équation cartésienne du plan P_3 est : $8x-10y-4z=-15$.

5. Démontrer que la droite Δ et le plan P_3 sont sécants.

6. Justifier que le point d'intersection entre Δ et P_3 est le point H.

Corrigé

1. **a.** On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\2\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\5\\2\end{pmatrix}$

On constate que $\dfrac{-5}{2}\neq\dfrac{-4}{5}$. Comme les coordonnées des vecteurs ne sont pas proportionnelles, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et A, B et C ne sont pas alignés.

b. D appartient au plan (ABC) si et seulement si les coordonnées de D vérifient l'équation cartésienne du plan (ABC).
$29\times(-3)+30\times(-4)-17\times6=-309\neq35$. Les coordonnées de D ne vérifient pas l'équation cartésienne du plan (ABC), donc les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

2. **a.** Les coordonnées du milieu de [AB] sont : $\dfrac{4+(-1)}{2}\,;\,\dfrac{-1+1}{2}\,;\,\dfrac{3+(-2)}{2}$ soit $\dfrac{3}{2}\,;\,0\,;\,\dfrac{1}{2}$.

b. Un vecteur normal au plan P_1 médiateur du segment [AB] est le vecteur $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}5\\-2\\5\end{pmatrix}$

donc une équation de P_1 est $5x-2y+5z=k$ avec k tel que les coordonnées du milieu de [AB] vérifient l'équation c'est-à dire si
$5\times\dfrac{3}{2}-2\times0+5\times\dfrac{1}{2}=k=10$
Ainsi $5x-2y+5z=10$ est une équation cartésienne de P_1.

3. **a.**

$$\begin{aligned}
MC^2 &= (x-0)^2+(y-4)^2+(z-5)^2\\
&= x^2+y^2+z^2-8y-10z+16+25\\
&= x^2+y^2+z^2-8y-10z+41
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
MD^2 &= (x-(-3))^2+(y-(-4))^2+(z-6)^2\\
&= x^2+y^2+z^2+6x+8y-12z+9+16+36\\
&= x^2+y^2+z^2+6x+8y-12z+61
\end{aligned}$$

M appartient à P_2 est équivalent à $MC^2 = MD^2$.

$$\begin{aligned}
MC^2 = MD^2 &\iff MC^2 - MD^2 = 0\\
&\iff x^2+y^2+z^2-8y-10z+41\\
&\quad -x^2-y^2-z^2-6x-8y+12z-61=0\\
&\iff -6x-16y+2z-20=0\\
&\iff -6x-16y+2z=20\\
&\iff -3x-8y+z=10
\end{aligned}$$

On obtient l'équation cartésienne de P_2 : $-3x-8y+z=10$.

b. Un vecteur normal à P_1 est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}5\\-2\\5\end{pmatrix}$.

Un vecteur normal à P_2 est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix}$

On remarque que $\dfrac{5}{-2} \neq \dfrac{-3}{-2}$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leur coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Comme les vecteurs normaux à P_1 et P_2 ne sont pas colinéaires, alors les plans P_1 et P_2 sont sécants.

4. $\forall t \in \mathbb{R} \quad 5\times(-2-1{,}9t)-2\times t+5\times(4+2{,}3t) = -10-9{,}5t-2t+20+11{,}5t = 10$

Tout point de Δ appartient à P_1.

$\forall t \in \mathbb{R} \quad -3\times(-2-1{,}9t)-8\times t+(4+2{,}3t) = 6+5{,}7t-8t+4+2{,}3t = 10$

Tout point de Δ appartient à P_2.

Δ est donc la droite d'intersection de P_1 et P_2.

5. D'après la représentation paramétrique de Δ, un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\vec{\delta}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}19\\-10\\23\end{pmatrix}$.

Le plan P_3 admet un vecteur normal $\vec{n_3}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}8\\-10\\-4\end{pmatrix}$.

La droite Δ et le plan P_3 ne sont pas sécants si et seulement si un vecteur directeur de Δ est orthogonal à un vecteur normal au plan P_3.

On calcule le produit scalaire des deux vecteurs précités :

$\overrightarrow{\delta} \cdot \overrightarrow{n_3} = 19 \times 8 + (-10) \times (-10) + 23 \times (-4) = 160 \neq 0$

Le produit scalaire n'est pas nul, les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux, Δ et P_3 sont donc sécants.

6. On considère le point H équidistant des points A, B, C, D. Comme AH = BH, H appartient à P_1. Comme DH = CH, H appartient à P_2. Ainsi H appartient à l'intersection des deux plans, la droite Δ. Comme AH = CH, H appartient au plan P_3. Ainsi H est l'intersection de Δ et de P_3.

Le point équidistant des sommets d'un tétraèdre est l'intersection des plans médiateurs de ses arêtes.

On peut déterminer les coordonnées de H.

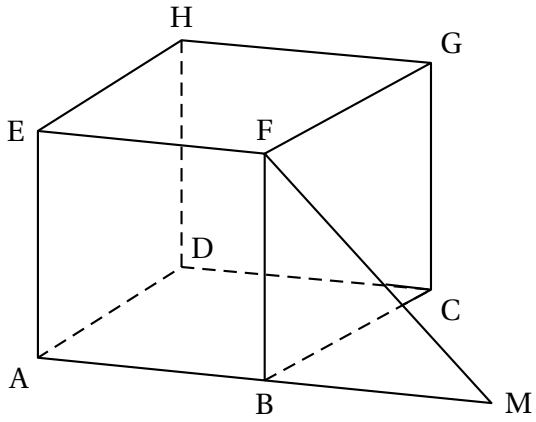
Il suffit de résoudre l'équation :

$8(-2-1{,}9t) - 10t - 4(4+2{,}3t) = -15$

Exercice 22.

On considère le cube ABCDEFGH.

On place le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$.



Partie A

1. Montrer que les droites (FG) et (FM) sont perpendiculaires.

2. Montrer que les points A, M, G et H sont coplanaires.

Partie B

On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{AH}$ et montrer qu'ils ne sont pas colinéaires.

2. **a.** Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (GM) est :

$$\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 1-t \\ z &= 1-t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

b. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (AH) est :

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= k \\ z &= k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que le point d'intersection de (GM) et (AH), que l'on nommera N, a pour coordonnées $(0\,;2\,;2)$.

3. **a.** Montrer que le triangle AMN est un triangle rectangle en A.

b. Calculer l'aire de ce triangle.

4. Soit J le centre de la face BCGF.

a. Déterminer les coordonnées du point J.

b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{FJ}}$ est un vecteur normal au plan (AMN).

c. Montrer que J appartient au plan (AMN). En déduire qu'il est le projeté orthogonal du point F sur le plan (AMN).

5. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre ou d'une pyramide est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h,$$

$\mathcal{B}$ étant l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Montrer que le volume du tétraèdre AMNF est le double du volume de la pyramide BCGFM.

Corrigé

Partie A

1.
- Le point M est défini par $\overrightarrow{\text{BM}} = \overrightarrow{\text{AB}}$, donc il appartient à la droite (AB), et donc au plan (FAB). On en déduit que la droite (FM) est une droite incluse dans le plan (FAB).
- Le plan (FAB) contient la face ABFE du cube. Comme les faces du cube sont des carrés, on en déduit que la droite (FG) est perpendiculaire à la droite (EF) (via le carré EFGH) et à la droite (FB) (via le carré BCGF).

  Ainsi, (FG) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (FAB) : on en déduit que (FG) est orthogonale au plan (FAB).
- Puisque (FG) est orthogonale à (FAB), elle est donc également orthogonale à toute droite du plan (FAB), notamment la droite (FM).
- Comme F est un point d'intersection entre (FB) et (FM), les droites sont orthogonales et sécantes, on peut donc conclure que les droites sont bien perpendiculaires.

2.
- On a déjà établi que M est sur la droite (AB), avec : $\overrightarrow{\text{AM}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{BM}} = 2\overrightarrow{\text{AB}}$;
- Comme ABCDEFGH est un cube, on a notamment : $\overrightarrow{\text{HG}} = \overrightarrow{\text{AB}}$;
- On en déduit donc : $\overrightarrow{\text{AM}} = 2\overrightarrow{\text{HG}}$;
- Les droites (AM) et (HG) sont dirigées par des vecteurs directeurs colinéaires, donc elles sont parallèles, et donc coplanaires ;
- cela implique que les quatre points A, M, H et G sont également coplanaires.

Partie B

Le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace : les vecteurs de base sont deux à deux orthogonaux et de même norme, car ils sont basés sur les arêtes consécutives d'un cube.
On a alors les coordonnées : $A(0\,;\,0\,;\,0)$; $B(1\,;\,0\,;\,0)$; $C(1\,;\,1\,;\,0)$; $D(0\,;\,1\,;\,0)$; $E(0\,;\,0\,;\,1)$; $F(1\,;\,0\,;\,1)$; $G(1\,;\,1\,;\,1)$; $H(0\,;\,1\,;\,1)$ et $M(2\,;\,0\,;\,0)$.

1. On a : $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}2-1\\0-1\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

et, comme A est l'origine du repère, les coordonnées de H sont aussi celles du vecteur $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Ces coordonnées sont clairement non proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

2. **a.** (GM) passe par le point G de coordonnées $(1\,;\,1\,;\,1)$ et est dirigée par $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de (GM) est donc :

$$\begin{cases}x=x_G+tx_{\overrightarrow{GM}}\\y=y_G+ty_{\overrightarrow{GM}}\\z=z_G+tz_{\overrightarrow{GM}}\end{cases}\quad\text{avec } t\in\mathbb{R}\quad\text{soit}\quad\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=1-t\end{cases}\quad\text{avec } t\in\mathbb{R}$$

b. Cherchons s'il est possible qu'un point de paramètre t sur (GM) ait les mêmes coordonnées qu'un point de paramètre k sur (AH). Pour cela, résolvons le système :

$$S:\begin{cases}1+t=0\\1-t=k\\1-t=k\end{cases}\quad\text{on a :}\quad S\iff\begin{cases}t=-1\\k=1-(-1)\\k=1-(-1)\end{cases}\quad\text{Soit}\quad S\iff\begin{cases}t=-1\\k=2\\k=2\end{cases}$$

On en déduit que seul un point est commun aux deux droites, c'est le point de paramètre $t=-1$ sur (GM), qui est aussi le point de paramètre $k=2$ sur (AH).

Qu'on utilise une représentation paramétrique ou l'autre pour trouver les coordonnées de N, on a bien : $N\big(1+(-1)\,;\,1-(-1)\,;\,1-(-1)\big)$ c'est-à-dire $N(0\,;\,2\,;\,2)$.

3. **a.** On a : $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{AN}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormal, on peut calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=2\times0+0\times2+0\times2=0$.

Les vecteurs sont donc orthogonaux, donc les droites (AM) et (AN) sont orthogonales (et sécantes en A), donc perpendiculaires :

Le triangle AMN est bien rectangle en A.

b. Le repère est orthonormal donc on peut aussi calculer des longueurs avec les coordonnées :

$AM=\sqrt{2^2+0^2+0^2}=\sqrt{4}=2$, $AN=\sqrt{0^2+2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Avec [AM] pour base, la hauteur correspondante est [AN] puisque le triangle est rectangle en A.

On a donc : $\mathscr{A}_{AMN}=\dfrac{AM\times AN}{2}=\dfrac{2\times2\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.

4. **a.** J est le centre de BCGF, donc notamment le milieu de [BG] :

$\text{J} = \left(\dfrac{x_\text{B}+x_\text{G}}{2} ; \dfrac{y_\text{B}+y_\text{G}}{2} ; \dfrac{z_\text{B}+z_\text{G}}{2}\right)$, soit $\text{J}\left(\dfrac{1+1}{2} ; \dfrac{0+1}{2} ; \dfrac{0+1}{2}\right)$.

Finalement, les coordonnées de J sont : J(1 ; 0,5 ; 0,5).

b. On a : $\overrightarrow{\text{FJ}}\begin{pmatrix}1-1\\0,5-0\\0,5-1\end{pmatrix}$ soit : $\overrightarrow{\text{FJ}}\begin{pmatrix}0\\0,5\\-0,5\end{pmatrix}$.

Vérifions : $\overrightarrow{\text{FJ}}\cdot\overrightarrow{\text{AM}} = 0\times 2 + 0,5\times 0 + (-0,5)\times 0 = 0$.

et, par ailleurs : $\overrightarrow{\text{FJ}}\cdot\overrightarrow{\text{AN}} = 0\times 0 + 0,5\times 2 + (-0,5)\times 2 = 0$.

Donc $\overrightarrow{\text{FJ}}$ est orthogonal à deux vecteurs formant une base de (AMN) : c'est bien un vecteur normal au plan (AMN).

c. Puisque $\overrightarrow{\text{FJ}}$ est normal à (AMN), on en déduit qu'(AMN) admet une équation de la forme : $0\times x + 1\times y + (-1)\times z + d = 0$, soit $y - z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

Comme A(0 ; 0 ; 0) est sur (AMN), ses coordonnées doivent vérifier l'équation, donc :

$0 - 0 + d = 0 \iff d = 0$.

Finalement, une équation de (AMN) est $y - z = 0$.

En testant l'appartenance de J à (AMN) : $y_\text{J} - z_\text{J} = 0,5 - 0,5$

$= 0$

Les coordonnées de J vérifient l'équation du plan, donc J appartient au plan (AMN).

Comme $\overrightarrow{\text{FJ}}$ est orthogonal au plan et que J est dans le plan, J est bien le projeté orthogonal de F sur (AMN).

5. Pour déterminer le volume du tétraèdre AMNF, on choisir comme base le triangle AMN, la hauteur correspondante étant [FJ].

$\mathcal{V}_\text{AMNF} = \dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\times \text{FJ}$ où $\text{FJ} = \sqrt{0^2+0,5^2+0,5^2} = \sqrt{0,5} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On a donc : $\mathcal{V}_\text{AMNF} = \dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{3}\times 2 = \dfrac{2}{3}$.

Pour la pyramide BCGFM, la base (seule face non triangulaire) le carré BCGF (carré de côté 1, donc d'aire 1), la hauteur étant la distance entre M et le plan (BCG).

Comme on a déjà établi que M est un point de (AB), et que ABCDEFGH est un cube, on en déduit que (BM) est perpendiculaire au plan (BCG) et que B est donc le projeté orthogonal de M sur (BCG). La distance entre M et (BCG) est donc BM = AB = 1.

$\mathcal{V}_\text{BCGFM} = \dfrac{1}{3}\times 1\times 1 = \dfrac{1}{3}$.

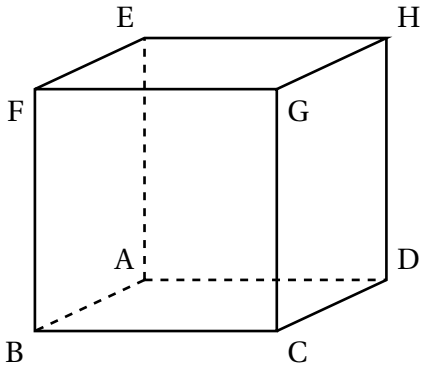
Donc on a bien : $\mathcal{V}_\text{AMNF} = 2\times\mathcal{V}_\text{BCGFM}$.

Exercice 23.

« *Dans un triangle non équilatéral, la droite d'Euler est la droite qui passe par les trois points suivants* :

— *le centre du cercle circonscrit à ce triangle (cercle passant par les trois sommets de ce triangle).*
— *le centre de gravité de ce triangle situé à l'intersection des médianes de ce triangle.*
— *l'orthocentre de ce triangle situé à l'intersection des hauteurs de ce triangle* ».

Le but de l'exercice est d'étudier un exemple de droite d'Euler.
On considère un cube ABCDEFGH de côté une unité.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.
On note I le milieu du segment [AB] et J le milieu du segment [BG].



1. Donner sans justification les coordonnées des points A, B, G, I et J.

2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AJ).

b. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IG) est :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}t \\ y = \quad t \\ z = \quad t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

c. Démontrer que les droites (AJ) et (IG) sont sécantes en un point S de coordonnées $S\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

3. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}(0\,;\,-1\,;\,1)$ est normal au plan (ABG).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABG).

c. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{n}$ et passant par le point K de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$ est :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \quad -t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que cette droite (d) coupe le plan (ABG) en un point L de coordonnées $L\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

d. Montrer que le point L est équidistant des points A, B et G.

4. Montrer que le triangle ABG est rectangle en B.

5. **a.** Identifier le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre du triangle ABG (aucune justification n'est attendue).

b. Vérifier par un calcul que ces trois points sont effectivement alignés.

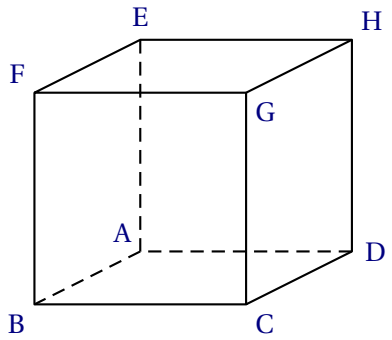
Corrigé

Le but de l'exercice est d'étudier un exemple de droite d'Euler.

On considère un cube ABCDEFGH de côté une unité.

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

On note I le milieu du segment [AB] et J le milieu du segment [BG].



1. On donne les coordonnées des points A, B, G, I et J :

$A\,(0\,,\,0\,,\,0)$; $B\,(1\,,\,0\,,\,0)$; $G\,(1\,,\,1\,,\,1)$; $I\left(\frac{1}{2}\,,\,0\,,\,0\right)$; $J\left(1\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)$

2. **a.** La droite (AJ) est l'ensemble des points $M\left(x\,,\,y\,,\,z\right)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AJ}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AJ}$ avec $k \in \mathbf{R}$.

$\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \\ z_M - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{AJ}$ sont $\begin{pmatrix} x_J - x_A \\ y_J - y_A \\ z_J - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AJ} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = k \\ y = \frac{k}{2} \\ z = \frac{k}{2} \end{cases}$$

La droite (AJ) a donc pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = k \\ y = \frac{k}{2} \\ z = \frac{k}{2} \end{cases}$ avec $k \in \mathbf{R}$

b. $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$ est la représentation paramétrique d'une droite passant par le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,,\,0\,,\,0\right)$, c'est-à-dire le point I, et ayant le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

$\overrightarrow{IG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_G - x_I \\ y_G - y_I \\ z_G - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (IG).

c. Les droites (AJ) et (IG) sont sécantes si et seulement si on peut trouver un couple de réels $(k\,;\,t)$ tel que $\begin{cases} k &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}k &= t \\ \frac{1}{2}k &= t \end{cases}$. On résout ce système.

$$\begin{cases} k &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}k &= t \\ \frac{1}{2}k &= t \end{cases} \iff \begin{cases} k &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ k &= 2t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ k &= 2t \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{2}t &= \frac{1}{2} \\ k &= 2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t &= \frac{1}{3} \\ k &= \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc les droites (AJ) et (IG) sont sécantes. Pour $k=\frac{2}{3}$, on a $\begin{cases} k &= \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}k &= \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}k &= \frac{1}{3} \end{cases}$

Le point S d'intersection des droites (AJ) et (IG) a donc pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

3. **a.** Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(0\,;\,-1\,;\,1)$.

$\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AG}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 0\times 1+(-1)\times 0+1\times 0=0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{\text{AB}}$.
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{AG}} = 0\times 1+(-1)\times 1+1\times 1=0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{\text{AG}}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AG}}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABG).

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABG), donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABG).

b. Le plan (ABG) est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,,\,y\,,\,z)$ tels que $\overrightarrow{\text{AM}}$ et $\vec{n}$ soient orthogonaux, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\vec{n}=0$.

$\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\vec{n}=0 \iff x\times 0+y\times(-1)+z\times 1=0 \iff -y+z=0$

Le plan (ABG) a pour équation cartésienne : $-y+z=0$.

c. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{n}$ et passant par le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$ est : $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-t \\ z=1+t \end{cases}$ $(t\in\mathbf{R})$.

S'il existe, le point d'intersection de la droite (d) et du plan (ABG), est solution du système : $\begin{cases} x &= \frac{1}{2} \\ y &= -t \\ z &= 1+t \\ -y+z &= 0 \end{cases}$

Il faut donc que : $-(-t)+(1+t)=0$ soit $2t+1=0$ ou encore $t=-\frac{1}{2}$.

Pour $t=-\frac{1}{2}$, on a $x=\frac{1}{2}$, $y=-t=\frac{1}{2}$ et $z=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Donc la droite (d) coupe le plan (ABG) au point L de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

d. On calcule les distances LA, LB et LG.

- $\text{LA}^2=(x_\text{A}-x_\text{L})^2+\left(y_\text{A}-y_\text{L}\right)^2+(z_\text{A}-z_\text{L})^2$
  $=\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
  donc $\text{LA}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\text{LB}^2=(x_\text{B}-x_\text{L})^2+\left(y_\text{B}-y_\text{L}\right)^2+(z_\text{B}-z_\text{L})^2$
  $=\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
  donc $\text{LB}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\text{LG}^2=(x_\text{G}-x_\text{L})^2+\left(y_\text{G}-y_\text{L}\right)^2+(z_\text{G}-z_\text{L})^2$
  $=\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
  donc $\text{LG}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc le point L est équidistant des points A, B et G.

4. $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BG}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-1\\1-0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{BG}}=1\times0+0\times1+0\times1=0$ donc $\overrightarrow{\text{AB}}\perp\overrightarrow{\text{BG}}$ donc le triangle ABG est rectangle en B.

5. **a.** Points remarquables du triangle ABG.

- (AJ) et (IG) sont deux médianes du triangle ABG et elles se coupent en S ; donc le point S est le centre de gravité du triangle ABG.
- Le point L est équidistant des points A, B et G donc c'est le centre du cercle circonscrit au triangle ABG.
- Le triangle ABG est rectangle en B donc B est son orthocentre.

b. $\overrightarrow{\text{BS}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-1\\\frac{1}{3}-0\\\frac{1}{3}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BL}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-1\\\frac{1}{2}-0\\\frac{1}{2}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\text{BS}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\text{BL}}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{BS}}$ et $\overrightarrow{\text{BL}}$ sont colinéaires et donc les points B, S et L sont alignés.

Exercice 24.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère les points suivants :

$$A(1\,;3\,;0),\quad B(-1\,;4\,;5),\quad C(0\,;1\,;0)\quad \text{et}\quad D(-2\,;2\,;1).$$

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.
   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   b. Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :
   $$2x-y+z+1=0.$$
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
4. On appelle H le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}\ \frac{4}{3}\,;\,\frac{5}{3}\right)$.
   Vérifier que H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
5. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V=\dfrac{1}{3}B\times h$, où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est sa hauteur relative à cette base.
   a. Montrer que $DH=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.
   b. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.
6. On considère la droite d de représentation paramétrique :
   $$\begin{cases} x &= 1-2k\\ y &= -3k\\ z &= 1+k\end{cases}\quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$
   La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Corrigé

1. On détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$.
   Ces vecteurs ont des coordonnées qui sont clairement non proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, et donc les trois points A, B et C ne sont pas alignés : ils déterminent bien un plan.
2. Comme le repère est orthonormal, en utilisant les coordonnées des vecteurs précédents, qui sont non nuls, on va calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2\times(-1)+1\times(-2)+5\times 0=2+-2+0=0$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls, mais leur produit scalaire l'est, donc les droites (AB) et (AC) sont orthogonales, et donc le triangle ABC est bien rectangle en A.

3. **a.** Calculons le produit scalaire de $\vec{u}$ avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, ces deux vecteurs formant une base du plan (ABC).

— $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-2) + (-1) \times 1 + 1 \times 5 = -4 - 1 + 5 = 0$;
— $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 1 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0$;

$\vec{u}$ est donc orthogonal à deux vecteurs formant une base de (ABC), il est donc orthogonal à (ABC).

Toute droite dirigée par $\vec{u}$, et donc Δ, est donc orthogonale à (ABC).

b. $\vec{u}$ est donc un vecteur normal au plan (ABC), d'après la question précédente.

Par propriété, on en déduit qu'une équation de (ABC) est de la forme :

$2x - y + z + d = 0$ où d est un réel.

$$\begin{aligned} A \in (ABC) &\iff 2x_A - y_A + z_A + d = 0 \\ &\iff 2 \times 1 - 3 + 0 + d = 0 \\ &\iff -1 + d = 0 \\ &\iff d = 1 \end{aligned}$$

Une équation de (ABC) est donc bien $2x - y + z + 1 = 0$.

c. Δ contient D$(-2\ ;\ 2\ ;\ 1)$ et est dirigée par $\vec{u}$, donc, par propriété, une représentation paramétrique de Δ est : $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

4. Considérons M_t, le point de paramètre t sur la droite Δ.

$$\begin{aligned} M_t \in (ABC) &\iff 2x_{M_t} - y_{M_t} + z_{M_t} + 1 = 0 \\ &\iff 2(-2 + 2t) - (2 - t) + (1 + t) + 1 = 0 \\ &\iff -4 + 4t - 2 + t + 1 + t + 1 = 0 \\ &\iff 6t - 4 = 0 \\ &\iff t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Δ n'a qu'un seul point sur (ABC) (c'est normal, comme elle est orthogonale au plan, elle est sécante au plan), c'est le point de paramètre $\frac{2}{3}$ dans la représentation, c'est-à-dire que c'est le point de coordonnées $\left(-2 + 2 \times \frac{2}{3}\ ;\ 2 - \frac{2}{3}; 1 + \frac{2}{3}\right)$, soit $\left(-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\ ;\ \frac{5}{3}\right)$.

On reconnaît les coordonnées du point H. H est donc l'intersection de Δ et (ABC), c'est donc l'intersection du plan (ABC) avec la droite passant par D et orthogonale à (ABC) : H est le projeté orthogonal de D sur (ABC).

5. **a.** On est dans un repère orthonormé :

$$\begin{aligned} DH &= \sqrt{\left(-\frac{2}{3} - (-2)\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{\sqrt{4 \times 6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

On arrive bien à la distance annoncée : $DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

b. Pour le tétraèdre ABCD, on va choisir comme base le triangle ABC, rectangle en A, et la hauteur correspondante, est donc la distance de H au plan (ABC), c'est-à-dire la distance DH.

Pour calculer B, l'aire de la base, on va utiliser comme base de ABC la longueur AB, et comme hauteur correspondante, la longueur AC (car ABC est rectangle en A).

Donc : $B = \dfrac{\text{AB} \times \text{AC}}{2} = \dfrac{\sqrt{(-2)^2+1^2+5^2} \times \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+0^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{30} \times \sqrt{5}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{150}}{2} = \dfrac{5}{2}\sqrt{6}.$

Le volume du tétraèdre est donc : $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{2}\sqrt{6} \times \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$= \dfrac{10}{3}$

Le volume du tétraèdre est donc de $\dfrac{10}{3} \approx 3,33$.

6. Par lecture de la représentation paramétrique de d, on peut dire que la droite d est dirigée par : $\vec{u'}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on a : $\vec{u} \cdot \vec{u'} = 2 \times (-2) + (-1) \times -3 + 1 \times 1$

$= -4 + 3 + 1 = 0$

$\vec{u'}$ est orthogonal à $\vec{u}$ qui est lui-même un vecteur normal à (ABC). On en déduit que $\vec{u'}$ est un vecteur du plan (ABC). Ainsi, la droite d est une droite parallèle au plan (ABC).

Remarque : bien que ça ne soit pas demandé ici, on peut préciser : d passe par le point E de coordonnées $(1;0;1)$. Ces coordonnées ne vérifiant pas l'équation de (ABC), on en déduit que E n'appartient pas au plan, et donc que d est strictement parallèle à (ABC) (elle n'est pas incluse dans le plan).

Exercice 25.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère :

- les points A$(-1 ; 2 ; 1)$, B$(1 ; -1 ; 2)$ et C$(1 ; 1 ; 1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \begin{cases} x &= \frac{3}{2} + 2t \\ y &= 2 + t \\ z &= 3 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R};$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d' : \begin{cases} x &= s \\ y &= \frac{3}{2} + s \\ z &= 3 - 2s \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R};$$

Partie A

1. Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S\left(-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,4\right)$.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x+2y+4z-7=0.$$

3. Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

4. **a.** Démontrer que le point H$(-1\,;\,0\,;\,2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC)

   b. En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM<\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment [CS]. On a donc $\overrightarrow{CM}=k\overrightarrow{CS}$ avec k réel de l'intervalle $[0\,;1]$.

1. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k.
2. Existe-t-il un point M sur le segment [CS] tel que le triangle (MAB) soit rectangle en M ?

Corrigé

Partie A

1. Les droites sont sécantes s'il existe un point dont les coordonnées vérifient les équations paramétriques des deux droites, donc s'il existe deux réels t et s donnant les mêmes coordonnées avec les deux systèmes d'équations, soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl}x&=&\frac{3}{2}+2t=s\\y&=&2+t=\frac{3}{2}+s\\z&=&3-t=3-2s\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}\frac{3}{2}+2t&=&s\\2+t&=&\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+2t\\3-t&=&3-2(\frac{3}{2}+2t)\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}\frac{3}{2}+2t&=&s\\2+t&=&3+2t\\3-t&=&-4t\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}\frac{3}{2}+2t&=&s\\-1&=&t\\3t&=&-3\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}-\frac{1}{2}&=&s\\-1&=&t\\t&=&-1\end{array}\right.$$

   Ces équations sont compatibles : les équations paramétriques de d et de (d') donnent respectivement avec $t=-1$ et $s=-\frac{1}{2}$ les mêmes coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,4\right)$ du point commun à ces deux droites.

2. **a.** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$.

   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : leurs premières coordonnées sont égales mais pas les autres

   Or $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2-6+4=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2-2+0=0$.

   Conclusion $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est un vecteur normal à ce plan.

b. Le résultat précédent montre que :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 1x+2y+4z+d=0,\ d\in\mathbb{R}$.
En particulier $\text{C}(1\,;\,1\,;\,1) \in (\text{ABC}) \iff 1+2+4+d=0,\ d\in\mathbb{R} \iff d=-7$.
Finalement : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff x+2y+4z-7=0$.

3. A, B et C définissant un plan, il suffit de montrer que S n'appartient pas à ce plan :
$\text{S}\left(-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,4\right) \notin (\text{ABC}) \iff -\frac{1}{2}+2+16-7\neq 0 \iff \frac{21}{2}\neq 0$ qui est bien vraie.

4. **a.** Si H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC), alors $\overrightarrow{\text{SH}}$ est un vecteur normal au plan (ABC), donc colinéaire au vecteur $\vec{n}$.
Or $\overrightarrow{\text{SH}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\-2\end{pmatrix}$.
Avec $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, on a bien $\vec{n}=-2\overrightarrow{\text{SH}}$.
D'autre part on a ;
$\text{H}(-1\,;\,0\,;\,2) \in (\text{ABC}) \iff -1+2\times 0+4\times 2-7=0$ qui est vraie.
Conclusion : le point $\text{H}(-1\,;\,0\,;\,2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).

b. De $\overrightarrow{\text{SH}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\-2\end{pmatrix}$ on en déduit que $\text{SH}^2=\frac{1}{4}+1+4=\frac{1}{4}+\frac{20}{4}=\frac{21}{4}$, d'où $\text{SH}=\sqrt{\frac{21}{4}}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$.
Comme H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) on sait que la distance SH est la plus petite distance de S au plan. Pour tout autre point M distinct de H du plan (ABC), [SM] est l'hypoténuse du triangle rectangle SHM donc le côté le plus long de ce triangle et en particulier SM > SH, soit $\text{SM} > \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

1. Si $M(x\,;\,y\,;\,z)$, avec $\overrightarrow{\text{CS}}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\0\\3\end{pmatrix}$, on a

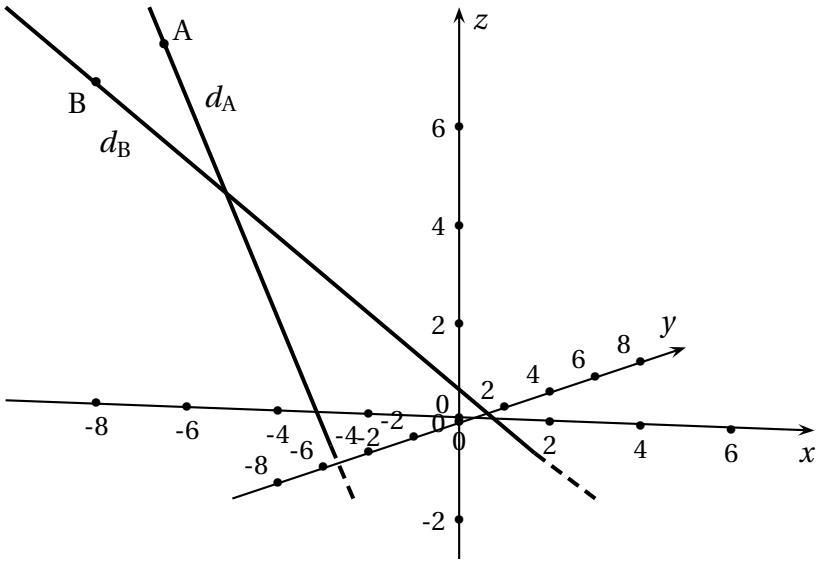
$$\overrightarrow{\text{CM}}=k\overrightarrow{\text{CS}} \iff \begin{cases} x-1 &= -\frac{3}{2}k\\ y-1 &= 0k\\ z-1 &= 3k\end{cases} \iff \begin{cases} x &= 1-\frac{3}{2}k\\ y &= 1\\ z &= 1+3k\end{cases}$$

2. $(M\text{AB})$ est rectangle en M si :
$(\text{A}M)$ et $(\text{B}M)$ sont perpendiculaires soit si $\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\overrightarrow{\text{BM}}=0$.
Avec $\overrightarrow{\text{AM}}\begin{pmatrix}1-\frac{3}{2}k+1\\1-2\\1+3k-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{AM}}\begin{pmatrix}2-\frac{3}{2}k\\-1\\3k\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BM}}\begin{pmatrix}1-\frac{3}{2}k-1\\1+1\\1+3k-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\text{BM}}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}k\\2\\3k-1\end{pmatrix}$ le produit scalaire s'écrit :

$-\frac{3}{2}k\left(2-\frac{3}{2}k\right)-2+3k(3k-1)=0 \iff -3k+\frac{9}{4}k^2-2+9k^2-3k=0 \iff$
$9k^2+36k^2-24k-8=0 \iff 45k^2-24k-8=0.$
Pour cette équation du second degré, on a
$\Delta = 24^2-4\times 45\times(-8)=2016>0.$
L'équation a deux solutions :
$k_1=\frac{24+\sqrt{2016}}{90}\approx 0,765$ et $k_2=\frac{24-\sqrt{2016}}{90}\approx -0,232.$
Seul $k_1\in[0\,;\,1]$.
Conclusion : il existe un seul point M_1 du segment [CS] tel que M_1AB est un triangle rectangle en M_1.
Rem. Si on remplace k par la valeur trouvée ci-dessus, on trouve que $AB^2=14$,
$AM_1^2=7$ et $BM_1^2=7$.
Le triangle M_1AB est un triangle rectangle ($7+7=14$), mais il est aussi isocèle.

Exercice 26.

Deux avions sont en approche d'un aéroport.
On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ dont l'origine O est le pied de la tour de contrôle, et le sol est le plan P_0 d'équation $z=0$.
L'unité des axes correspond à 1 km.
On modélise les avions par des points.



L'avion Alpha transmet à la tour sa position en A$(-7\,;\,1\,;\,7)$ et sa trajectoire est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$.
L'avion Bêta transmet une trajectoire définie par la droite d_B passant par le point B dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= -11+5t \\ y &= -5+\ t \\ z &= 11-4t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

1. S'il ne dévie pas de sa trajectoire, déterminer les coordonnées du point S en lequel l'avion Bêta touchera le sol.

2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite d_A caractérisant la trajectoire de l'avion Alpha.

b. Les deux avions peuvent-ils entrer en collision ?

3. **a.** Démontrer que l'avion Alpha passe par la position E$(-3\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan P_E passant par E et perpendiculaire à la droite d_A est :

$$2x-y-3z+8=0.$$

c. Vérifier que le point F$(-1\ ;\ -3\ ;\ 3)$ est le point d'intersection du plan P_E et de la droite d_B.

d. Calculer la valeur exacte de la distance EF, puis vérifier que cela correspond à une distance de 3 464 m, à 1 m près.

4. La réglementation aérienne stipule que deux avions en approche doivent être à tout instant à au moins 3 milles nautiques l'un de l'autre (1 mille nautique vaut 1 852 m).

Si les avions Alpha et Bêta sont respectivement en E et F au même instant, leur distance de sécurité est-elle respectée ?

Corrigé

1. Le sol est le plan P_0 d'équation $z=0$ donc l'avion touchera le sol lorsque $z=0$, c'est à dire $11-4t=0$ soit $t=\dfrac{11}{4}$.

Les coordonnées du point S sont donc : $\begin{cases} x=-11+5\times\dfrac{11}{4}=\dfrac{11}{4} \\ y=-5+\dfrac{11}{4}=-\dfrac{9}{4} \\ z=0 \end{cases}$

S'il ne dévie pas de sa trajectoire, les coordonnées du point S en lequel l'avion Bêta touchera le sol sont : $\left(\dfrac{11}{4};-\dfrac{9}{4};0\right)$.

2. **a.** L'avion Alpha transmet à la tour sa position en A$(-7;1;7)$ et sa trajectoire est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite d_A caractérisant la trajectoire de l'avion Alpha est donc : $\begin{cases} x=-7+2s \\ y=1-s \\ z=7-3s \end{cases}$ où s décrit $\mathbb{R}$.

b. Les deux avions entreront en collision si leur deux trajectoires se coupent, c'est à dire si les droites d_A et d_B sont sécantes.

Cherchons s'il existe un couple $(t\ ;\ s)$ tel que le point de paramètre t sur d_B soit confondu avec le point de paramètre s sur d_A, pour cela, résolvons :

$$\begin{cases} -11+5t=-7+2s \\ -5+t=1-s \\ 11-4t=7-3s \end{cases} \iff \begin{cases} -11+5(6-s)=-7+2s \\ t=6-s \\ 11-4(6-s)=7-3s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -11+30-5s=-7+2s \\ t=6-s \\ 11-24+4s=7-3s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 26=7s \\ t=6-s \\ 7s=20 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s=\dfrac{26}{7} \\ t=6-s \\ s=\dfrac{20}{7} \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution, donc les deux avions ne peuvent pas rentrer en collision.

3. **a.** L'avion Alpha passe par la position E$(-3\ ;\ -1\ ;\ 1)$ s'il existe un réel s tel que le point de paramètre s sur d_A ait pour coordonnées $(-3\ ;\ -1\ ;\ 1)$, pour cela, résolvons :

$$\begin{cases} -3=-7+2s \\ -1=1-s \\ 1=7-3s \end{cases} \iff \begin{cases} 4=2s \\ -2=-s \\ -6=-3s \end{cases} \iff \begin{cases} s=2 \\ s=2 \\ s=2 \end{cases}$$

Le point E$(-3\ ;\ -1\ ;\ 1)$ correspond au point de paramètre $s=2$ donc l'avion Alpha passe par le point E.

b. Le plan P_E est perpendiculaire à la droite d_A dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan P_E.

Une équation cartésienne du plan P_E est donc de la forme : $2x-y-3z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

De plus, le point E appartient au plan P_E donc les coordonnées du point E vérifient l'équation du plan P_E, d'où : $2x_E-y_E-3z_E+d=0$ soit $2\times(-3)-(-1)-3\times 1+d=0$;

on a donc $-6+1-3+d=0 \iff d=8$

Conclusion : une équation cartésienne du plan P_E est bien : $2x-y-3z+8=0$.

c. Déterminons les coordonnées du point F, intersection du plan P_E et de la droite d_B.

Les coordonnées des points d'intersection sont solutions du système

$$\begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = -5 + t \\ z = 11 - 4t \\ 2x - y - 3z + 8 = 0 \end{cases}$$

On cherche donc t qui vérifie $2(-11+5t)-(-5+t)-3(11-4t)+8=0$ c'est-à-dire :

$-22+10t+5-t-33+12t+8=0 \iff 21t=42 \iff t=\dfrac{42}{21}=2.$

On en déduit $\begin{cases} x = -11+5t = -11+5\times 2 = -1 \\ y = -5+t = -5+2 = -3 \\ z = 11-4t = 11-4\times 2 = 11-8 = 3 \end{cases}$

Le point d'intersection du plan P_E et de la droite d_B est le point F$(-1\ ;\ -3\ ;\ 3)$.

d. Le repère est orthonormé on peut donc utiliser les coordonnées pour calculer les distances.

$\text{EF} = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2 + (z_F - z_E)^2}$

$\text{EF} = \sqrt{(-1-(-3))^2 + (-3-(-1))^2 + (3-1)^2}$

$\text{EF} = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (2)^2}$

$\text{EF} = \sqrt{4+4+4}$

$\text{EF} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

d'où EF$\approx 3{,}464\,1$ km soit EF$\approx 3\,646$ m à 1 m près.

4. Si les avions Alpha et Bêta sont respectivement en E et F au même instant, la distance les séparant est de 3 646 m soit environ $\dfrac{3\,646}{1\,852} \approx 1{,}97$ mille nautique.

Or $1{,}97 < 3$ donc leur distance de sécurité n'est pas respectée.

Exercice 27.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$.

1. On considère les points A$(-1\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et B$(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$.

Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x &= 3-2t \\ y &= 2-t \\ z &= -1+3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB).

2. On considère :

- la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x &= 15+k \\ y &= 8-k \\ z &= -6+2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$;
- la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x &= 1+4s \\ y &= 2+4s \\ z &= 1-6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-y+z+1=0$.
Affirmation 4 : La distance du point C$(2\,;\,-1\,;\,2)$ au plan $\mathscr{P}$ est égale à $2\sqrt{3}$.

Corrigé

1. Affirmation 1 : Vraie.

La lecture de la représentation paramétrique donnée indique que la droite représentée :

— passe (pour le paramètre $t=0$) par le point de coordonnées $(3\,;\,2\,;\,-1)$, autrement dit par B ;

— et qu'elle est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Comme on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-1)\\2-0\\-1-5\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\\-6\end{pmatrix}$, on remarque que $\overrightarrow{AB} = -2\vec{u}$, donc la droite dont on a la représentation paramétrique est dirigée par un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Ainsi, la représentation paramétrique donnée est celle d'une droite passant par B et dirigée par $\overrightarrow{AB}$: c'est bien la droite (AB).

Affirmation 2 : Fausse.

Comme O est l'origine du repère, on a $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont clairement non colinéaires, et donc O, A et B définissent bien un plan. Le repère est orthonormal, donc on peut calculer des produits scalaires à l'aide des coordonnées :

On a bien : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA} = 5\times(-1)+(-2)\times 0+1\times 5 = -5+0+5 = 0$ et $\vec{n}$ est donc bien orthogonal à $\overrightarrow{OA}$,

par contre, on a : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{OB} = 5\times 3+(-2)\times 2+1\times(-1) = 15-4-1 = 10 \neq 0$ et $\vec{n}$ n'est donc pas orthogonal à $\overrightarrow{OB}$.

Ainsi, $\vec{n}$ n'est pas orthogonal au plan (OAB), car il n'est pas orthogonal à deux vecteurs définissant une base de ce plan.

2. **Affirmation 3 : Fausse.**

Par lecture des représentations paramétriques, les deux droites d et d' sont dirigées respectivement par $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v'}\begin{pmatrix}4\\4\\-6\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont clairement non colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles (ni confondues, ni strictement parallèles). Elles peuvent donc être soit sécantes, soit non coplanaires.

Cherchons s'il existe un coupe $(k\,;\,s)$ tel que le point de paramètre k sur d soit confondu avec le point de paramètre s sur d', pour cela, résolvons :

$$\begin{cases}15+k=1+4s\\8-k=2+4s\\-6+2k=1-6s\end{cases} \iff \begin{cases}k=-14+4s\\8-(-14+4s)=2+4s\\-6+2(-14+4s)=1-6s\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}k=-14+4s\\8+14-4s=2+4s\\-6-28+8s=1-6s\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}k=-14+4s\\8s=20\\14s=35\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}k=-14+4s\\s=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}\\s=\frac{35}{14}=\frac{5}{2}\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}s=2{,}5\\s=2{,}5\\k=-4\end{cases}$$

Le système a une solution, donc les deux droites ont un point commun, le point qui a comme coordonnées $(11\,;\,12\,;\,-14)$, c'est le point de paramètre $k=-4$ sur d et c'est aussi le point de paramètre $s=2{,}5$ sur d'.

Elles sont donc sécantes en ce point, et donc sont coplanaires.

3. **Affirmation 4 : Vraie.**

Le repère est orthonormé, donc par lecture de l'équation de plan, P admet comme vecteur normal $\vec{n'}$ de coordonnées : $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, la droite Δ, passant par C et orthogonale à P aura pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=2+l\\y=-1-l\\z=2+l\end{cases} \quad \text{avec } l\in\mathbb{R}.$$

Si on appelle H le projeté orthogonal de C sur P, alors H $= P \cap \Delta$. Donc H sera le point de Δ dont le paramètre fait que les coordonnées paramétriques vérifient l'équation de P.

On résout donc : $(2+l)-(-1-l)+(2+l)+1=0 \iff 3l+6=0$

$\iff 3l=-6$

$\iff l=-2$

H est donc le point de paramètre $l=-2$ sur Δ, donc ses coordonnées sont :

H$(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

La distance CH vaut donc : $\text{CH} = \sqrt{(0-2)^2+(1-(-1))^2+(0-2)^2}$

$= \sqrt{4+4+4}$

$= \sqrt{4\times 3}$

$= \sqrt{4}\times\sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3}$

La distance entre C et P, c'est-à-dire la distance de C à son projeté orthogonal sur P est donc bien égale à $2\sqrt{3}$.

Exercice 28.

On se place dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\right)$de l'espace.
On considère les points A$(1\ ;\ 0\ ;\ 3)$, B$(-2\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et C$(0\ ;\ 3\ ;\ 2)$.

1. **a.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).

   c. En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $-x+y+4z-11=0$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $3x-3y+2z-9=0$ et le plan $\mathscr{P}'$ d'équation cartésienne $x-y-z+2=0$.

2. **a.** Démontrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants. On note (d) leur droite d'intersection.

   b. Déterminer si les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires.

3. Montrer que la droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

4. Montrer que le point M$(2\ ;\ 1\ ;\ 3)$ appartient aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. En déduire une représentation paramétrique de la droite (d).

5. Montrer que la droite (d) est aussi incluse dans le plan (ABC).
   Que peut-on dire des trois plans (ABC), $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$?

Corrigé

1. **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car $\dfrac{-3}{-1}\neq\dfrac{1}{3}$. Les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. D'après la question précédente, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base du plan (ABC). Avec $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$, on calcule $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}$:

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=3+1-4=0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=1+3-4=0$. $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc il est normal à ce plan (ABC).

c. $\vec{n}$ étant normal au plan (ABC), une équation cartésienne de ce plan est de la forme : $-x+y+4z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

$A(1\ ;\ 0\ ;\ 3)\in(ABC)$ donc $-1+0+12+d=0\iff d=-11$.

Donc $(ABC):-x+y+4x-11=0$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $3x-3y+2z-9=0$ et le plan $\mathscr{P}'$ d'équation cartésienne $x-y-z+2=0$.

2. **a.** Le vecteur $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$, le vecteur $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}'$.

Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires car $\dfrac{3}{1}\neq\dfrac{2}{-1}$. Donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont ni parallèles ni confondus. Ils sont donc sécants. Leur intersection est donc une droite (d).

b. $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=3+3-2=4\neq0$ donc les plans ne sont pas perpendiculaires.

(d) est la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ dont les vecteurs normaux sont respectivement $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v'}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Pour montrer que $\vec{u}$ dirige (d), il suffit de prouver que ce vecteur est contenu dans chacun des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, soit $\vec{u}.\vec{v}=0$ et $\vec{u}.\vec{v'}=0$

Or, $\vec{u}.\vec{v}=1\times3+1\times(-3)=0$ et $\vec{u}.\vec{v}=1\times1+1\times(-1)=0$.

Ainsi, (d) est bien dirigée par $\vec{u}$.

3. On remplace les coordonnées de M dans les deux équations de plans :

— $6-3+6-9=12-12=0$ donc $M\in\mathscr{P}$;

— $2-1-3+2=4-4=0$ donc $M\in\mathscr{P}'$.

La droite (d) passe donc par M et a pour vecteur directeur (d) : $\vec{u}$ donc

$$\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=3\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

4. On cherche l'intersection de (ABC) et de (d). On résout le système :

$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = 3 \\ -x+y+4z-11 = 0 \end{cases}$. S'il admet une infinité de solutions alors $(d) \subset (ABC)$.

On remplace x, y et z dans la dernière équation :

$-x+y+4z-11 = 0 \Rightarrow -(2+t)+1+t+4\times 3-11 = 0 \iff 0 = 0$. La dernière équation est vérifiée quelque soit la valeur de t. Donc ce système admet une infinité de solutions. $(d) \subset (ABC)$

Donc la droite (d) appartient aux trois plans (ABC), $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. Reprenons les trois vecteurs normaux des trois plans : $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{n_1}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{n_1}$ ne sont pas colinéaires, de même pour $\vec{u}$ et $\vec{n_2}$. Le plan (ABC) n'est donc confondu ni avec $\mathscr{P}$ ni avec $\mathscr{P}'$. Ces trois plans sont simplement sécants, d'intersections (d).

Exercice 29.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Les quatre questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une seule réponse correcte. Aucune justification n'est demandée.

Dans tout l'exercice, on considère que l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

On considère :

- les points A$(-3\,;\,1\,;\,4)$ et B$(1\,;5\,;2)$
- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $4x+4y-2z+3=0$
- la droite (d) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x &= -6+3t \\ y &= 1 \\ z &= 9-5t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

1. Les droites (AB) et (d) sont :

- **a.** sécantes non perpendiculaires.
- **b.** perpendiculaires.
- **c.** non coplanaires.
- **d.** parallèles.

2. La droite (AB) est :

- **a.** incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
- **b.** strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.

c. sécante et non orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

d. orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

3. On considère le plan P' d'équation cartésienne $2x+y+6z+5=0$.
Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont :

a. sécants et non perpendiculaires.

b. perpendiculaires.

c. confondus.

d. strictement parallèles.

4. On considère le point C$(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$. La valeur de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ arrondie au degré est :

a. 90°

b. 51°

c. 39°

d. 0°

Corrigé

1. Les droites (AB) et (d) sont : sécantes non perpendiculaires.

Un vecteur directeur de la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ est donc aussi un vecteur directeur de la droite (AB).

Un vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{u'}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et (d) ne sont pas parallèles.
Le repère est orthonormé, on peut donc utiliser les coordonnées des vecteurs pour calculer le produit scalaire.
$\vec{u}\cdot\vec{u'}=2\times3+0\times2-1\times(-5)=11\neq0$
donc les droites (AB) et (d) ne sont pas perpendiculaires.
Une équation paramétrique de la droite (AB) de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par le point A$(-3;1;4)$ est :
$\begin{cases}x=-3+2s\\y=1+2s\\z=4-s\end{cases}$ où $s\in\mathbb{R}$.
Les deux droites sont sécantes si et seulement si le système suivant admet une unique solution :
$\begin{cases}-3+2s=-6+3t\\1+2s=1\\4-s=9-5t\end{cases}\iff\begin{cases}2s-3t=-3\\s=0\\s-5t=-5\end{cases}\iff\begin{cases}-3t=-3\\s=0\\-5t=-5\end{cases}\iff\begin{cases}t=1\\s=0\\t=1\end{cases}$
Le système admet une unique solution donc les droites sont sécantes.

2. **La droite(AB) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.**

   Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ soit le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   La droite (AB) est donc orthogonal au plan $\mathscr{P}$.

3. **Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires.**

   Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$ est $\vec{n'}\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$.

   Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires donc les plans ne sont pas parallèles.

   On est dans un repère orthonormé, on peut donc utiliser les coordonnées pour calculer le produit scalaire.

   $\vec{n}\cdot\vec{n'} = 4\times 2+4\times 1-2\times(-6) = 8+4-12 = 0$

   Les vecteurs normaux sont orthogonaux donc les plans sont perpendiculaires.

4. **La valeur de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ arrondie au degré est $51°$.**

   On a : $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$.

   On est dans un repère orthonormé donc on peut utiliser les coordonnées pour calculer les longueurs et le produit scalaire.

   Calculons le produit scalaire de ces deux vecteurs de deux manières différentes :

   d'une part : $\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 3\times 4+0\times 4-5\times(-2) = 22$

   d'autre part :

   $\text{AC} = \sqrt{(-3)^2+0^2+(-5)^2} = \sqrt{34}$ et $\text{AB} = \sqrt{4^2+4^2+(-2)^2} = \sqrt{36} = 6$

   On a donc $\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = \text{AB}\times\text{AC}\times\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right) = 6\sqrt{34}\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right)$

   D'où : $22 = 6\sqrt{34}\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right)$, donc $\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right) = \dfrac{22}{6\sqrt{34}}$

   D'où $\widehat{\text{BAC}} \approx 51°$

Exercice 30.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère :

- les points C(3 ; 0 ; 0), D(0 ; 2 ; 0), H(−6 ; 2 ; 2) et $J\left(\frac{-54}{13}\,;\,\frac{62}{13}\,;\,0\right)$;
- le plan P d'équation cartésienne $2x+3y+6z-6=0$;
- le plan P' d'équation cartésienne $x-2y+3z-3=0$;
- la droite (d) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=-8+\frac{1}{3}t \\ y=-1+\frac{1}{2}t \\ z=-4+t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : La droite (d) est orthogonale au plan P et coupe ce plan en H.

Affirmation 2 : La mesure en degré de l'angle $\widehat{DCH}$, arrondie à 10^{-1}, est 17,3°.

Affirmation 3 : Les plans P et P' sont sécants et leur intersection est la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3-3t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Affirmation 4 : Le point J est le projeté orthogonal du point H sur la droite (CD).

Corrigé
Affirmation 1 :

D'après la représentation paramétrique donnée le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) et

d'après l'équation cartésienne de P , $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

$\vec{n}=6\,\vec{u}$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc (d) est orthogonale à P.
$2x_H+3y_H+6z_H-6=2\times(-6)+3\times2+6\times2-6=0$ donc $H\in P$.

$H(-6\,;\,2\,;\,2)\in(d)$ s'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} -6 = -8+\frac{1}{3}t \\ 2 = -1+\frac{1}{2}t \\ -4 = -4+t \end{cases} \iff \begin{cases} -18 = -24+t \\ 4 = -2+t \\ 2 = -4+t \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 6 = t \\ 6 = t \\ 6 = t \end{cases}$

Conclusion : **l'affirmation 1 est vraie**.
Affirmation 2 :

$\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-9\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CD} = -9\times(-3)+2\times2+2\times0 = 31$

Or par définition $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{CH}\|\times\|\overrightarrow{CD}\|\times\cos\left(\widehat{DCH}\right)$

On a $\|\overrightarrow{CH}\| = \sqrt{(-9)^2+2^2+2^2} = \sqrt{89}$ et $\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{(-3)^2+2^2+0^2} = \sqrt{13}$

donc $\cos\left(\widehat{DCH}\right) = \dfrac{\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CH}\|\times\|\overrightarrow{CD}\|} = \dfrac{31}{\sqrt{89}\times\sqrt{13}}$

donc l'angle $\widehat{DCH}$ mesure $\arccos\left(\dfrac{31}{\sqrt{89}\times\sqrt{13}}\right) \approx 24,3°$ donc **l'affirmation 2 est fausse**.

Affirmation 3 : $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P ; $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P'.

Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires donc les plan P et P' ne sont pas parallèles et sont donc sécants, leur intersection est une droite.

A$(3\,;0\,;0) \in \Delta$ (obtenu avec $t=0$)

$2x_A+3y_A+6z_A-6 = 2\times3+3\times0+6\times0-6 = 0$ donc $A \in P$ et $x_A-2y_A+3z_A-3 = 3-2\times0+3\times0-3 = 0$ donc $A \in P'$

Donc l'intersection des plans P et P' est une droite contenant A. Pour déterminer si cette droite est Δ, soit on prend un autre point, soit on montre qu'un vecteur directeur de Δ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.

B$(0\,;0\,;1) \in \Delta$ (obtenu avec $t=1$)

$2x_B+3y_B+6z_B-6 = 2\times0+3\times0+6\times1-6 = 0$ donc $B \in P$ et $x_B-2y_B+3z_B-3 = 0-2\times0+3\times1-3 = 0$ donc $B \in P'$ donc **l'affirmation 3 est vraie**.

Affirmation 4 : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ donc une représentation paramétrique de la droite (CD) est représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3-3s \\ y = 2s \\ z = 0 \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$

pour $s = \dfrac{31}{13}$ on retrouve les coordonnées de J donc $J \in$ (CD).

de plus $\overrightarrow{HJ}\begin{pmatrix}\frac{24}{13}\\\frac{36}{13}\\-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HJ}\cdot\overrightarrow{CD} = \dfrac{24}{13}\times(-3)+\dfrac{36}{13}\times2+(-2)\times0 = 0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{HJ}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux donc J est bien le projeté orthogonal de H sur (CD) donc **l'affirmation 4 est vraie**.

Exercice 31.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère :

- α un réel quelconque ;
- les points A(1 ; 1 ; 0), B(2 ; 1 ; 0) et C(α ; 3 ; α) ;
- (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \quad 2t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = \quad -t \end{cases}$$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.
Affirmation 1 : Pour toutes les valeurs de α, les points A, B et C définissent un plan et un vecteur normal à ce plan est $\vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.
Affirmation 2 : Il existe exactement une valeur de α telle que les droites (AC) et (d) soient parallèles.
Affirmation 3 : Une mesure de l'angle $\widehat{OAB}$ est 135°.
Affirmation 4 : Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point H(1 ; 2 ; 2).
Affirmation 5 : La sphère de centre O et de rayon 1 rencontre la droite (d) en deux points distincts.
On rappelle que la sphère de centre Ωet de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance r de Ω.

Corrigé

Affirmation 1 : Fausse.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\alpha-1\\2\\\alpha\end{pmatrix}$.
Quel que soit le réel α, ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, et ils définissent bien un plan.
Cependant, le repère étant orthonormé, on peut utiliser les coordonnées pour calculer un produit scalaire : $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{\jmath} = (\alpha-1)\times 0 + 2\times 1 + \alpha\times 0 = 2$.
On constate que les vecteurs $\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux, donc $\vec{\jmath}$ n'est pas un vecteur normal au plan (ABC) : cette partie de l'affirmation est donc fausse.

Affirmation 2 : Fausse.

En interprétant le système de représentation paramétrique, la droite (d) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.
On rappelle : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\alpha-1\\2\\\alpha\end{pmatrix}$.
Pour que les droites soient parallèles, il faudrait que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient proportionnels, or, ici, ils ont la même ordonnée, donc ils devraient être égaux.

Or, si on choisit α égal à 1, les altitudes seront égales, mais pas les abscisses, si on choisit α égal à 2, alors les abscisses seront égales, mais pas les altitudes, et, pour tout autre réel α, les abscisses et altitudes seront différentes entre les deux vecteurs.
Quel que soit le réel α, les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc non colinéaires, et les droites ne sont pas parallèles : l'affirmation est donc fausse.

Affirmation 3 : Vraie.
O étant l'origine du repère, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ sont celles du point A, donc celles de $\overrightarrow{AO}$ sont : $\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$. On rappelle $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

On a donc, dans le repère orthonormé : $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = -1\times 1+(-1)\times 0+0\times 0 = -1$.
Par ailleurs, on a : $AO = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2}$, et $AB = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = \sqrt{1} = 1$.
On a donc aussi : $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = AO\times AB\times\cos\left(\widehat{OAB}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\widehat{OAB}\right)$.
En égalant les deux expressions du produit scalaire, il vient : $-1 = \sqrt{2}\cos\left(\widehat{OAB}\right)$,
ce qui équivaut à : $\cos\left(\widehat{OAB}\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.
On reconnaît ici l'opposé du cosinus d'un angle de $\dfrac{\pi}{4}$, ce qui est donc le cosinus d'un angle de mesure $\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$, soit effectivement 135°.

Affirmation 4 : Fausse.
Avec les coordonnées données pour H et la représentation paramétrique de (d), pour avoir $x_H = 1+t$, il faut avoir $t = 0$, et donc les ordonnées et altitudes ne correspondront pas : le point H n'est pas sur la droite (d), donc il n'est pas le projeté orthogonal de A sur (d).

Affirmation 5 : Vraie
Soit t un réel quelconque et M_t le point de paramètre t sur la droite (d).
La distance OM_t est donnée par :
$OM_t = \sqrt{(1+t)^2+(2t)^2+(-t)^2} = \sqrt{1+2t+t^2+4t^2+t^2} = \sqrt{6t^2+2t+1}$.
On a donc :
$$\begin{aligned} OM_t = 1 &\iff \sqrt{6t^2+2t+1} = 1\\ &\iff 6t^2+2t+1 = 1\\ &\iff 6t^2+2t = 0\\ &\iff 2t(3t+1) = 0\\ &\iff 2t = 0 \quad \text{ou} \quad 3t+1 = 0\\ &\iff t = 0 \quad \text{ou} \quad t = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$
L'équation a deux solutions, il y a donc exactement deux points de la droite (d) qui sont sur la sphère : les points de paramètre 0 et $-\dfrac{1}{3}$, l'affirmation est vraie.

Exercice 32.

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

$\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$ est un repère de l'espace.

On considère la droite D qui a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x &= 3-t \\ y &= -2+3t \\ z &= 1+4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et le plan P qui a pour équation cartésienne : $2x-3y+z-6=0$.

1. **Affirmation :** La droite D′, qui a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4-6t \\ z = 9-8t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, est parallèle à la droite D.
2. On admet que les points A$(-2\ ;\ 3\ ;\ 1)$, B$(1\ ;\ 3\ ;\ -4)$ et C$(6\ ;\ 3\ ;\ 9)$ ne sont pas alignés.
   Affirmation : La droite D est orthogonale au plan défini par les trois points A, B et C.
3. **Affirmation :** La droite D est sécante avec la droite Δ qui a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= -4+2t' \\ y &= 1-3t' \\ z &= 2+t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$
4. **Affirmation :** Le point F$(-3\ ;\ -3\ ;\ 3)$ est le projeté orthogonal du point E$(-5\ ;\ 0\ ;\ 2)$ sur le plan P.
5. **Affirmation :** Il existe exactement une valeur du paramètre réel a telle que le plan P' d'équation $-3x+y-a^2z+3=0$ soit parallèle à la droite D.

Note du rédacteur « pour certaines questions, il est indispensable que le repère soit orthonormé. »

Corrigé

1. **Affirmation : Vraie**
   Par simple lecture des systèmes de représentation paramétrique, on peut dire que D est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$ et D′ par $\vec{u'}\begin{pmatrix}2\\-6\\-8\end{pmatrix}$.
   On remarque que : $\vec{u'} = -2\vec{u}$ donc les vecteurs directeurs sont colinéaires, et donc les deux droites sont parallèles entre elles.
2. **Affirmation : Fausse**
   De façon générale, si A, B et C définissent un plan, alors D sera orthogonale au plan (ABC) si et seulement si son vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, classiquement $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   La **méthode classique** serait donc de déterminer les coordonnées de ces vecteurs, et d'en faire le produit scalaires avec $\vec{u}$.
   Cela donne : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-2)\\3-3\\-4-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$.

On a (avec les coordonnées de $\vec{u}$ déterminées à la question **1.**) le produit scalaire qui se calcule au moyen des coordonnées (on suppose que le repère est orthonormé).

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 3 \times (-1) + 0 \times 3 + (-5) \times 4 = -23 \neq 0$.

Comme ce produit scalaire n'est pas nul, pas besoin de calculer le second : on peut affirmer que D n'est pas orthogonale à (ABC), car elle n'est pas orthogonale à (AB) qui est une droite du plan (ABC).

Ici, on peut cependant adopter une **méthode différente** : on repère que les trois points A, B et C partagent la même ordonnée : 3, et sont réputés non alignés, donc le plan ABC est le plan d'équation $y = 3$, et un vecteur normal à (ABC) est le vecteur $\vec{j}$. Comme $\vec{j}$ est clairement non colinéaire à $\vec{u}$, alors on peut en déduire que D n'est pas orthogonale à (ABC).

3. Affirmation : Fausse

D est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$ et Δ est dirigée par $\overrightarrow{u''}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$, qui est clairement non colinéaire à $\vec{u}$: les droites ne sont donc pas parallèles. Elles peuvent être soit sécantes, soit non coplanaires.

Pour trancher, cherchons s'il existe un couple de paramètres $(t\,;\ t')$ tel que le point de paramètre t sur D serait confondu avec le point de paramètre t' sur Δ, autrement dit : s'il existe un point commun aux deux droites.

On résout le système :

$$\begin{cases} 3-t=-4+2t' \\ -2+3t=1-3t' \\ 1+4t=2+t' \end{cases} \iff \begin{cases} -t=-7+2t' \\ -3+3t+3t'=0 \\ -1+4t-t'=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=7-2t' \\ -3+3(7-2t')+3t'=0 \\ -1+4(7-2t')-t'=0 \end{cases} \iff \begin{cases} t=7-2t' \\ -3+21-6t'+3t'=0 \\ -1+28-8t'-t'=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=7-2t' \\ 3t'=18 \\ 9t'=27 \end{cases} \iff \begin{cases} t=7-2t' \\ t'=6 \\ t'=3 \end{cases}$$

Les équations du système sont incompatibles, donc le système n'a pas de solution, et les droites D et Δ n'ont aucun point commun : elle ne sont donc pas sécantes.

4. Affirmation : Vraie

Le point F$(-3;-3;3)$ appartient au plan P car ses coordonnées vérifient l'équation du plan, en effet :

$2x_F - 3y_F + z_F - 6 = 2 \times (-3) - 3 \times (-3) + 3 - 6 = -6 + 9 + 3 - 6 = 0$.

De plus, $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-3-(-5)\\-3-0\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$. Ce vecteur a les même coordonnées que le vecteur normal du plan que l'on peut obtenir par lecture de l'équation de P.

Ainsi, la droite (EF) est une droite orthogonale au plan P, telle que $F \in P$, donc F est bien le projeté orthogonal du point E$(-5;0;2)$ sur le plan P.

5. Affirmation : Fausse

Par lecture de l'équation de P', celui-ci admet comme vecteur normal le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\1\\-a^2\end{pmatrix}$.

La droite D est toujours dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$.

Le produit scalaire $\vec{n}\cdot\vec{u}$ vaut : $\vec{n}\cdot\vec{u} = -3\times(-1)+1\times 3+(-a^2)\times 4 = 6-4a^2$.

D est parallèle à P' si et seulement si le vecteur directeur de D est un vecteur directeur de P', c'est-à-dire si et seulement si le vecteur directeur de D est orthogonal à un vecteur normal à P'.

Autrement dit, D est parallèle à P' si et seulement si $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ donc si et seulement si $6-4a^2 = 0$ c'est à dire $a^2=\dfrac{6}{4}$ soit $a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ou $a=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

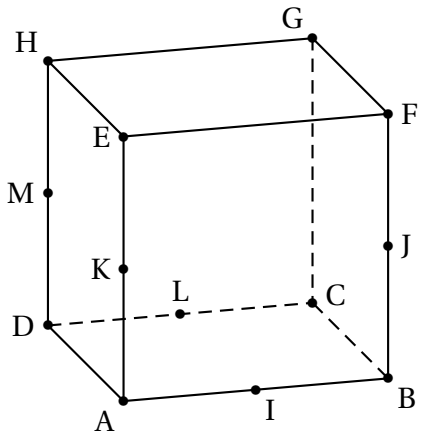
Il existe donc deux valeurs du paramètre réel a telle que le plan P' d'équation $-3x+y-a^2z+3=0$ soit parallèle à la droite D.

Exercice 33.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

PARTIE A

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.
Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [AE], [CD] et [DH].



Affirmation 1 : « $\overrightarrow{JH} = 2\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{CB}$ »
Affirmation 2 : « Le triplet de vecteurs $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AH},\ \overrightarrow{AG}\right)$ est une base de l'espace. »
Affirmation 3 : « $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{LM} = -\dfrac{1}{4}$. »

PARTIE B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x-y+3z+6=0$
- les points A(2 ; 0 ; −1) et B(5 ; −3 ; 7)

Affirmation 4 : « Le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont parallèles. »
Affirmation 5 : « Le plan $\mathscr{P}'$ parallèle à $\mathscr{P}$ passant par B a pour équation cartésienne $-2x+y-3z+34=0$ »
Affirmation 6 : « La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. »
On note (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= -12+2k \\ y &= 6 \\ z &= 3-5k \end{cases}, \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Affirmation 7 : « Les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires. »

Corrigé

PARTIE A

Affirmation 1 : Vraie

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JH} &= \overrightarrow{JF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EH}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}+2\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{DM}+2\overrightarrow{BI}+-\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

Affirmation 2 : Fausse

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}$
On peut exprimer $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$: les trois vecteurs sont coplanaires et donc le triplet de vecteurs $\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AH}\ ,\ \overrightarrow{AG}\right)$ n'est pas une base de l'espace.

Affirmation 3 : Vraie

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{LM} &= \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IK} \quad \text{car } \overrightarrow{LM}=\overrightarrow{IK}\\ &= \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IA} \quad \text{car A est le projeté orthogonal de K sur la droite (AB)}\\ &= -IB\times IA \quad \text{car les vecteurs sont colinéaires de sens contraire}\\ &= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} \quad \text{car l'arête est de longueur 1 et I est le milieu de l'arête [AB]}\\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

PARTIE B

Affirmation 4 : Fausse

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}$
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).
Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne $2x-y+3z+6=0$, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
On est dans un repère orthonormé donc :

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 3 \times 2 + (-3) \times (-1) + 8 \times 3 = 6 + 3 + 24 \neq 0$
Le vecteur normal au plan et le vecteur directeur de la droite ne sont pas orthogonaux donc le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) ne sont pas parallèles.

Affirmation 5 : Vraie

Méthode 1 :

Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles donc le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$.
Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}'$ est donc de la forme : $2x - y + 3z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
De plus, le point B appartient au plan $\mathscr{P}'$ donc $2x_B - y_B + 3z_B + d = 0$
D'où $2 \times 5 + 3 + 3 \times 7 + d = 0$ donc $10 + 3 + 21 + d = 0$ ce qui équivaut à $d = -34$.
Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}'$ est donc : $2x - y + 3z - 34 = 0$.
En multipliant par -1 on obtient l'équation donnée.

Méthode 2 :

Le plan $\mathscr{P}'$ a pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$, le vecteur $\vec{n'}\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$.
$\vec{n'} = -\vec{n}$ donc les vecteurs normaux aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont colinéaires et donc les deux plans sont parallèles.
Vérifions si le point B appartient au plan $\mathscr{P}'$.
$-2x_B + y_B - 3z_B + 34 = -2 \times 5 - 3 - 3 \times 7 + 34 = -10 - 3 - 21 + 34 = 0$
Donc le point B appartient au plan $\mathscr{P}'$.
Donc le plan $\mathscr{P}'$ parallèle à $\mathscr{P}$ passant par B a bien pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$.

Affirmation 6 : Vraie

La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à la distance AH avec H projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}$.
Déterminons les coordonnées du point H.
H est le projeté orthogonal du point A sur la plan $\mathscr{P}$, c'est donc l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite Δ orthogonale au plan $\mathscr{P}$ passant par le point A.
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, c'est donc un vecteur directeur de la droite Δ.
De plus le point A$(2\ ;\ 0\ ;\ -1)$ appartient à la droite Δ, une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\begin{cases} x &= 2 + 2t \\ y &= 0 - t \\ z &= -1 + 3t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

L'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ donne l'équation en la variable t :

$$\begin{aligned} 2(2+2t) - (-t) + 3(-1+3t) + 6 = 0 &\iff 4 + 4t + t - 3 + 9t + 6 = 0 \\ &\iff 14t = -7 \\ &\iff t = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Le point H d'intersection entre la droite Δ et $\mathscr{P}$ est le point de paramètre $t = -\frac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de la droite Δ.

Il a comme coordonnées : $\text{H}\left(2-2\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,-1-3\times\dfrac{1}{2}\right)$ soit $\text{H}\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{5}{2}\right)$.

On a donc :

$$\overrightarrow{\text{AH}}\begin{pmatrix}-1\\ \dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{3}{2}\end{pmatrix}$$

d'où : $\left\|\overrightarrow{\text{AH}}\right\|^2 = 1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 = 1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}=\dfrac{14}{4}$, donc $\left\|\overrightarrow{\text{AH}}\right\| = \sqrt{\dfrac{14}{4}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Affirmation 7 : Fausse

(d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix}$ et la droite (AB) par $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}$.

Les deux droites ont des vecteurs directeurs non colinéaires donc les droites ne sont ni parallèles, ni confondues.

La droite (AB) passe par le point A et est dirigée par $\overrightarrow{\text{AB}}$ donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x &= 2+3t\\ y &= 0-3t\\ z &= -1+8t\end{cases}, \text{ où } t\in\mathbb{R}$$

(d) et (AB) seront donc coplanaires si et seulement si ces deux droites sont sécantes, c'est-à-dire si et seulement si le système suivant a une solution :

$$\begin{cases} 2+3t=-12+2k\\ -3t=6\\ -1+8t=3-5k\end{cases} \iff \begin{cases} -4=-12+2k\\ t=-2\\ -17=3-5k\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k=4\\ t=-2\\ k=4\end{cases}$$

Le système admet une solution, donc les droites ont un point commun : le point de paramètre $t=-2$ de la droite (AB) ou le point de paramètre $k=4$ de (d) c'est à dire le point $\text{C}(-4\,;\,6\,;\,-17)$.

Les droites (AB) et (d) sont donc sécantes et par conséquent coplanaires.

Exercice 34.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= 3-2t \\ y &= -1 \\ z &= 2-6t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

On considère également les points suivants :

— A$(3\ ;\ -3\ ;\ -2)$

— B$(5\ ;\ -4\ ;\ -1)$

— C le point de la droite (d) d'abscisse 2

— H le projeté orthogonal du point B sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3z-7=0$

Affirmation 1
La droite (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

Affirmation 2
Le plan passant par A et orthogonal à la droite (d) a pour équation cartésienne :

$$x+3z+3=0$$

Affirmation 3
Une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{\text{BAC}}$ est $\dfrac{\pi}{6}$.

Affirmation 4
La distance BH est égale à $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Corrigé

Affirmation 1 : Vraie

(d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$ et l'axe des ordonnées par $\vec{\jmath}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.
Les deux droites ont des vecteurs directeurs non colinéaires (ils sont même orthogonaux) donc les droites ne sont ni parallèles, ni confondues.
L'axe des ordonnées passe par l'origine du repère, de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et est dirigé par $\vec{\jmath}$ donc une représentation paramétrique de l'axe des ordonnées est :

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0+s \\ z &= 0 \end{cases}, \text{ où } s \in \mathbb{R}$$

(d) et l'axe des ordonnées seront donc coplanaires si et seulement si ces deux droites sont sécantes, c'est-à-dire si et seulement si le système suivant a une solution :

$$\begin{cases} 3-2t &= 0 \\ -1 &= s \\ 2-6t &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t &= 3 \\ 6t &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} t &= 1{,}5 \\ s &= -1 \\ t &= \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Le système n'admet pas de solution, donc les droites n'ont pas de point commun.
Les droites ne sont ni parallèles, ni confondues, ni sécantes, par élimination, elles sont donc non coplanaires.

Affirmation 2 : Vraie

Soit $\mathscr{2}$ plan passant par A et orthogonal à la droite (d).

(d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathscr{2}$ et donc aussi $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ car $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et non nuls.
Le plan $\mathscr{2}$ admet donc une équation de la forme $x+0y+3z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.
De plus, le point A appartient au plan $\mathscr{2}$ donc $x_A+3z_A+d=0$ soit $3+3\times(-2)+d=0$.
On a donc $d=-3+6=3$.
Une équation cartésienne du plan passant par A et orthogonal à la droite (d) est donc : $x+3z+3=0$.

Affirmation 3 : Fausse

Afin de déterminer l'angle $\widehat{BAC}$ nous allons déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
Déterminons tout d'abord les coordonnées du point C :
C est un point de (d), il existe donc un réel t tel que : $\begin{cases} x_C = 3-2t \\ y_C = -1 \\ z_C = 2-6t \end{cases}$
Or C est le point d'abscisse 2, on a donc $x_C=2$ d'où $3-2t=2 \iff 1=2t$.

$$\iff t=\frac{1}{2}$$

On a donc $z_C = 2-6\times\dfrac{1}{2} = 2-3=-1$
Les coordonnées du point C sont donc $(2\,;\,-1\,;\,-1)$.
On peut donc calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ de même : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$
Nous sommes dans un repère orthonormé, nous avons donc :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-1)+(-1)\times 2+1\times 1=-3$
Calculons les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:
$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = 2^2+(-1)^2+1^2=6$, donc, comme une norme est positive $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{6}$.
$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = (-1)^2+2^2+1^2=6$, donc, de même : $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{6}$.
Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$
on en déduit donc que : $-3=\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$,
soit $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2}$
et donc une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\dfrac{2\pi}{3}$.

Affirmation 4 : Vraie

Déterminons les coordonnées du point H.

H est le projeté orthogonal du point B sur la plan $\mathscr{P}$, c'est donc l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite Δ orthogonal au plan $\mathscr{P}$ passant par le point B.

Le vecteur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, c'est donc un vecteur directeur de la droite Δ.

De plus le point B$(5\,;\,-4\,;\,-1)$ appartient à la droite Δ, une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\begin{cases} x &= 5+t \\ y &= -4+0t \\ z &= -1+3t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

L'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ donne l'équation en la variable t :

$$\begin{aligned}(5+t)+3(-1+3t)-7=0 &\iff 5+t-3+9t-7=0\\ &\iff 10t=5\\ &\iff t=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Le point H d'intersection entre la droite Δ et $\mathscr{P}$ est le point de paramètre $t=\dfrac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de la droite Δ.

Il a comme coordonnées : $\text{H}\left(5+\dfrac{1}{2}\,;\,-4\,;\,-1+3\times\dfrac{1}{2}\right)$ soit $\text{H}\left(\dfrac{11}{2}\,;\,-4\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

On a donc : $\overrightarrow{\text{BH}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

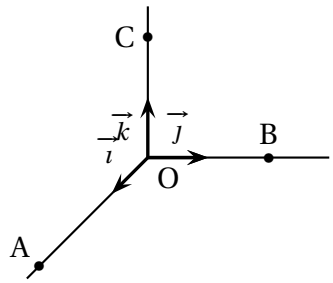
d'où : $\left\|\overrightarrow{\text{BH}}\right\|^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+0^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}=\dfrac{10}{4}$, donc $\left\|\overrightarrow{\text{BH}}\right\|=\sqrt{\dfrac{10}{4}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

La distance BH est égale à $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Exercice 35.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

On considère les trois points A$(3\,;\,0\,;\,0)$, B$(0\,;\,2\,;\,0)$ et C$(0\,;\,0\,;\,2)$.



L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :

« Le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre OABC »,

Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2\ ;\ 3\ ;\ 3)$ est normal au plan (ABC).
2. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x+3y+3z-6=0$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}$.
4. On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC).
   Déterminer les coordonnées du point H.
5. En déduire que la distance du point O au plan (ABC) est égale à $\dfrac{3\sqrt{22}}{11}$

Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. Démontrer que le volume du tétraèdre OABC est égal à 2.
2. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à $\sqrt{22}$.
3. Démontrer que pour le tétraèdre OABC, « le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre ».
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V=\dfrac{1}{3}B\times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.

Corrigé

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$.
On considère les trois points A(3 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 2).

Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

1. Soit le vecteur $\vec{n}(2\ ;\ 3\ ;\ 3)$.

   - Le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $(-3\,;2\,;0)$.
     $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\vec{n}=-3\times2+2\times3+0\times3=0$ donc $\overrightarrow{\text{AB}}\perp\vec{n}$
   - Le vecteur $\overrightarrow{\text{AC}}$ a pour coordonnées $(-3\,;0\,;2)$.
     $\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\vec{n}=-3\times2+0\times3+2\times3=0$ donc $\overrightarrow{\text{AC}}\perp\vec{n}$

   Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ non colinéaires, donc il est normal au plan (ABC).
2. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ tels que $\overrightarrow{\text{AM}}\perp\vec{n}$.
   Le vecteur $\overrightarrow{\text{AM}}$ a pour coordonnées $(x-3\,;y\,;z)$.
   $\overrightarrow{\text{AM}}\perp\vec{n}\iff\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\vec{n}=0\iff2(x-3)+3y+3z=0\iff2x+3y+3z-6=0$
   Le plan (ABC) a donc pour équation cartésienne :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in\text{ABC}\iff2x+3y+3z-6=0.$$

3. La droite d passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ tels que $\overrightarrow{\text{OM}}$ et $\vec{n}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{\text{OM}} = t.\vec{n}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{OM}}$ a pour coordonnées $(x\,;y\,;z)$. Or $\overrightarrow{\text{OM}} = t.\vec{n} \iff \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases}$

La droite d passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}$ a donc pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

4. On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC).

Les coordonnées de H vérifient le système $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 3t \\ 2x+3y+3z-6 = 0 \end{cases}$

On a donc : $2(2t)+3(3t)+3(3t)-6=0$, donc $22t=6$ donc $t=\dfrac{3}{11}$.

Les coordonnées de H sont donc : $\left(\dfrac{6}{11}\,;\dfrac{9}{11}\,;\dfrac{9}{11}\right)$.

5. La distance du point O au plan (ABC) est OH.

$\text{OH}^2 = \left(\dfrac{6}{11}\right)^2 + \left(\dfrac{9}{11}\right)^2 + \left(\dfrac{9}{11}\right)^2 = \dfrac{36+81+81}{11^2} = \dfrac{198}{11^2}$ donc $\text{OH} = \dfrac{\sqrt{198}}{11} = \dfrac{3\sqrt{22}}{11}$.

Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. En prenant pour base le triangle OAB et pour hauteur OC, le volume du tétraèdre OABC vaut $\dfrac{\text{OC} \times \text{aire(OAB)}}{3}$.

$\text{OC} = 2$ et $\text{aire(OAB)} = \dfrac{\text{OA} \times \text{OB}}{2} = \dfrac{3 \times 2}{3} = 3$

Le volume du tétraèdre OABC est donc égal à $\dfrac{2 \times 3}{3} = 2$.

2. En prenant pour base le triangle ABC et pour hauteur OH, le volume du tétraèdre OABC vaut $\dfrac{\text{OH} \times \text{aire(ABC)}}{3}$.

Ce volume vaut 2 et $\text{OH} = \dfrac{3\sqrt{22}}{11}$, donc $2 = \dfrac{\frac{3\sqrt{22}}{11} \times \text{aire(ABC)}}{3}$.

On en déduit que : $\text{aire(ABC)} = \dfrac{6}{\text{OH}} = \dfrac{6}{\frac{3\sqrt{22}}{11}} = \dfrac{6 \times 11}{3\sqrt{22}} = \dfrac{22}{\sqrt{22}} = \sqrt{22}$.

3. Soit la propriété : pour le tétraèdre OABC, « le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre ».

- $\text{aire(OAB)} = 3$ donc $(\text{aire(OAB)})^2 = 9$
- $\text{aire(OAC)} = \dfrac{\text{OA} \times \text{OC}}{2} = \dfrac{3 \times 2}{2} = 3$ donc $(\text{aire(OAC)})^2 = 9$
- $\text{aire(OBC)} = \dfrac{\text{OB} \times \text{OC}}{2} = \dfrac{2 \times 2}{2} = 2$ donc $(\text{aire(OBC)})^2 = 4$

Donc $(\text{aire(OAB)})^2 + (\text{aire(OAC)})^2 + (\text{aire(OBC)})^2 = 9+9+4 = 22$.
Comme $\text{aire(OABC)} = \sqrt{22}$, on a :
$(\text{aire(OABC)})^2 = 22 = (\text{aire(OAB)})^2 + (\text{aire(OAC)})^2 + (\text{aire(OBC)})^2$.
La propriété est vérifiée.

Exercice 36.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.
Par définition, la distance entre deux droites non coplanaires de l'espace, (d_1) et (d_2) est la longueur du segment [EF], où E et F sont des points appartenant respectivement à (d_1) et à (d_2) tels que la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et (d_2).
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Soit (d_1) la droite passant par A$(1 ; 2 ; -1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 1+t \\ z &= 2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (d_1)
2. Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $-2x+y+5z+5=0$.
4. **a.** Sans chercher à calculer les coordonnées du point d'intersection, justifier que la droite (d_2) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.
   b. On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathscr{P}$.

   Vérifier que le point F a pour coordonnées $\left(0 ; -\frac{5}{3} ; -\frac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\frac{2}{3} ; -\frac{4}{3} ; -1\right)$.

5. **a.** Justifier que la distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2).
   b. Calculer la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

Corrigé

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.

Soit (d_1) la droite passant par A$(1 ; 2 ; -1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 1+t \\ z &= 2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

1. On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d_1) \iff$ il existe $t' \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{AM} = t'\overrightarrow{u_1} \iff$

$$\begin{cases} x-1 &= 1t' \\ y-2 &= 2t' \quad t \in \mathbb{R} \\ z-(-1) &= 0t' \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 1+t' \\ y &= 2+2t' \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &= -1 \end{cases}$$

2. On démontre que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

- (d_2) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{u_1}$: les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.
- (d_1) et (d_2) sont sécantes s'il existe t et t' deux réels tels que :

$$\begin{cases} 0 &= 1+t' \\ 1+t &= 2+2t' \\ 2+t &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 &= t' \\ t &= 1+2t' \\ t &= -3 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 &= t' \\ t &= -1 \\ t &= -3 \end{cases}$$: ce système n'a pas de solution.

Conclusion : les deux droites ne sont ni parallèles ni sécantes, elles sont donc non coplanaires.

3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

On va justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $-2x+y+5z+5=0$.

Si un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient au plan défini par le point A et les deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}$, on sait que il existe α et β tels que : $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{w}$,

soit avec les coordonnées : $\begin{cases} x-1 &= 1\alpha+2\beta \\ y-2 &= 2\alpha-1\beta \\ z+1 &= 0\alpha+1\beta \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \alpha+2\beta+1 \\ y &= 2\alpha-\beta+2 \\ z &= \beta-1 \end{cases}$

Or quels que soient α et β :

$-2(\alpha+2\beta+1)+1(2\alpha-\beta+2)+5(\beta-1)+5 = -2\alpha-4\beta-2+2\alpha-\beta+2+5\beta-5+5=0$.

Donc une équation cartésienne du plan est $-2x+1y+5z+5=0$.

4. **a.** On a vu que (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires donc (d_2) ne peut appartenir au plan précédent et (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles donc la droite (d_2) est sécante au plan $\mathscr{P}$.

Autre méthode : d'après ses équations paramétriques un vecteur directeur de la droite (d_2)est le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et d'après l'équation de $\mathscr{P}$ un de ses vecteurs normaux est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5)\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{n} = 0+1+5 = 6 \neq 0$ ceci montre que (d_2) n'est pas parallèle au plan $\mathscr{P}$: (d_2) et $\mathscr{P}$ sont donc sécants.

b. On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathscr{P}$.

Si F est commun à (d_2) et au plan $\mathscr{P}$ ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 1+t \\ z &= 2+t \\ -2x+y+5z+5 &= 0 \end{cases}$$, d'où en remplaçant dans la dernière équation :

$-2\times 0+1+t+5(2+t)+5=0 \iff 1+t+10+5t+5=0 \iff 6t+16=0 \iff t=-\dfrac{8}{3}$,

d'où en remplaçant dans x, y, et z, on obtient $\text{F}\left(0\,;\,-\dfrac{5}{3}\,;\,-\dfrac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\dfrac{2}{3}\,;\,-\dfrac{4}{3}\,;\,-1\right)$.

5. **a.** Des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ on déduit que :

$\overrightarrow{\text{EF}}\cdot\overrightarrow{u_1}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}+0=0$ et $\overrightarrow{\text{EF}}\cdot\overrightarrow{u_2}=0-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}=0$.

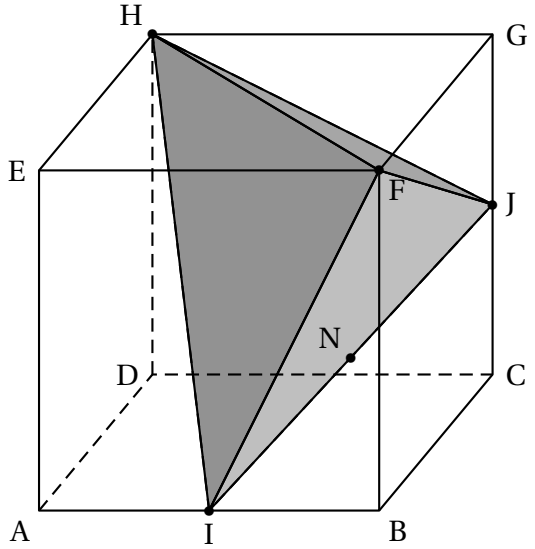
Conclusion : $\overrightarrow{\text{EF}}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs des deux droites (d_1) et (d_2), $\text{E}\in(d_1)$ et $\text{F}\in(d_2)$ donc EF est bien la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

b. On a $\text{EF}^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{6}{9}$.

Conclusion : $\text{EF}=\sqrt{\dfrac{6}{9}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Exercice 37.

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CG].
Le point N est le milieu du segment [IJ].
L'objectif de cet exercice est de calculer le volume du tétraèdre HFIJ.
On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.



1. **a.** Donner les coordonnées des points I et J.
En déduire les coordonnées de N.

b. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{NF}$ ont pour coordonnées respectives :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0,5\\1\\0,5\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{NF}\begin{pmatrix}0,25\\-0,5\\0,75\end{pmatrix}$$

c. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{NF}$ sont orthogonaux.

On admet que $NF = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

d. En déduire que l'aire du triangle FIJ est égale à $\dfrac{\sqrt{21}}{8}$.

2. On considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

a. Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (FIJ).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est : $4x - y - 2z - 2 = 0$.

c. On note d la droite orthogonale au plan (FIJ) passant par le point H. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

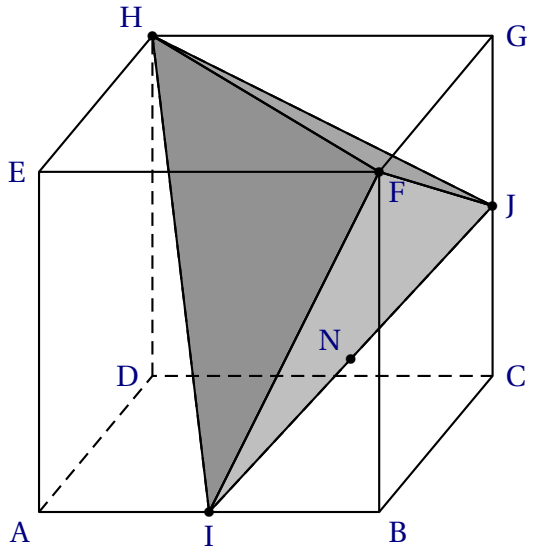
d. Montrer que la distance du point H au plan (FIJ) est égale à $\dfrac{5\sqrt{21}}{21}$.

e. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.

Calculer le volume du tétraèdre HFIJ. On donnera la réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

Corrigé

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CG].
Le point N est le milieu du segment [IJ].
L'objectif de cet exercice est de calculer le volume du tétraèdre HFIJ.
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.



1. **a.** A(0 ; 0 ; 0) et B(1 ; 0 ; 0) donc I(0,5 ; 0 ; 0) ;
C(1 ; 1 ; 0) et G(1 ; 1 ; 1) donc J(1 ; 1 ; 0,5).
Donc N(0,75 ; 0,5 ; 0,25).

b. $\overrightarrow{\text{IJ}}\begin{pmatrix}1-0,5\\1-0\\0,5-0\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\text{IJ}}\begin{pmatrix}0,5\\1\\0,5\end{pmatrix}$.

De même avec F(1 ; 0 ; 1), $\overrightarrow{\text{NF}}\begin{pmatrix}1-0,5\\0-0,5\\1-0,25\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\text{NF}}\begin{pmatrix}0,25\\0-0,5\\0,75\end{pmatrix}$.

c. On calcule le produit scalaire des deux vecteurs précédents :
$\overrightarrow{\text{IJ}}\cdot\overrightarrow{\text{NF}} = 0,125-0,5+0,375 = 0$: le produit scalaire est nul, les deux vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et $\overrightarrow{\text{NF}}$ sont orthogonaux.

On admet que $\text{NF} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

d. On a $\text{IJ}^2 = 0,5^2+1^2+0,5^2 = 1,5 = \dfrac{3}{2} = \dfrac{6}{4}$, d'où $\text{IJ} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

On a démontré que la droite (NF) est perpendiculaire à la droite (IJ) : la droite (FN) est donc la hauteur issue de N dans le triangle FIJ.

L'aire de ce triangle est donc égale à $\dfrac{\text{IJ}\times\text{FN}}{2} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{14}}{4}}{2} = \dfrac{\sqrt{21}}{8}$.

2. On considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

a. On a $\vec{u}\cdot\overrightarrow{\text{IJ}} = 2-1-1 = 0$. D'autre part $\vec{u}\cdot\overrightarrow{\text{NF}} = 1+0,5-1,5 = 0$, donc le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan FIJ (car la droite (NF) est perpendiculaire à la droite (IJ)) : il est donc normal à ce plan.

b. On sait que les coordonnées du vecteur normal au plan sont les coefficients respectifs de x, y et z dans l'équation de celui-ci :
$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{FIJ}) \iff 4x-y-2z+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$.
Ainsi par exemple : $\text{F}(1\,;\,0\,;\,1)\in(\text{FIJ}) \iff 4-0-2+d=0 \iff d=-2$.
Conclusion : $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{FIJ}) \iff 4x-y-2z-2=0$

c. La droite d a donc pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$ et contient le point H. Ses équations paramétriques s'obtiennent en traduisant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{\text{H}M}$ et $\vec{u}$: avec H(0 ;1 ; 1),
$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(d) \iff \overrightarrow{\text{H}M} = t\,\vec{u}$, avec $t\in\mathbb{R}$, soit :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(d) \iff \begin{cases} x-0 &= 4t\\ y-1 &= -t\\ z-1 &= -2t\end{cases} \iff \begin{cases} x &= 4t\\ y &= 1-t\\ z &= 1-2t\end{cases}$$

d. La droite d est perpendiculaire au plan (FIJ) en un point K dont les coordonnées vérifient les équations de d et celle de (FIJ) soit le système :

$$\begin{cases} x &= 4t\\ y &= 1-t\\ z &= 1-2t\\ 4x-y-2z-2 &= 0\end{cases}$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$4\times 4t-(1-t)-2(1-2t)-2=0 \iff 16t-1+t-2+4t-2=0 \iff 21t-5=0 \iff t=\dfrac{5}{21}$.

Les coordonnées de K sont donc : $\begin{cases} x &= 4\times\frac{5}{21} \\ y &= 1-\frac{5}{21} \\ z &= 1-2\times\frac{5}{21} \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \frac{20}{21} \\ y &= \frac{16}{21} \\ z &= \frac{11}{21} \end{cases}$

La distance de H au plan (FIJ) est donc égale à HK et avec $\overrightarrow{\text{HK}}\begin{pmatrix}\frac{20}{21}\\-\frac{5}{21}\\-\frac{10}{21}\end{pmatrix}$,

$\text{HK}^2=\left(\frac{20}{21}\right)^2+\left(-\frac{5}{21}\right)^2+\left(-\frac{10}{21}\right)^2=\frac{400+25+100}{21^2}=\frac{525}{21^2}=\frac{25\times 21}{21^2}$, donc

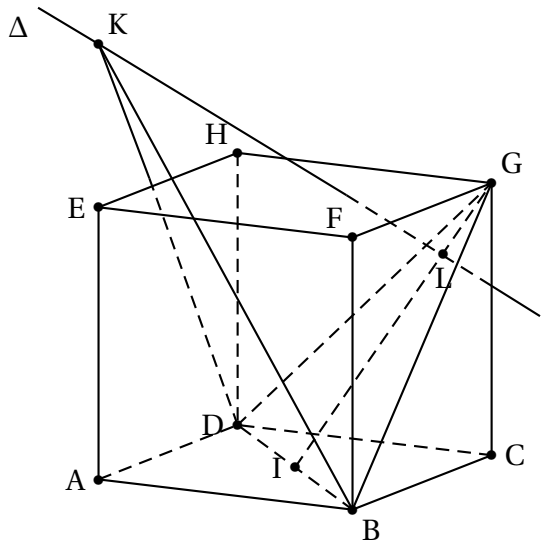
$\text{HK}=\dfrac{5\sqrt{21}}{21}$.

e. D'après la question précédente [HK] est la hauteur relative à la base (FIJ) du tétraèdre HFIJ, donc le volume de celui-ci est :

$V=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{FIJ})\times\text{HK}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{21}}{8}\times\dfrac{5\sqrt{21}}{21}=\dfrac{5\times 3\times 7}{3\times 8\times 21}=\dfrac{5}{24}$.

Exercice 38.

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que $\overrightarrow{\text{IL}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{IG}}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\overrightarrow{\text{AD}},\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. **a.** Préciser les coordonnées des points D, B, I et G. Aucune justification n'est attendue.

b. Montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{8}\,;\,\dfrac{7}{8}\,;\,\dfrac{3}{4}\right)$.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est $x+y-z-1=0$.

3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x &= \dfrac{7}{8}+t \\ y &= \dfrac{7}{8}+t \\ z &= \dfrac{3}{4}-t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

b. Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{13}{8}\right)$.

c. Que représente le point L pour le point K? Justifier la réponse.

4. **a.** Calculer la distance KL.

b. On admet que le triangle DBG est équilatéral. Montrer que son aire est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c. En déduire le volume du tétraèdre KDBG.

On rappelle que :

- le volume d'une pyramide est donné par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative a cette base ;
- un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ a)$.

a. Exprimer le volume $\mathcal{V}_a$ de la pyramide ABCDK_a en fonction de a.

b. On note Δ_a la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= t' \\ y &= t' \\ z &= -t'+a \end{cases} \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

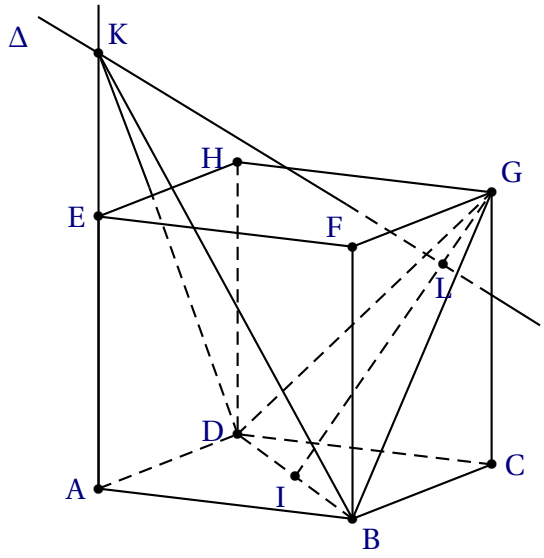
On appelle I_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG).

Montrer que les coordonnées du point I_a sont $\left(\dfrac{a+1}{3}\ ;\ \dfrac{a+1}{3}\ ;\ \dfrac{2a-1}{3}\right)$.

c. Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre GDBK$_a$ et la pyramide ABCDK_a sont de même volume.

Corrigé

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que $\overrightarrow{\text{IL}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{IG}}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. **a.** D (0 ; 1 ; 0), B (1 ; 0 ; 0), I $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ et G (1 ; 1 ; 1)

b. • $\overrightarrow{\text{IL}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_\text{L} - x_\text{I} \\ y_\text{L} - y_\text{I} \\ z_\text{L} - z_\text{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\text{L} - \frac{1}{2} \\ y_\text{L} - \frac{1}{2} \\ z_\text{L} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\text{L} - \frac{1}{2} \\ y_\text{L} - \frac{1}{2} \\ z_\text{L} \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{\text{IG}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_\text{G} - x_\text{I} \\ y_\text{G} - y_\text{I} \\ z_\text{G} - z_\text{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\text{IL}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{IG}} \iff \begin{cases} x_\text{L} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \\ y_\text{L} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \\ z_\text{L} = \frac{3}{4} \times 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_\text{L} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \\ y_\text{L} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \\ z_\text{L} = \frac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x_\text{L} = \frac{7}{8} \\ y_\text{L} = \frac{7}{8} \\ z_\text{L} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

2. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$.

- $x_\text{B} + y_\text{B} - z_\text{B} - 1 = 1 + 0 - 0 - 1 = 0$ donc B $\in \mathscr{P}$.
- $x_\text{D} + y_\text{D} - z_\text{D} - 1 = 0 + 1 - 0 - 1 = 0$ donc D $\in \mathscr{P}$.
- $x_\text{G} + y_\text{G} - z_\text{G} - 1 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$ donc G $\in \mathscr{P}$.

Donc le plan (BDG) a pour équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$.

3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

a. (BDG) a pour équation $x + y - z - 1 = 0$, donc il a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite Δ est perpendiculaire au plan (BDG) donc elle a le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur directeur. Donc la droite Δ est l'ensemble des points M (x ; y ; z) tels que $\overrightarrow{\text{LM}} = t\,\vec{n}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{\text{LM}} = t\,\vec{n} \iff \begin{cases} x - \frac{7}{8} = t \times 1 \\ y - \frac{7}{8} = t \times 1 \\ z - \frac{3}{4} = t \times (-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{7}{8} + t \\ y = \frac{7}{8} + t \\ z = \frac{3}{4} - t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

b. Soit K le point de coordonnées $\left(0\,;\,0\,;\,\dfrac{13}{8}\right)$.

- On regarde si les coordonnées de K vérifient la représentation paramétrique de Δ, autrement dit on cherche s'il existe un réel t tel que ; $\begin{cases} 0 = \frac{7}{8} + t \\ 0 = \frac{7}{8} + t \\ \frac{13}{8} = \frac{3}{4} - t \end{cases}$

  Le réel $t = -\dfrac{7}{8}$ convient donc $\text{K} \in \Delta$.
- $\overrightarrow{\text{AE}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AK}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{13}{8} \end{pmatrix}$.

  Donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{AE}}$ et $\overrightarrow{\text{AK}}$ sont colinéaires donc $\text{K} \in (\text{AE})$.

Les deux droites Δ et (AE) sont donc sécantes en K.

c.
- $\overrightarrow{\text{IL}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{IG}}$ donc $\text{L} \in (\text{IG})$ donc $\text{L} \in (\text{BDG})$.
- La droite Δ est perpendiculaire au plan (BDG) en L.
- $\text{K} \in \Delta$

Donc le point L est le projeté orthogonal du point K sur le plan (BDG).

4. **a.** K a pour coordonnées $\left(0\,;\,0\,;\,\dfrac{13}{8}\right)$ et L a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{8}\,;\,\dfrac{7}{8}\,;\,\dfrac{3}{4}\right)$. Donc

$$\text{KL}^2 = \left(\frac{7}{8} - 0\right)^2 + \left(\frac{7}{8} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{13}{8}\right)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left(-\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64} + \frac{49}{64} + \frac{49}{64} = \frac{147}{64}$$

donc $\text{KL} = \dfrac{\sqrt{147}}{8} = \dfrac{7\sqrt{3}}{8}$

b. On admet que le triangle DBG est équilatéral, donc chaque angle mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

Le point I est le milieu de [BD] donc I est aussi le pied de la hauteur issue de G dans le triangle DBG.

Dans le triangle GIB rectangle en I, on a : $\sin\left(\widehat{\text{IBG}}\right) = \dfrac{\text{IG}}{\text{BG}}$.

BG est la diagonale du carré BCGF de côté 1, donc $\text{BG} = \sqrt{2}$. De même $\text{BD} = \sqrt{2}$.

On a donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\text{IG}}{\text{BG}}$, donc $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\text{IG}}{\sqrt{2}}$ et donc $\text{IG} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

L'aire du triangle BDG vaut : $\dfrac{\text{BD} \times \text{IG}}{2} = \dfrac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \dfrac{\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c. Le tétraèdre KDBG a pour base le triangle BDG et pour hauteur KL, donc son volume vaut : $\dfrac{1}{3} \times \text{aire(BDG)} \times \text{KL} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{7\sqrt{3}}{8} = \dfrac{7}{16}$

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,a)$.

a. On exprime le volume $\mathcal{V}_a$ de la pyramide ABCDK_a en fonction de a.

- La base de la pyramide est le carré ABCD d'aire 1.
- Le point K_a a pour coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ a)$ donc il appartient à la droite (AE) et donc AK_a est la hauteur de la pyramide $ABCDK_a$.
- De façon évidente, $AK_a = a$.

Donc $\mathcal{V}_a = \dfrac{1}{3} \times a \times 1 = \dfrac{a}{3}$.

b. On note Δ_a la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = -t' + a \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$.

On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG).

Les coordonnées de L_a vérifient le système $\begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = -t' + a \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$

On a donc $t' + t' - (-t' + a) - 1 = 0$ soit $3t' = a + 1$ donc $t' = \dfrac{a+1}{3}$.

$x = t' = \dfrac{a+1}{3}$; $y = t' = \dfrac{a+1}{3}$ et $z = -t' + a = -\dfrac{a+1}{3} + a = \dfrac{-a-1+3a}{3} = \dfrac{2a-1}{3}$

Donc les coordonnées du point L_a sont $\left(\dfrac{a+1}{3}\ ;\ \dfrac{a+1}{3}\ ;\ \dfrac{2a-1}{3}\right)$.

c. On cherche le volume du tétraèdre $GDBK_a$.

- $K_aL_a{}^2 = \left(\dfrac{a+1}{3} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{a+1}{3} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{2a-1}{3} - a\right)^2$

  $= \left(\dfrac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{-a-1}{3}\right)^2 = 3 \times \dfrac{(a+1)^2}{9} = \dfrac{(a+1)^2}{3}$

  Donc $K_aL_a = \dfrac{a+1}{\sqrt{3}}$.
- Le volume du tétraèdre $GDBK_a$ est :

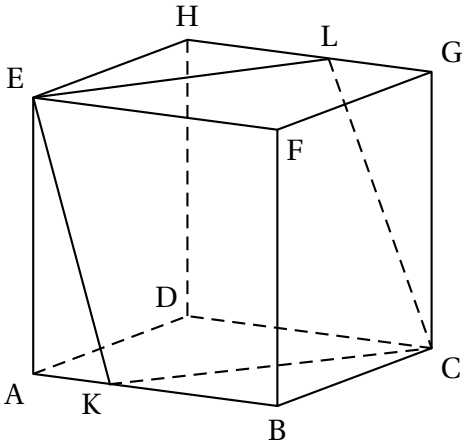
  $\dfrac{1}{3} \times K_aL_a \times \text{aire(GBD)} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{a+1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a+1}{6}$

Le tétraèdre $GDBK_a$ et la pyramide $ABCDK_a$ sont de même volume si et seulement si $\dfrac{a+1}{6} = \dfrac{a}{3}$, soit $\dfrac{a+1}{6} = \dfrac{2a}{6}$, soit $a + 1 = 2a$, et donc si $a = 1$.

Exercice 39.

On considère un cube ABCDEFGH et l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.
Pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, on considère les points K et L de coordonnées :

$$K(m\,;\,0\,;\,0) \quad \text{et} \quad L(1-m\,;\,1\,;\,1).$$



1. Donner les coordonnées des points E et C dans ce repère.

2. Dans cette question, $m = 0$. Ainsi, le point L$(1\,;\,1\,;\,1)$ est confondu avec le point G, le point K$(0\,;\,0\,;\,0)$ est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA).

a. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est normal au plan (GEA).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (GEA).

On s'intéresse désormais à la nature de CKEL en fonction du paramètre m.

3. Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle $[0\,;\,1]$.

a. Démontrer que CKEL est un parallélogramme.

b. Justifier que $\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KE} = m(m-1)$.

c. Démontrer que CKEL est un rectangle si, et seulement si, $m = 0$ ou $m = 1$.

4. Dans cette question, $m = \dfrac{1}{2}$.Ainsi, L a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,1\,;\,1\right)$ et K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$.

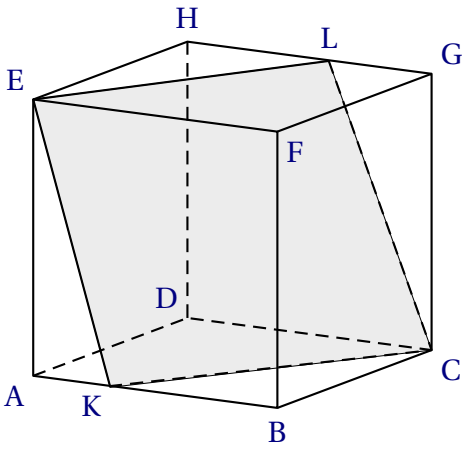
a. Démontrer que le parallélogramme CKEL est alors un losange.

b. À l'aide de la question **3. b.**, déterminer une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{CKE}$.

Corrigé

On considère un cube ABCDEFGH et l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.
Pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, on considère les points K et L de coordonnées :

$$K(m\,;\,0\,;\,0) \quad \text{et} \quad L(1-m\,;\,1\,;\,1).$$



1. Le point E a pour coordonnées $(0\,;0\,;1)$.

Comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, le point C a pour coordonnées $(1\,;1\,;0)$.

2. Dans cette question, $m = 0$. Ainsi, le point L $(1\,;1\,;1)$ est confondu avec le point G, le point K$(0\,;0\,;0)$ est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA).

a.
- ABCD est un carré donc ses diagonales sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{AC}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est normal au plan (ABD) donc $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal à tout vecteur du plan (ABD), donc $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{DB}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (GEA) donc le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est normal au plan (GEA).

b. On déduit de la question précédente que le plan (GEA) a une équation de la forme $1 \times x + (-1) \times y + 0 \times z + d = 0$, soit $x - y + d = 0$.

Le plan (GEA) passe par le point A de coordonnées $(0\,;0\,;0)$ donc $0 - 0 + d = 0$ et donc $d = 0$.

Le plan (GEA) a donc pour équation $x - y = 0$.

On s'intéresse désormais à la nature de CKEL en fonction du paramètre m.

3. Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle $[0\,;1]$.

a.
- K $\begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et E $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0-m \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- C $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et L $\begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CL}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-m-1 \\ 1-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{CL}$ donc CKEL est un parallélogramme.

b. K $\begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-m \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = x_{\overrightarrow{KC}} \times x_{\overrightarrow{KE}} + y_{\overrightarrow{KC}} \times y_{\overrightarrow{KE}} + z_{\overrightarrow{KC}} \times z_{\overrightarrow{KE}} = (1-m) \times (-m) + 1 \times 0 + 0 \times (-1) = m(m-1)$

c. CKEL est un rectangle si, et seulement si, CKEL possède un angle droit
si, et seulement si, $\overrightarrow{KC} \perp \overrightarrow{KE}$
si, et seulement si, $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = 0$
si, et seulement si, $m(m-1) = 0$
si, et seulement si, $m = 0$ ou $m = 1$

4. Dans cette question, $m = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, L a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,1\,;\,1\right)$ et K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$.

a.
- K $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et L $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KL}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- E $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ donc $\overrightarrow{KL} \perp \overrightarrow{EC}$

Le parallélogramme CKEL a ses diagonales perpendiculaires donc c'est un losange.

b.
- $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = m(m-1)$; or $m = \dfrac{1}{2}$ donc $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - 1\right) = -\dfrac{1}{4}$
- $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = KC \times KE \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)$
- $\overrightarrow{KC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Donc $KC^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 0^2 = \dfrac{5}{4}$ donc $KC = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
- $\overrightarrow{KE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Donc $KE^2 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2 = \dfrac{5}{4}$ donc $KE = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

On a donc : $-\dfrac{1}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \times \dfrac{\sqrt{5}}{2} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)$

Donc $-\dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)$ et donc $\cos\left(\widehat{CKE}\right) = -\dfrac{1}{5}$

On en déduit avec la calculatrice que $\widehat{CKE} \approx 101{,}5°$, soit $\widehat{CKE} \approx 102°$.

Exercice 40.

Une commune décide de remplacer le traditionnel feu d'artifice du 14 juillet par un spectacle de drones lumineux.

Pour le pilotage des drones, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ dont l'unité est la centaine de mètres.

La position de chaque drone est modélisée par un point et chaque drone est envoyé d'un point de départ D de coordonnées (2 ; 5 ; 1).

On souhaite former avec des drones des figures en les positionnant dans un même plan $\mathscr{P}$.

Trois drones sont positionnés aux points A(−1 ; −1 ; 17), B(4 ; −2 ; 4) et C(1 ; −3 ; 7).

1. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Dans la suite, on note $\mathscr{P}$ le plan (ABC) et on considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. **a.** Justifier que $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $2x - 3y + z - 18 = 0$.

3. Le pilote des drones décide d'envoyer un quatrième drone en prenant comme trajectoire la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par

$$d : \begin{cases} x &= 3t + 2 \\ y &= t + 5 \\ z &= 4t + 1 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

a. Déterminer un vecteur directeur de la droite d.

b. Afin que ce nouveau drone soit également placé dans le plan $\mathscr{P}$, déterminer par le calcul les coordonnées du point E, intersection de la droite d avec le plan $\mathscr{P}$.

4. Le pilote des drones décide d'envoyer un cinquième drone le long de la droite Δ qui passe par le point D et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Ce cinquième drone est placé lui aussi dans le plan $\mathscr{P}$, soit à l'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathscr{P}$. On admet que le point F$(6\,;\,-1\,;\,3)$ correspond à cet emplacement.

Démontrer que la distance entre le point de départ D et le plan $\mathscr{P}$ vaut $2\sqrt{14}$ centaines de mètres.

5. L'organisatrice du spectacle demande au pilote d'envoyer un nouveau drone dans le plan (peu importe sa position dans le plan), toujours à partir du point D.

Sachant qu'il reste 40 secondes avant le début du spectacle et que le drone vole en trajectoire rectiligne à 18,6 m.s^{-1}, le nouveau drone peut-il arriver à temps ?

Corrigé

1. On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}5\\-1\\-13\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}2\\-2\\-10\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C sont distincts et non alignés : ils définissent le plan $\mathscr{P}$ = (ABC).

Dans la suite, on considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

2. **a.** On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 10+3-13 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 4+6-10 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est normal à ce plan

b. On sait qu'alors :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 2x-3y+1z+d = 0,\ d \in \mathbb{R}$.

Par exemple A$(-1\,;\,-1\,;\,17) \in (\text{ABC}) \iff -2+3+17+d = 0 \iff d = -18$, donc

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 2x-3y+z-18 = 0$.

3.

$$d : \begin{cases} x &= 3t+2 \\ y &= t+5 \\ z &= 4t+1 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

a. On sait que les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{d}$ de d sont les coefficients de t, soit $\vec{d}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$

b. Les coordonnées de E commun à d et au plan (ABC) vérifient les équations paramétriques de d et l'équation cartésienne de (ABC) soit le système

$$\begin{cases} x &= 3t+2 \\ y &= t+5 \\ z &= 4t+1 \\ 2x-3y+1z-18 &= 0 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$2(3t+2)-3(t+5)+4t+1-18=0 \iff 6t+4-3y-15+4t+1-18=0 \iff$

$7t-28=0 \iff 7t=28 \iff t=4.$

D'où les coordonnées de E en remplaçant t par dans les équations de d : E(14 ; 9 ; 17)

4. La droite Δ contient D et a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan (ABC) soit le vecteur $\vec{n}$.

Une équation de Δ est donc $\begin{cases} x & = & 2t+2 \\ y & = & -3t+5 \\ z & = & t+1 \\ 2x-3y+1z-18 & = & 0 \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

En résolvant le système obtenu en rajoutant l'équation de $\mathscr{P}$ permet d'obtenir $t=2$, d'où F(6 ; −1 ; 3).

Puisque la droite (DF) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$, la distance DF est la (plus courte) distance du point au plan $\mathscr{P}$.

Or $\overrightarrow{\text{DF}}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, d'où $\left\|\overrightarrow{\text{DF}}\right\|^2 = \text{DF}^2 = 4^2+(-6)^2+2^2 = 16+36+4 = 56 = 4\times 14.$

On a donc $\text{DF} = \sqrt{4\times 14} = \sqrt{4}\times\sqrt{14} = 2\sqrt{14}$ (en centaines de metres).

5. La plus petite distance du point de lancer au plan (ABC) est égale à $2\sqrt{14}$ centaines de mètres : il faut donc calculer le temps mis à la vitesse de 18,6 m.s^{-1} par un drone pour effectuer ce parcours de D à F.

On sait que $v = \dfrac{d}{t}$, ou $t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{\text{DF}}{v} = \dfrac{2\sqrt{14}\times 100}{18,6} \approx 40,23$ (secondes).

Conclusion : le drone n'arrivera pas à temps.

Exercice 41.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$\text{A}(0 ; 4 ; -1), \quad \text{B}(6 ; 1 ; 5) \quad \text{et} \quad \text{C}(6 ; -2 ; -1).$$

On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 1 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x &= 2+2t \\ y &= 3-t \\ z &= 1+2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 3 : Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et orthogonal à la droite(AB) est

$$2x+2y-z-9=0.$$

On considère les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ dont on donne ci-dessous une représentation paramétrique :

$$\mathscr{D} \quad \begin{cases} x &= 3+t \\ y &= 1+t \\ z &= 2+t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}\,; \quad \mathscr{D}' \quad \begin{cases} x &= 2t' \\ y &= 4-t' \\ z &= -1+2t' \end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Corrigé

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

$$\text{A}(0\,;\,4\,;\,-1), \quad \text{B}(6\,;\,1\,;\,5) \quad \text{et} \quad \text{C}(6\,;\,-2\,;\,-1).$$

Affirmation 1 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Or $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 12-6-6=0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 12-12+0=0$.
Or il est admis que les points A, B et C ne sont pas alignés, donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas colinéaires.
Donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : c'est un vecteur normal à ce plan : affirmation **Vraie**. **Affirmation 2 :**
On sait que :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AB}) \iff \overrightarrow{\text{AM}} = u\overrightarrow{\text{AB}}$.
Avec $\overrightarrow{\text{AM}}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-4 \\ z-(-1-) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, vecteur qui est colinéaire à $\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AB}) \iff \begin{cases} x-0 &= 2u \\ y-4 &= -u \\ z-(-1) &= 2u \end{cases}$ où $u \in \mathbb{R}$. $\iff \begin{cases} x &= 2u \\ y &= 4-u \\ z &= -1+2u \end{cases}$ où $\in \mathbb{R}$.
On pose $u = t+1$ et on obtient un autre système paramétrique :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AB}) \iff \begin{cases} x &= 2t+2 \\ y &= 3-t \\ z &= 2t+1 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

L'affirmation est **Vraie**.

Affirmation 3 : Puisque $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite(AB) , le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ ou plus simplement le vecteur $\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

On sait qu'alors $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff 2x-y+2z+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Comme $C(6\,;\,-2\,;\,-1) \in \mathscr{P} \iff 12+2-2+d=0 \iff 12+d=0 \iff d=-12$, on obtient finalement :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff 2x-y+2z-12=0$: l'affirmation est **Fausse**.

$$\mathscr{D}\ \begin{cases} x &= 3+t \\ y &= 1+t \\ z &= 2+t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}\,;\quad \mathscr{D}'\ \begin{cases} x &= 2t' \\ y &= 4-t' \\ z &= -1+2t' \end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

La droite $\mathscr{D}$ contient le point D(3 ; 1 ; 2) et a pour vecteur directeur $\vec{d}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et la droite $\mathscr{D}'$ contient le point E(0 ; 4 ; -1) et a pour vecteur directeur $\vec{d'}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{d}\,'$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

Si elles ont point commun les coordonnées de celui-ci vérifient les deux systèmes d'où le nouveau système :

$$\begin{cases} 3+t &= 2t' \\ 1+t &= 4-t' \\ 2+t &= -1+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} t &= 2t'-3 \\ t &= 3-t' \\ t &= -3+2t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t'-3 &= 3-t' \\ 3-t' &= -3+2t' \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 3t' &= 6 \\ 6 &= 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} t' &= 2 \\ 2 &= t' \end{cases}$$ et comme $t = 3-t' = 3-2 = 1$. Le système a une solution.

Conclusion : les droites sont sécantes au point de coordonnées $(4\,;\,2\,;\,3)$; elles sont coplanaires : l'affirmation 4 est **Fausse**

Exercice 42.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :

$$\text{A}(2\,;\,0\,;\,0), \qquad \text{B}(0\,;\,4\,;\,3), \qquad \text{C}(4\,;\,4\,;\,1), \qquad \text{D}(0\,;\,0\,;\,4) \quad \text{et} \quad \text{H}(-1\,;\,1\,;\,2)$$

Affirmation 1 : les points A, C et D définissent un plan $\mathscr{P}$ d'équation $8x-5y+4z-16=0$.

Affirmation 2 : les points A, B, C et D sont coplanaires.

Affirmation 3 : les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x-y+2z-2=0$.

Affirmation 4 : le point H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Corrigé

Affirmation 1 : Vraie

Ici, il y a deux éléments à justifier : d'une part A, C et D définissent un plan et d'autre part, ce plan a bien l'équation annoncée.

- On a : $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}4-2\\4-0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$.

  Avec $x_{\overrightarrow{\text{AD}}}=-x_{\overrightarrow{\text{AC}}}$ mais $y_{\overrightarrow{\text{AD}}}\neq -y_{\overrightarrow{\text{AC}}}$, il est évident que les vecteurs $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}$ ne sont pas colinéaires, donc que les points A, C et D ne sont pas alignés, et donc :

  A, C et D définissent un plan ;

- le plan d'équation $8x-5y+4z-16=0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$, de coordonnées $\begin{pmatrix}8\\-5\\4\end{pmatrix}$.

  On a : $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=8\times 2-5\times 4+4\times 1=16-20+4=0$

  et $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{\text{AD}}=8\times(-2)-5\times 0+4\times 4=-16-0+16=0$

  $\overrightarrow{n_1}$ est donc bien orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ACD), donc $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal au plan (ACD).

  Le plan dont on a l'équation partage un vecteur normal avec (ACD) : ces deux plans sont parallèles.

  Comme, de plus, $8x_{\text{A}}-5y_{\text{A}}+4z_{\text{A}}-16=8\times 2-5\times 0+4\times 0-16=16-16=0$

  on en déduit que les coordonnées de A vérifient l'équation donnée, et donc que A est dans le plan dont on a l'équation, ce plan est donc confondu avec (ACD).

Finalement, on a bien confirmé que les points A, C et D définissent un plan $\mathscr{P}$ d'équation $8x-5y+4z-16=0$.

Remarque : pour le deuxième point de cette question, on pouvait aussi vérifier que A, C et D avaient des coordonnées vérifiant l'équation donnée, cela revenait au même.

Affirmation 2 : Fausse

Puisque l'on sait que A, C et D définissent le plan $\mathscr{P}$ d'équation $8x-5y+4z-16=0$, alors on a : les points A, B, C et D sont coplanaires $\iff$ B $\in \mathscr{P}$

$$\iff 8x_B - 5y_B + 4z_B - 16 = 0$$
$$\iff 8\times 0 - 5\times 4 + 4\times 3 - 16 = 0$$
$$\iff 0 - 20 + 12 - 16 = 0$$
$$\iff -24 = 0$$

Comme $-24 \neq 0$, on en déduit que B n'appartient pas à $\mathscr{P}$, et donc que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Affirmation 3 : Vraie

les droites (AC) et (BH) sont dirigées par $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ respectivement. Comme ces vecteurs sont visiblement non colinéaires, les droites sont soit sécantes, soit non coplanaires.
Pour chercher un éventuel point d'intersection, on a donné des représentations paramétriques des deux droites :

$$\text{(AC)}\begin{cases}x = 2+2s\\y = 4s\\z = s\end{cases} \quad \text{où } s\in\mathbb{R} \qquad \text{(BH)}\begin{cases}x = -t\\y = 4-3t\\z = 3-t\end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}.$$

Si on considère M_s le point de paramètre s sur la droite (AC) et N_t le point de paramètre t sur (BH), alors :

$$M_s = N_t \iff \begin{cases}2+2s = -t\\4s = 4-3t\\s = 3-t\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}2+2(3-t) = -t\\4(3-t) = 4-3t\\s = 3-t\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}2+6-2t = -t\\12-4t = 4-3t\\s = 3-t\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}8 = -t+2t\\12-4 = -3t+4t\\s = 3-t\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}t = 8\\t = 8\\s = 3-8\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}t = 8\\t = 8\\s = -5\end{cases}$$

Le système a une unique solution, donc les deux droites ont un unique point commun, c'est M_{-5}, qui est confondu avec N_8, autrement dit, le point de coordonnées : $(-8\,;\,-20\,;\,-5)$.
Les droites sont bien sécantes.

Affirmation 4 : Vraie

Il y a deux éléments à vérifier ici pour répondre positivement : le point H est-il un point du plan (ABC), et le vecteur $\overrightarrow{DH}$ est-il normal au plan ?

— On a : $x_H - y_H + 2z_H - 2 = -1 - 1 + 2 \times 2 - 2 = -2 + 4 - 2 = 0$
Les coordonnées de H vérifient l'équation donnée pour (ABC), donc H est bien un point du plan (ABC) ;

— On a : $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$. D'après l'équation donnée pour (ABC), un vecteur normal à (ABC) est : $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.
Comme on a : $\overrightarrow{n_2} = -\overrightarrow{DH}$, on en déduit que les vecteurs sont colinéaires, donc que $\overrightarrow{DH}$ est normal au plan (ABC).

En conclusion, H est un point de (ABC) tel que (DH) est orthogonale à (ABC) : H est bien le projeté orthogonal de D sur (ABC).

Exercice 43.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

Les quatre affirmations se placent dans la situation suivante :
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(2 ; 1 ; -1), \quad B(-1 ; 2 ; 1) \text{ et } \quad C(5 ; 0 ; -3).$$

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne :

$$x + 5y - 2z + 3 = 0.$$

On note $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= -t + 3 \\ y &= t + 2 \\ z &= 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 1 :

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (OAC).

Affirmation 2 :

Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont sécantes au point C.

Affirmation 3 :

La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 :
Le plan médiateur du segment [BC], noté Q, a pour équation cartésienne :

$$3x - y - 2z - 7 = 0.$$

On rappelle que le plan médiateur d'un segment est le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

Corrigé

$$\text{A}(2\,;\,1\,;\,-1),\quad \text{B}(-1\,;\,2\,;\,1) \text{ et } \quad \text{C}(5\,;\,0\,;\,-3).$$

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne : $x+5y-2z+3=0$.
On note $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= -t+3 \\ y &= t+2 \\ z &= 2t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 1 :
On a $\overrightarrow{\text{OA}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{OC}}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points O, A et C ne sont pas alignés et définissent bien un plan.
D'autre part : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{OA}} = 2+0-2=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{OC}} = 5+0-6=-1$; conclusion le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\text{OA}}$ du plan (OAC) mais n'est pas orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\text{OC}}$ de ce même plan ; il n'est donc pas normal au plan (OAC) : l'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2 :
On cherche la représentation paramétrique de (AB). On a :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AB}) \iff \overrightarrow{\text{AM}} = u\overrightarrow{\text{AB}}$, avec $u \in \mathbb{R}$. Comme $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ on obtient :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AB}) \iff \begin{cases} x-2 &= -3u \\ y-1 &= 1u \\ z+1 &= 2u \end{cases}, u \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x &= 2-3u \\ y &= 1+u \\ z &= -1+2u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Donc } M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AB}) \cap \mathscr{D} \iff \begin{cases} 2-3u &= 3-t \\ 1+u &= 2+t \\ -1+2u &= 1+2t \end{cases}$$

La deuxième équation donne $u = t+1$ et en remplaçant u par $t+1$ dans les deux autres on obtient le système :

$$\begin{cases} u &= t+1 \\ 2-3(t+1) &= 3-t \\ -1+2(1+t) &= 1+2t \end{cases} \iff \begin{cases} u &= t+1 \\ 2-3t-3 &= 3-t \\ -1+2+2t &= 1+2t \end{cases} \iff \begin{cases} u &= t+1 \\ -4 &= 2t \\ 1 &= 1 \end{cases} :$$

d'où $t=-2$ et $u = t+1 = -2+1 = -1$.
En remplaçant t ou u dans l'une des équations paramétriques de (AB) ou (D) on obtient le point commun de coordonnées (5 ; 0 ; -3), donc le point C.
Conclusion : l'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3 :
Si un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à la droite $\mathscr{D}$ et au plan $\mathscr{P}$ ses coordonnées vérifient l'équation paramétrique de $\mathscr{D}$ et l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$, donc le système :

$$\begin{cases} x & = & -t+3 \\ y & = & t+2 \\ z & = & 2t+1 \\ x+5y-2z+3 & = & 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

D'où en remplaçant dans l'équation du plan x, y et z par leurs valeurs en fonction de t :
$-t+3+5(t+2)-2(2t+1)+3=0 \iff -t+3+5t+10-4t-2+3=0 \iff 0t=-14$ cette équation n'a pas de solution : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont parallèles (strictement) ; l'affirmation 3 est vraie

Affirmation 4 :

• Le milieu H de [BC] a pour coordonnées $\mathrm{H}\left(\frac{-1+5}{2} ; \frac{2+0}{2} ; \frac{1-3}{2}\right)$, soit H(2 ; 1 ; −1).

$3x_\mathrm{H} - y_\mathrm{H} - 2z_\mathrm{H} - 7 = 3\times 2 - 1 - 2\times(-1) - 7 = 0$ donc $\mathrm{H} \in Q$.

• Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5-(-1) \\ 0-2 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Le plan Q a pour vecteur normal le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

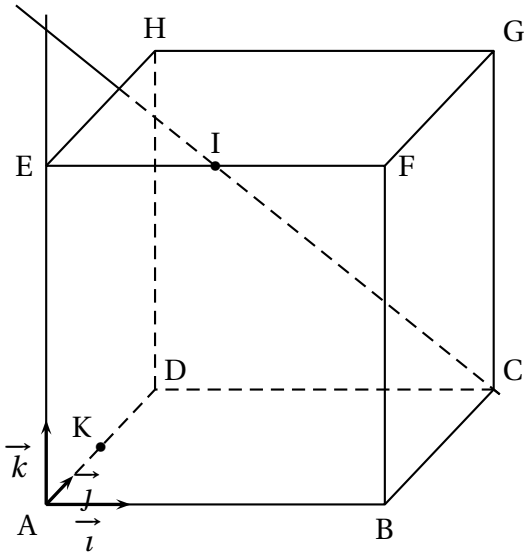
$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 2\vec{v}$ donc le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ est normal au plan Q.
L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 44.

On considère un repère orthonormé $\left(\mathrm{A} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel on place les points

$$\mathrm{B}(4;0;0), \quad \mathrm{D}(0;4;0), \quad \mathrm{E}(0;0;4)$$

et les points C, F, G et H de sorte que le solide ABCDEFGH soit un cube.



1. Donner les coordonnées des points C, F, G et H.

2. On considère le point I milieu de l'arête [EF].
Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IC) est donnée par :

$$\begin{cases} x &= 2+2t \\ y &= 4t \\ z &= 4-4t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de $\mathscr{P}$ avec (IC).

a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donnée par :

$$x+2y-2z-4=0.$$

b. Justifier que J a pour coordonnées $\left(\frac{28}{9}\,;\,\frac{20}{9}\,;\,\frac{16}{9}\right)$.
Que représente J par rapport à C ?

c. Vérifier que le point K(0 ; 2 ; 0) appartient au plan $\mathscr{P}$.

d. Justifier que (BK) est l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ABC).

4. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{B \times h}{3}$, où B est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.

a. Déterminer le volume de la pyramide CBKG.

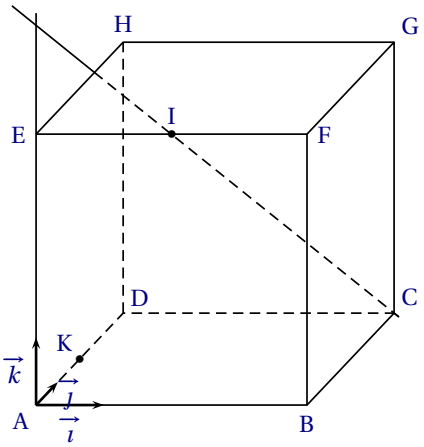
b. En déduire que l'aire du triangle BKG est égale à 12.

c. Justifier que la droite (BG) est incluse dans $\mathscr{P}$.

d. On note I′ un point de l'arête [EF], et P' le plan orthogonal à la droite (I′ C) passant par G.
Peut-on affirmer que la droite (BG) est incluse dans P' ?

Corrigé

On considère un repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel on place les points
B(4 ; 0 ; 0), D(0 ; 4 ; 0), E(0 ; 0 ; 4),
et les points C, F, G et H de sorte que le solide ABCDEFGH soit un cube.



1. De $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$, on déduit que C(4 ; 4 ; 0) ;
De $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 4\vec{\imath} + 4\vec{k}$, on déduit que F(4 ; 0 ; 4) ;
De $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, on déduit que G(4 ; 4 ; 4) ;
De $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, on déduit que H(0 ; 4 ; 4).

2. Le point I, milieu de [EF], a pour coordonnées $\left(\frac{0+4}{2}\,;\,\frac{0+0}{2}\,;\,\frac{4+4}{2}\right) = (2\,;\,0\,;\,4)$.

On sait que $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{IC}) \iff \overrightarrow{\text{IM}} = t\overrightarrow{\text{IC}}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Avec $\overrightarrow{\text{IC}}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$, on a donc :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{IC}) \iff \begin{cases} x-2 &= 2t \\ y-0 &= 4t \\ z-4 &= -4t, \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x &= 2+2t \\ y &= 4t \\ z &= 4-4t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de $\mathscr{P}$ avec (lC).

a. Le vecteur $\overrightarrow{\text{IC}}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. On sait qu'alors :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff 2x+4y-4z+d=0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\text{G}(4\,;4\,;4) \in \mathscr{P} \iff 2\times4+4\times4-4\times4+d=0 \iff d=-8$.

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff 2x+4y-4z-8=0 \iff x+2y-2z-4=0$.

b. J étant commun à (IC) et $\mathscr{P}$, ses coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient les équations paramétriques de (IC) et l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$, soit le système :

$$\begin{cases} x &= 2+2t \\ y &= 4t \\ z &= 4-4t \\ x+2y-2z-4 &= 0 \end{cases}$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$2+2t+2\times4t-2\times(4-4t)-4=0 \iff 2+2t+8t-8+8t-4=0$

$\iff 18t-10=0 \iff 9t-5=0 \iff t=\frac{5}{9}$.

En utilisant la représentation paramétrique de (IC), on obtient :

$x=2+2\times\frac{5}{9}=\frac{18+10}{9}=\frac{28}{9}$; $y=4\times\frac{5}{9}=\frac{20}{9}$ et $z=4-4\times\frac{5}{9}=\frac{36-20}{9}=\frac{16}{9}$.

Donc C est la perpendiculaire (IC) au plan $\mathscr{P}$ qui coupe ce plan en J : J est donc le projeté orthogonal de C sur le plan, $\mathscr{P}$.

c. $\text{K}(0\,;\,2\,;\,0) \in \mathscr{P} \iff 0+2\times2-2\times0-4=0$: cette égalité est vraie

d. On vient de voir que K est un point de $\mathscr{P}$ et K est un point du plan de la base (ABCD) du cube.

D'autre part $\text{B}(4\,;\,0\,;\,0) \in \mathscr{P} \iff 4+2\times0-2\times0-4=0$, qui est vraie donc B est un point de $\mathscr{P}$ et bien sur de (ABC).

Conclusion : les deux points B et K sont communs aux deux plans, donc l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ABC) est la droite (BK).

4. **a.** On prend comme base le triangle CBG de la face de droite BCGF : son aire est la moitié de celle du carré de côté 4, soit $\frac{4^2}{2}=8$.

La hauteur de la pyramide est alors [DC] avec DC = 4.

On a donc : $V_{\text{CBKG}}=\frac{8\times4}{3}=\frac{32}{3}$.

b. En prenant pour la même pyramide la base BKG, la hauteur est [CJ].

Comme $\overrightarrow{\text{CJ}}\begin{pmatrix}4-\frac{28}{9}\\4-\frac{20}{9}\\\frac{16}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{9}\\\frac{16}{9}\\\frac{16}{9}\end{pmatrix}$, d'où :

$\text{CJ}^2=\|\overrightarrow{\text{CJ}}\|^2=\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{16}{9}\right)^2+\left(\frac{16}{9}\right)^2=\frac{64+256+256}{81}=\frac{576}{81}=\frac{9\times64}{9\times9}=\frac{64}{9}=\left(\frac{8}{3}\right)^2$. Donc $\text{CJ}=\frac{8}{3}$.

Le volume de la pyramide est égal à :

$\frac{32}{3}=\frac{\text{aire(BKG)}\times\frac{8}{3}}{3}\iff\text{aire(BKG)}=32\times\frac{3}{8}=4\times3=12.$

c. On a déjà vu que B est un point de $\mathscr{P}$ et G aussi par définition, donc la droite (BG) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

d. On note I′ un point de l'arête [EF], et $\mathscr{P}'$ le plan orthogonal à la droite (I′C) passant par G.

Le point I′ a pour coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ telles que $\overrightarrow{\text{EI}'}=k\overrightarrow{\text{EF}}$ avec $k\in[0\,;\,1]$.

Donc $\begin{cases}x-0&=&(4-0)k\\y-0&=&(0-0)k\\z-4&=&(4-4)k\end{cases}$ et donc $\text{I}'\begin{pmatrix}4k\\0\\4\end{pmatrix}$; on a donc $\overrightarrow{\text{I'C}}\begin{pmatrix}4-4k\\4\\-4\end{pmatrix}$.

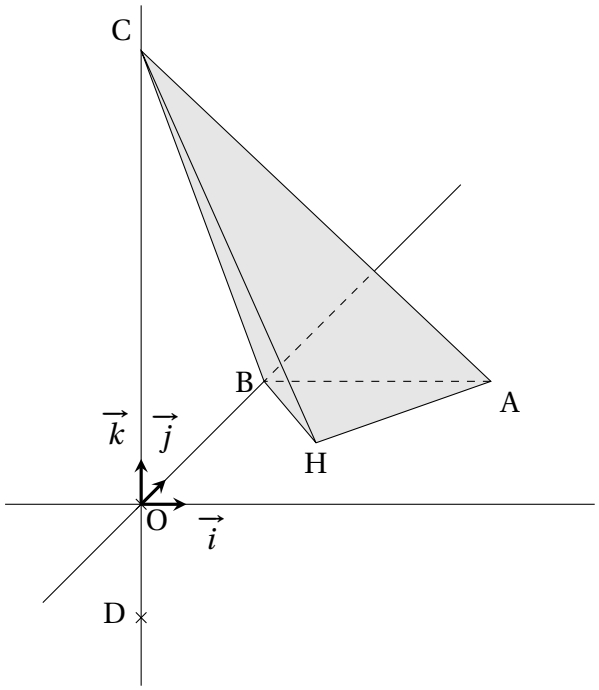
$\overrightarrow{\text{BG}}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{I'C}}\cdot\overrightarrow{\text{BG}}=(4-4k)\times0+4\times4+(-4)\times4=0$ donc $\overrightarrow{\text{I'C}}\perp\overrightarrow{\text{BG}}$.

G appartient au plan $\mathscr{P}'$ qui est le plan orthogonal à (I′C) ; comme $\overrightarrow{\text{I'C}}\perp\overrightarrow{\text{BG}}$, on peut dire que B appartient aussi à $\mathscr{P}'$. Donc la droite (BG) est incluse dans $\mathscr{P}'$.

Exercice 45.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

On considère les points A(5 ; 5 ; 0), B(0 ; 5 ; 0), C(0 ; 0 ; 10) et $\text{D}\left(0\,;\,0\,;\,-\frac{5}{2}\right)$.



1. **a.** Montrer que $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

b. En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x - y = 0$.

2. On considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x &= \dfrac{5}{2}t \\ y &= 5 - \dfrac{5}{2}t \\ z &= 0 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

a. On admet que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $\left(\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\,;\,0\right)$.

b. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

3. **a.** Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.

b. En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\dfrac{25}{4}$.

4. **a.** Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C.

b. En déduire le volume du tétraèdre ABCH.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3}\mathscr{B}h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).

Corrigé

1. **a.** On a $\overrightarrow{\text{CA}}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{DC}}\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{25}{2}\end{pmatrix}$.

Or ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et :

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{\text{CA}} = 5-5+0=0$ et

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{\text{DC}} = 0+0+0=0$.

Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD) : il est donc normal à ce plan.

b. On sait qu'alors :

$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{CAD}) \iff 1x-1y+0z+d=0 \iff x-y+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$.

Ceci est vrai pour exemple pour C :

$C(0\,;\,0\,;\,10)\in(\text{CAD}) \iff 0-1y+0+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$, soit $d=0$.

Donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{CAD}) \iff x-y=0$.

2. **a.** Si la droite (D) est sécante au plan (CAD) en un point H les coordonnées de ce point vérifient les équations paramétriques de (D) et celle du plan soit :

$$\text{H}(x\,;\,y\,;\,z)\in D\cap(\text{CAD}) \iff \begin{cases} x &= &+\frac{5}{2}t\\ y &= &5-\frac{5}{2}t\\ z &= &0t\\ x-y=0 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}) \Rightarrow \frac{5}{2}t-\left(5-\frac{5}{2}t\right)=0 \iff$$

$5t-5=0 \iff t=1$.

Donc $\text{H}\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\,;\,0\right)$.

b. On a $M(x\,;\,y\,;\,z)\in D \iff \begin{cases} x &= &0+\frac{5}{2}t\\ y &= &5-\frac{5}{2}t\\ z &= &0+0t \end{cases}$

On reconnait dans les coefficients de t les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{5}{2}\\0\end{pmatrix}$, soit $\frac{5}{2}\overrightarrow{n_1}$ et

$(0\,;5\,;0)$ sont les coordonnées de B.

Donc D est la droite contenant B et de vecteur directeur $\overrightarrow{n_1}$.

Or on a vu que le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est normal au plan (CAD), donc la droite D est perpendiculaire à (CAD) au point H.

3. **a.** On a vu que (BH) = D donc a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n_1}$.

$\overrightarrow{\text{HA}}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{\text{HA}}=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}+0=0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{BH}}$ et $\overrightarrow{\text{HA}}$ sont orthogonaux donc les droites (BH) et (HA) sont perpendiculaires, le triangle ABH est rectangle en H.

b. On a $\left\|\overrightarrow{\text{BH}}\right\|^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + 0 = \frac{50}{4}$, d'où $\left\|\overrightarrow{\text{BH}}\right\| = \text{BH} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ et

$\left|\overrightarrow{\text{HA}}\right\|^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + 0 = \frac{50}{4}$, d'où $\left\|\overrightarrow{\text{HA}}\right\| = \text{HA} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Donc $\mathscr{A}(\text{ABH}) = \dfrac{\text{BH} \times \text{HA}}{2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{5\sqrt{2}}{2} = \dfrac{25 \times 2}{8} = \dfrac{25}{4}$.

4. **a.** Les points A, B et H ont une cote nulle : ils appartiennent donc au plan définis par les vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ et C a une abscisse et une ordonnée nulles, donc appartient à l'axe $\left(\text{O}, \vec{k}\right)$ qui est perpendiculaire au plan (ABH), donc (CO) est la hauteur contenant C du tétraèdre ABCH.

b. De façon évidente CO = 10, donc :

$\mathscr{V}(\text{ABCH}) = \dfrac{\mathscr{A}(\text{ABH}) \times \text{CO}}{3} = \dfrac{\frac{25}{4} \times 10}{3} = \dfrac{125}{6}$.

5. On a $\overrightarrow{\text{BA}}\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{\text{BA}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 0+0+0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (BA) et (BC) sont perpendiculaires, le triangle (ABC) est rectangle en B.

On a $\text{BA}^2 = 5^2$, donc BA = 5 et $\text{BC}^2 = 5^2 + 10^2 = 25 + 100 = 125$, donc $\text{BC} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

L'aire du triangle (ABC) est égale à :

$\mathscr{A}(\text{ABC}) = \dfrac{\text{AB} \times \text{BC}}{2} = \dfrac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \dfrac{25\sqrt{5}}{2}$.

On a $\mathscr{V}(\text{ABCH}) = \dfrac{\mathscr{A}(\text{ABC}) \times d}{3}$, d étant la distance du point H au plan (ABC).

On a donc : $\dfrac{125}{6} = \dfrac{\frac{25\sqrt{5}}{2} \times d}{3} \iff d = \dfrac{125}{6} \times \dfrac{3 \times 2}{25\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

Exercice 46.

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation :

$$(P) : \quad 2x + 2y - 3z + 1 = 0.$$

On considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$$\text{A}(1\,;0\,;1)\ ,\ \text{B}(2\ ;-1\ ;1) \text{ et } \text{C}(-4\ ;-6\ ;5)\ .$$

Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

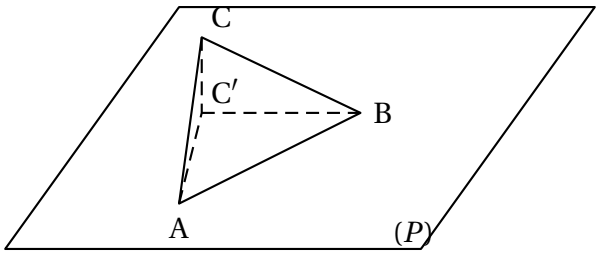
Partie A

1. Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan (P).
2. Montrer que le point $\text{C}'(0\ ;-2\ ;-1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions

$$\begin{cases} \text{H} \in (\text{AB}) \\ (\text{AB}) \text{ et } (\text{HC}) \text{ sont orthogonales.} \end{cases}$$

Déterminer les coordonnées du point H.



Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{HC}}$ sont : $\overrightarrow{\text{HC}}\begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\left\|\overrightarrow{\text{HC}}\right\|$.
2. Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S.

Partie C

On admet que $\text{HC}' = \sqrt{\frac{17}{2}}$.

1. Soit $\alpha = \widehat{\text{CHC}'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.
2. **a.** Montrer que les droites (C′H) et (AB) sont perpendiculaires.
   b. Calculer S' l'aire du triangle ABC′, on donnera la valeur exacte.
   c. Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.

Corrigé

Partie A

1. Vérifions si les coordonnées des points vérifient ou non l'équation de (P) :
   — $2x_\text{A} + 2y_\text{A} - 3z_\text{A} + 1 = 2\times 1 + 2\times 0 - 3\times 1 + 1 = 2 + 0 - 3 + 1 = 0$: A est dans le plan (P) ;
   — $2x_\text{B} + 2y_\text{B} - 3z_\text{B} + 1 = 2\times 2 + 2\times(-1) - 3\times 1 + 1 = 4 - 2 - 3 + 1 = 0$: B est dans le plan (P) ;
   — $2x_\text{C} + 2y_\text{C} - 3z_\text{C} + 1 = 2\times(-4) + 2\times(-6) - 3\times 5 + 1 = -8 - 12 - 15 + 1 = -34 \neq 0$: C n'est pas dans le plan (P).
2. On a : $\overrightarrow{\text{CC}'}\begin{pmatrix} 0-(-4) \\ -2-(-6) \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, d'après l'équation que l'on a du plan (P), $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P).

Comme on a manifestement $\overrightarrow{CC'} = 2\vec{n}$, ces vecteurs sont colinéaires, et donc la droite (CC') est orthogonale au plan (P).

De plus : $2x_{C'} + 2y_{C'} - 3z_{C'} + 1 = 2\times 0 + 2\times(-2) - 3\times(-1) + 1 = 0 - 4 + 3 + 1 = 0$: C' $\in (P)$.

Finalement, C' est un point du plan (P) tel que (CC') est orthogonale à (P) : cela confirme que C' est le projeté orthogonal de C sur (P).

3. La droite (AB) passe par A(1 ; 0 ; 1) et est dirigée par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, donc une représentation paramétrique de (AB) est : $\begin{cases} x = x_A + x_{\overrightarrow{AB}}\,t \\ y = y_A + y_{\overrightarrow{AB}}\,t \\ z = z_A + z_{\overrightarrow{AB}}\,t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

4. Si H est un point de (AB), cela signifie qu'il existe un réel t_0 tel que H est le point de paramètre t_0 sur (AB).

On a : (AB) et (CH) seront orthogonales (et donc nécessairement perpendiculaires, car elles ont H en commun) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont orthogonaux.

On a les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}(1+t_0)-(-4)\\(-t_0)-(-6)\\1-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5+t_0\\6-t_0\\-4\end{pmatrix}$. Comme le repère est orthonormé, on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH} = 1\times(5+t_0) + (-1)\times(6-t_0) + 0\times(-4) = 5 + t_0 - 6 + t_0 = 2t_0 - 1$

On a donc : (AB) et (CH) sont orthogonales $\iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH} = 0$

$\iff 2t_0 - 1 = 0$

$\iff t_0 = \dfrac{1}{2}$

L'unique pour H de la droite (AB) pour lequel (AB) et CH) sont orthogonales est donc le point de paramètre $t_0 = \dfrac{1}{2} = 0,5$ dans la représentation que nous avons donnée à la question précédente. Ses coordonnées sont donc : H(1,5 ; −0,5 ; 1).

Remarques : H est le milieu de [AB].

Si vous avez une représentation paramétrique différente de celle présentée dans ce corrigé, vous aurez aussi une valeur différente pour t_0.

Par exemple, si vous avez choisi B comme point de référence et $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur pour construire votre représentation paramétrique, vous arriverez à $t_0 = -0,5$, mais dans votre représentation paramétrique, cela vous conduira aux mêmes coordonnées pour le point H.

Partie B

Les coordonnées admises pour le vecteur $\overrightarrow{HC}$ sont cohérentes avec les coordonnées du point H à la question précédente.

1. On est dans un repère orthonormé, donc :

$$\left\|\overrightarrow{HC}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{121}{4} + 16} = \sqrt{\frac{153}{2}} = \sqrt{76,5}.$$

La valeur exacte de $\left\|\overrightarrow{HC}\right\|$ est donc : $\sqrt{\dfrac{153}{2}} = \sqrt{76,5}$.

2. Le point H, en tant que point de (AB) tel que (CH) est orthogonale à (AB), est donc le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

Pour calculer la surface du triangle, on va donc utiliser la formule : $\mathscr{A} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$.

Ici, le plus simple sera donc de choisir [AB] comme base, de longueur AB et donc la hauteur correspondante est CH = $\left\|\overrightarrow{CH}\right\|$.

On a déjà calculé CH à la question précédente, donc :

AB = $\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0} = \sqrt{2}$.

L'aire de ABC est donc : $S = \dfrac{AB \times CH}{2} = \dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{\dfrac{153}{2}}}{2} = \dfrac{\sqrt{153}}{2}$.

Partie C

1. — On a établi au début de l'exercice que A et B appartiennent à (P), donc toute la droite (AB) est incluse dans (P), et donc notamment H appartient à (P) aussi.

— H et C′ sont donc deux points de (P), et on sait que (CC′) est orthogonale à (P).

(CC') étant orthogonale à (P), elle orthogonale à toute droite de (P), dont la droite (C'H), ces droites sont donc perpendiculaires, car elles se coupent évidemment en C'.

Le triangle CHC' est donc un triangle rectangle en C'.

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est donné par le quotient de la longueur du côté adjacent à l'angle (ici C′H) par la longueur de l'hypoténuse du triangle (ici CH).

Ici, on a donc : $\cos(\alpha) = \dfrac{C'H}{CH} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{17}{2}}}{\sqrt{\dfrac{153}{2}}} = \sqrt{\dfrac{17}{153}} = \sqrt{\dfrac{17 \times 1}{17 \times 9}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$.

2. **a.** *Méthode* 1 : le plus rapide, ici, serait de calculer le produit scalaire des vecteur directeurs des deux droites, et de prouver qu'il est nul.

Mais comme on a fait quelque chose de similaire dans ce corrigé, on va explorer une voie différente :

Méthode 2 :

— On sait que (CH) est orthogonale à (AB), d'après la définition du point H à la question **A 4.** ;

— on sait que (CC′) est orthogonale à (AB), car (CC′) étant orthogonale à (P), elle est orthogonale à toute droite incluse dans (P), notamment (AB) ;

— on sait que les droites (CH) et (CC′) sont sécantes (en C), car les points C′ et H sont les intersections de ces deux droites avec (P), et sont séparés par une distance non nulle.

Ainsi, on vient de démontrer que C, C′ et H définissent un plan, et que deux droites sécantes du plan (CC'H) sont orthogonales à (AB), donc que (AB) est orthogonale au plan (CC′H) et donc à toutes les droites de ce plan là, notamment à la droite (C′H).

Remarque : le plan (CC′H) est ce que l'on appelle le **plan médiateur** du segment [AB] : le plan qui passe par le milieu (H) du segment et lui est perpendiculaire.

b. On applique à nouveau la formule de calcul de l'aire d'un triangle.
Ici, on va prendre [AB] comme base et donc, d'après la question précédente, [C′H] est la hauteur correspondante.

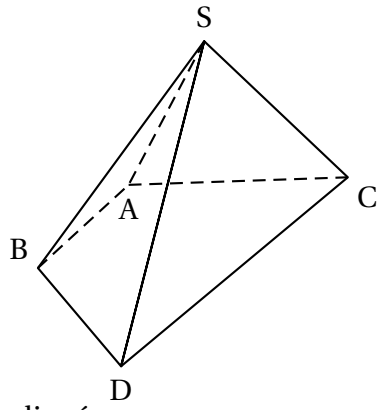
On a donc : $S' = \dfrac{\text{AB} \times \text{C}'\text{H}}{2} = \dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{\dfrac{17}{2}}}{2} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

c. On a donc : $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{C}'\text{H}}{\text{CH}} = \dfrac{\text{AB} \times \text{C}'\text{H}}{\text{AB} \times \text{CH}} = \dfrac{\dfrac{\text{AB} \times \text{C}'\text{H}}{2}}{\dfrac{\text{AB} \times \text{CH}}{2}} = \dfrac{S'}{S}$.

Voilà une relation possible.
On peut aussi écrire : $S' = \cos(\alpha) S$ par exemple.

Exercice 47.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points : A(3 ; −1 ; 1) ; B(4 ; −1 ; 0) ; C(0 ; 3 ; 2) ; D(4 ; 3 ; −2) et S(2 ; 1 ; 4).
Dans cet exercice on souhaite montrer que SABDC est une pyramide à base ABDC trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.



1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **a.** Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

b. Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].
On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.

3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2 ; 1 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).

d. On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{8}{3}\right)$, puis montrer que SI = 2 cm.

4. **a.** Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées H(3 ; 3 ; −1) et montrer que HB = $3\sqrt{2}$ cm.

b. Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC.
On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule

$$\mathscr{A} = \frac{b+B}{2} \times h$$

où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.

5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC.
On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

Corrigé

1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-3 \\ -1-(-1) \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-3 \\ 3-(-1) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On a $x_{\overrightarrow{AC}} = -3x_{\overrightarrow{AB}}$, mais $y_{\overrightarrow{AC}} \neq -3y_{\overrightarrow{AB}}$, les vecteurs sont donc non colinéaires, et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **a.** On sait que A, B et C ne sont pas alignés, et donc qu'ils définissent un plan. Pour montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires, il suffit de montrer que D est un point du plan (ABC), ce qui équivaut à prouver qu'un vecteur reliant un point du plan (ABC) au point D est coplanaire à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).
Pas tout à fait au hasard (car on a regardé l'énoncé de la question suivante), on va choisir d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{CD}$ en fonction d'une base de (ABC) constituée des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dont on a déjà déterminé les coordonnées précédemment.
On a : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4-0 \\ 3-3 \\ -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.
On remarque que l'on a : $\overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AC}$.
Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ peut donc être écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc c'est un vecteur du plan (ABC), et puisque C est dans le plan (ABC), on en déduit que D est également dans (ABC).
Finalement, puisque D est dans (ABC), les quatre points A, B, C et D sont bien coplanaires.

b. À la question précédente, on a établi $\overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ étant colinéaires, les segments [AB] et [CD] sont portés par des droites parallèles (strictement, car C n'est pas aligné avec A et B).
ABCD est donc une figure plane (les quatre points étant coplanaires), c'est donc un quadrilatère, non croisé (puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de même sens, cela signifie que ABDC est non croisé, ABCD serait un quadrilatère croisé), dont les côtés [AB] et [DC] sont parallèles : le quadrilatère ABDC est donc bien un trapèze, de bases [AB] et [DC].

3. **a.** Comme on est dans un repère $\left(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormé, on va utiliser les coordonnées des vecteurs pour calculer le produit scalaire :
— $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times (-1) = 2 + 0 - 2 = 0$: $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc orthogonaux ;
— $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-3) + 1 \times 4 + 2 \times 1 = -6 + 4 + 2 = 0$: $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont aussi orthogonaux ;
$\vec{n}$ étant orthogonal à une base (deux vecteurs non colinéaires) du plan (ABC), on en déduit que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ étant normal à (ABC), on en déduit que (ABC) admet une équation de la forme : $2x+y+2z+d=0$, où d est un réel donné.

De plus, A $\in$ (ABC) $\iff 2x_A+y_A+2z_A+d=0$

$\iff 2\times 3+(-1)+2\times 1+d=0$

$\iff 6-1+2+d=0$

$\iff d=-7$

Finalement, une équation de (ABC) est : $2x+y+2z-7=0$.

c. Si Δ est orthogonale à (ABC), cela signifie que $\vec{n}$, qui est normal à (ABC) doit diriger Δ. Et si la droite passe par S, de coordonnées (2 ; 1 ; 4), on en déduit qu'une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x=x_S+x_{\vec{n}}\,t\\ y=y_S+y_{\vec{n}}\,t\\ z=z_S+z_{\vec{n}}\,t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \quad \text{ce qui donne ici :} \quad \begin{cases} x=2+2t\\ y=1+t\\ z=4+2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$

d. On nomme M_t le point de paramètre t sur la droite Δ.

$M_t \in$ (ABC) $\iff 2x_{M_t}+y_{M_t}+2z_{M_t}-7=0$

$\iff 2(2+2t)+(1+t)+2(4+2t)-7=0$

$\iff 4+4t+1+t+8+4t-7=0$

$\iff 9t+6=0$

$\iff t=\dfrac{-2}{3}$

Il existe donc un unique point de Δ qui est sur le plan (ABC), c'est le point de paramètre $t=\dfrac{-2}{3}$ dans la représentation paramétrique. Ce point est donc le point I (ou bien $M_{\frac{-2}{3}}$), et a bien pour coordonnées : $\left(2+2\times\dfrac{-2}{3}\,;\,1+\dfrac{-2}{3}\,;\,4+2\times\dfrac{-2}{3}\right)=\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{8}{3}\right)$.

Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on a donc :

$$SI=\sqrt{(x_I-x_S)^2+(y_I-y_S)^2+(z_I-z_S)^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-2\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{8}{3}-4\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{36}{9}}=\sqrt{4}=2$$

On arrive bien à SI = 2 unités graphique, et comme $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ est d'unité graphique 1 cm, on a bien SI = 2 cm.

4. **a.** Avec les coordonnées données pour H, on a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$.

On a donc : $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BH}=4\times(-1)+0\times 4+(-4)\times -1=-4+0+4=0$, donc les vecteurs sont orthogonaux, et les droites (BH) et (CD) qu'ils dirigent sont orthogonales.

Par ailleurs : $\overrightarrow{CH}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{CD}$, les points C, H et D sont alignés, donc H est sur la droite (CD).

H est donc le point de la droite (CD) tel que (BH) est orthogonale à (CD), donc c'est bien le projeté orthogonal de B sur (CD).

On a $BH = \sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

La distance BH est bien égale à $3\sqrt{2}$ cm.

b. On a donc besoin de connaître les longueurs des deux bases du trapèze :

— $AB = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ cm ;

— Comme on a $\overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB}$, on a notamment, $CD = |4| \times AB = 4\sqrt{2}$ cm.

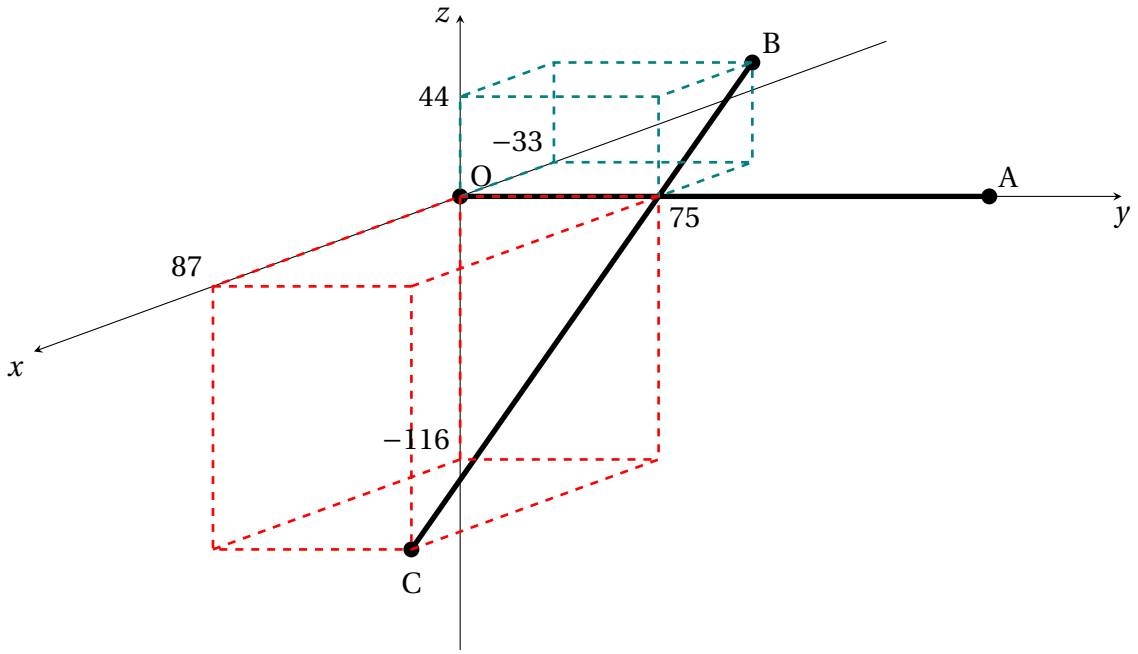
L'aire du trapèze ABDC est donc : $\mathscr{A}_{ABDC} = \dfrac{\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = 15\,\text{cm}^2$

5. Finalement, le volume de la pyramide est : $\mathscr{V}_{ABDCS} = \dfrac{1}{3} \times 15 \times 2 = 10\,\text{cm}^3$.

Exercice 48.

On modélise un passage de spectacle de voltige aérienne en duo de la manière suivante :

- on se place dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, une unité représentant un mètre ;
- l'avion n° 1 doit relier le point O au point A(0 ; 200 ; 0) selon une trajectoire rectiligne, à la vitesse constante de 200 m/s ;
- l'avion n° 2 doit, quant à lui, relier le point B(−33 ; 75 ; 44) au point C(87 ; 75 ; −116) également selon une trajectoire rectiligne, et à la vitesse constante de 200 m/s.
- au même instant, l'avion n° 1 est au point O et l'avion n° 2 est au point B.



1. Justifier que l'avion n° 2 mettra autant de temps à parcourir le segment [BC] que l'avion n° 1 à parcourir le segment [OA].

2. Montrer que les trajectoires des deux avions se coupent.

3. Les deux avions risquent-ils de se percuter lors de ce passage ?

Corrigé

1. L'avion n° 1 parcourt la distance AO.

Comme le repère est orthonormé, d'unité graphique 1 mètre, on a :

$AO = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2 + (z_A - z_O)^2} = \sqrt{0^2 + 200^2 + 0^2} = 200$ m.

On a par ailleurs : $BC = \sqrt{(87-(-33))^2 + (75-75)^2 + (-116-44)^2}$

$BC = \sqrt{120^2 + 0^2 + (-160)^2} = \sqrt{40\,000} = 200$ m.

Les deux avions parcourent donc la même distance (200 m), ils le font à la même vitesse (200 m/s), et donc ils vont mettre le même temps à le faire (1 s).

2. Donnons une représentation paramétrique des segments [OA] et [BC]

On a : O(0 ; 0 ; 0) et $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}0\\200\\0\end{pmatrix}$,

donc une représentation paramétrique de [OA] est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 200t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in [0\,;\,1]$

Par ailleurs : B(−33 ; 75 ; 44) et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}120\\0\\-160\end{pmatrix}$,

donc une représentation paramétrique de [BC] est : $\begin{cases} x = -33 + 120s \\ y = 75 \\ z = 44 - 160s \end{cases} \quad s \in [0;1]$

Les segments ont un point commun si le système : $\begin{cases} 0 = -33 + 120s \\ 200t = 75 \\ 0 = 44 - 160s \end{cases}$ a une solution.

$$\begin{cases} 0 = -33 + 120s \\ 200t = 75 \\ 0 = 44 - 160s \end{cases} \iff \begin{cases} 120s = 33 \\ t = \dfrac{75}{200} \\ 160s = 44 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s = \dfrac{33}{120} \\ t = \dfrac{3}{8} \\ s = \dfrac{44}{160} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s = \dfrac{11}{40} \\ t = \dfrac{3}{8} \\ s = \dfrac{11}{40} \end{cases}$$

Le système a effectivement une unique solution, les deux trajectoires ont donc bien un point commun, qui est le point de paramètre $t = \dfrac{3}{8}$ sur [0A], qui est aussi le point de paramètre $s = \dfrac{11}{40}$ sur [BC], c'est le point de coordonnées (0 ; 75 ; 0).

3. Les représentations paramétriques choisies sont aussi les équations horaires des deux avions (pour $t = 0$, on obtient le point de coordonnées $(50\ ;\ 0\ ;\ 0)$ sur le segment [OA], c'est le point O, donc le départ de l'avion 1. Pour $t = 1$, on obtient le point de coordonnées $(0\ ;\ 200\ ;\ 0)$, c'est-à-dire A, auquel l'avion arrive après 1 seconde.

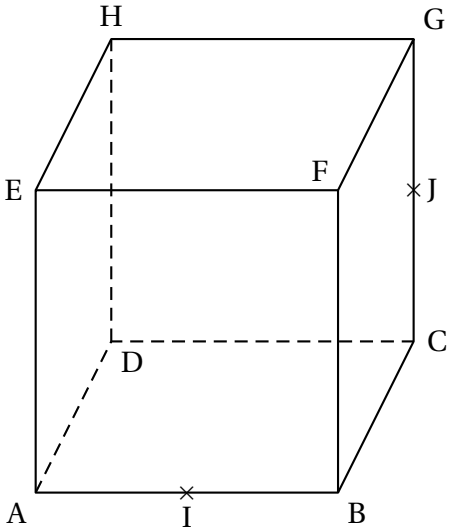
De même pour $s = 0$, l'avion n° 2 est en B, et pour $s = 1$, l'avion arrive en C, là aussi après une seconde.

Les deux avions n'arriveront pas au point commun de leurs trajectoires au même moment : l'avion n° 1 y arrive au bout de $\frac{3}{8}$ s, quand l'avion n° 2 y arrive au bout de $\frac{11}{40}$ s, soit $\frac{1}{10}$ de seconde après, en effet $\frac{3}{8} - \frac{11}{40} = \frac{15}{40} - \frac{11}{40} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$.

En un dixième de seconde, l'avion n° 1 sera donc déjà 20 m plus loin, il est donc raisonnable de penser que les avions ne se percuteront pas (les avions de voltige aérienne ne sont pas de gros avions, généralement), mais ils passeront très proches l'un de l'autre (ce qui est le principe des démonstrations de voltige aérienne).

Exercice 49.

Le cube ABCDEFGH a pour arête 1 cm.
Le point I est le milieu du segment [AB] et le point J est le milieu du segment [CG].



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points I et J.

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est normal au plan (FHI).

3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (FHI) est $-2x - 2y + z + 1 = 0$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EJ).

5. **a.** On note K le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI). Calculer ses coordonnées.

b. Montrer que le volume de la pyramide EFHI est $\frac{1}{6}$ cm^3.

On pourra utiliser le point L, *milieu du segment* [EF]. *On admet que ce point est le projeté orthogonal du point* I *sur le plan* (EFH).

c. Déduire des deux questions précédentes l'aire du triangle FHI.

Corrigé

1. On a : $\text{I}\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$ et $\text{J}\left(1\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

2. On en déduit :

$\overrightarrow{\text{EJ}}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\\frac{1}{2}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{\text{FH}}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; et $\overrightarrow{\text{FI}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-1\\0-0\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$.

donc :

$\overrightarrow{\text{EJ}}\cdot\overrightarrow{\text{FH}}=1\times(-1)+1\times1-\frac{1}{2}\times0=0$

$\overrightarrow{\text{EJ}}\cdot\overrightarrow{\text{FI}}=-\frac{1}{2}\times1+1\times0-\frac{1}{2}\times(-1)=0$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{EJ}}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FHI) donc $\overrightarrow{\text{EJ}}$ est normal au plan (FHI).

3. Le vecteur $\overrightarrow{\text{EJ}}\begin{pmatrix}1\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (FHI) donc le vecteur $\vec{n}=-2\overrightarrow{\text{EJ}}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal au plan (FHI).

Une équation cartésienne du plan (FHI) est donc de la forme : $-2x-2y+z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

De plus, le point F appartient au plan (FHI) donc ses coordonnées verifient l'équation du plan. On a donc :

$$\begin{aligned}\text{F}\in(\text{FHI}) &\iff -2\times x_\text{F}-2\times y_\text{F}+z_\text{F}+d=0\\ &\iff -2\times1-2\times0+1+d=0\\ &\iff -2+1+d=0\\ &\iff d=1\end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan (FHI) est donc $-2x-2y+z+1=0$.

4. Le vecteur $\overrightarrow{\text{EJ}}$ est un vecteur directeur de la droite (EJ) et E est un point de la droite (EJ). Une représentation paramétrique de la droite (EJ) est donc :

$$\begin{cases}x=0+1\times t\\y=0+1\times t\\z=1-\frac{1}{2}\times t\end{cases}\quad\text{avec } t\in\mathbb{R}\quad\text{c'est à dire :}\quad\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-\frac{1}{2}t\end{cases}\quad\text{avec } t\in\mathbb{R}$$

5. **a.** Soit K est le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI).

K est donc l'intersection du plan (FHI) et de la droite orthogonale au plan (FHI) passant par E, c'est à dire la droite (EJ).

Pour cela, on va considérer le point M_t de paramètre t sur la droite (EJ).

$$M_t \in (\text{FHI}) \iff -2x_{M_t} - 2y_{M_t} + z_{M_t} + 1 = 0$$
$$\iff -2 \times t - 2 \times t + \left(1 - \frac{1}{2}t\right) + 1 = 0$$
$$\iff -2t - 2t + 1 - \frac{1}{2}t + 1 = 0$$
$$\iff -\frac{9}{2}t = -2$$
$$\iff t = \frac{4}{9}$$

Le seul point de la droite étant aussi sur le plan est donc K, c'est le point de paramètre $\frac{4}{9}$ dans l'équation paramétrique de (EJ).

Ses coordonnées vérifient :

$x_{\text{K}} = \frac{4}{9}$, $y_{\text{K}} = \frac{4}{9}$ et $z_{\text{K}} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

Le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI) est le point K de coordonnées $\text{K}\left(\frac{4}{9}\,;\,\frac{4}{9}\,;\,\frac{7}{9}\right)$.

b. Le volume V d'une pyramide est donné par $V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur correspondante.

Prenons le triangle EFH comme base, la hauteur issue de I est donc la droite (IL) et la distance de I au plan EFH est donc égale à la longueur IL.

EFH est un triangle rectangle en E et son aire est égale à $\frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$

L a pour coordonnées $\text{L}\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$ donc

$\text{LI}^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + (0-0)^2 + (1-0)^2 = 1$ donc LI= 1.

On a donc V= $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$ $\left(\text{cm}^3\right)$.

c. Calculons maintenant le volume en prenant le triangle FHI comme base. La hauteur sera donc la longueur EK.

$\text{EK}^2 = \left(\frac{4}{9} - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{9} - 0\right)^2 + \left(\frac{7}{9} - 1\right)^2 = \frac{16}{81} + \frac{16}{81} + \frac{4}{81} = \frac{36}{81}$

donc EK= $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

On a donc :

$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{\text{FHI}} \times \frac{2}{3} \iff \frac{1}{6} \times 3 \times \frac{3}{2} = \mathscr{A}_{\text{FHI}}$
$\iff \frac{1}{6} \times 3 \times \frac{3}{2} = \mathscr{A}_{\text{FHI}}$
$\iff \mathscr{A}_{\text{FHI}} = \frac{3}{4}$

L'aire du triangle FHI est $\frac{3}{4}$ $\left(\text{cm}^2\right)$.

Exercice 50.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère :

- les points A$(-2\,;\,0\,;\,2)$, B$(-1\,;\,3\,;\,0)$, C$(1\,;\,-1\,;\,2)$ et D$(0\,;0\,;3)$.
- la droite $\mathscr{D}_1$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x &= t \\ y &= 3t \\ z &= 3+5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- la droite $\mathscr{D}_2$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x &= 1+3s \\ y &= -1-5s \\ z &= 2-6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x+3y+5z-8=0.$$

c. En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3. **a.** Justifier que la droite $\mathscr{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.
On admet que la droite $\mathscr{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de C.

b. Démontrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4. **a.** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).

b. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
Arrondir le résultat au centième.

Corrigé

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-(-2)\\3-0\\0-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-(-2)\\-1-0\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{3}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés

2. **a.** $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 1\times1+3\times3+5\times-2 = 1+9-10 = 0$
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times3+3\times-1+5\times0 = 3-3+0 = 0$

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC), c'est donc un vecteur normal du plan (ABC).
Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc de la forme :
$x+3y+5z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$
De plus, le point A appartient au plan (ABC) donc ses coordonnées verifient l'équation du plan. On a donc :
$-2+3\times 0+5\times 2+d=0 \iff -2+10+d=0 \iff d=-8$
Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $x+3y+5z-8=0$.

c. $x_D+3y_D+5z_D-8=0+3\times 0+5\times 3-8=15-8=7\neq 0$
Donc le point D n'appartient pas au plan (ABC) d'où les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3. **a.** Une équation paramétrique de $\mathscr{D}_1$ est : $\begin{cases} x=t \\ y=3t \\ z=3+5t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

D'une part : pour $t=0$, on a $\begin{cases} x=0 \\ y=3\times 0=0 \\ z=3+5\times 0=3 \end{cases}$.
On reconnait les coordonnées du point D, donc D appartient à la droite $\mathscr{D}_1$.

D'autre part : un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ est donc le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ c'est à dire le vecteur $\vec{n}$ qui est orthogonal au plan(ABC).
Donc la droite $\mathscr{D}_1$ est orthogonal au plan (ABC).
Donc la droite $\mathscr{D}_1$ est bien la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.

b. Pour déterminer les points éventuels d'intersection des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ résolvons le système (S) : $\begin{cases} t=1+3s \\ 3t=-1-5s \\ 3+5t=2-6s \end{cases}$

$$(S) \iff \begin{cases} t=1+3s \\ 3\times(1+3s)=-1-5s \\ 3+5\times(1+3s)=2-6s \end{cases} \iff \begin{cases} t=1+3s \\ 3+9s=-1-5s \\ 3+5+15s=2-6s \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} t=1+3s \\ 14s=-4 \\ 21s=-6 \end{cases} \iff \begin{cases} t=1+3s=1+3\times\dfrac{-2}{7}=\dfrac{1}{7} \\ s=-\dfrac{4}{14}=-\dfrac{2}{7} \\ s=-\dfrac{6}{21}=-\dfrac{2}{7} \end{cases}$$

Le système admet une unique solution donc les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes.
Remplaçons t par $\dfrac{1}{7}$ dans l'équation paramétrique de $\mathscr{D}_1$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{7} \\ y = 3 \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{7} \\ z = 3 + 5 \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{26}{7} \end{cases}$$

Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont donc sécantes et les coordonnées de leur point d'intersection sont $\left(\dfrac{1}{7} ; \dfrac{3}{7} ; \dfrac{26}{7}\right)$.

4. **a.** Soit H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

H est donc l'intersection du plan (ABC) et de la hauteur issue de D dans le tétraèdre ABCD c'est à dire la droite $\mathscr{D}_1$.

Les coordonnées de H vérifient donc l'équation cartésienne du plan (ABC) et l'équation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$.

$t + 3 \times (3t) + 5 \times (3 + 5t) - 8 = 0 \iff t + 9t + 15 + 25t - 8 = 0 \iff 35t = -7 \iff t = -\dfrac{7}{35} = -\dfrac{1}{5}$

Remplaçons t par $-\dfrac{1}{5}$ dans l'équation paramétrique de $\mathscr{D}_1$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{5} \\ y = 3 \times \dfrac{-1}{5} = -\dfrac{3}{5} \\ z = 3 + 5 \times \dfrac{-1}{5} = \dfrac{10}{5} = 2 \end{cases}$$

Le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) est le point H de coordonnées $\text{H}\left(-\dfrac{1}{5} ; -\dfrac{3}{5} ; 2\right)$.

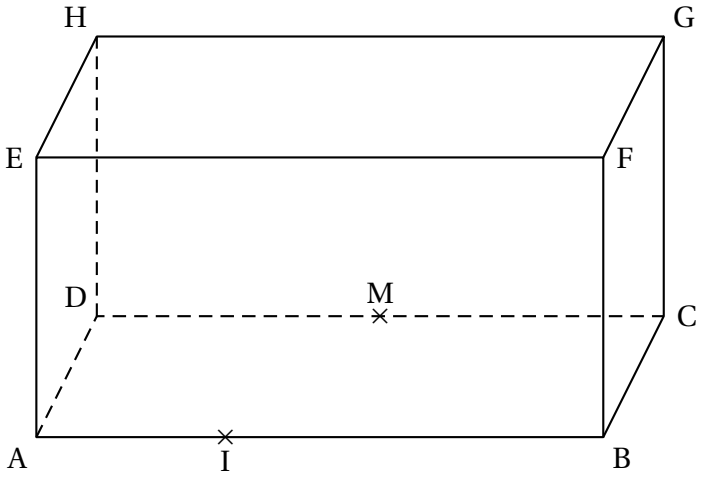
b. La distance du point D au plan (ABC) est égale à la longueur DH car H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

$\text{DH}^2 = \left(-\dfrac{1}{5} - 0\right)^2 + \left(-\dfrac{3}{5} - 0\right)^2 + (2-3)^2 = \dfrac{1}{25} + \dfrac{9}{25} + 1 = \dfrac{35}{25}$

$\text{DH} = \sqrt{\dfrac{35}{25}} = \sqrt{\dfrac{7}{5}} = \sqrt{\dfrac{14}{10}} = \sqrt{1,4}$ ou $\dfrac{\sqrt{35}}{5} \approx 1,183$ soit 1,18 au centième près.

Exercice 51.

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que AB = 3 et AD = AE = 1 représenté ci-dessous.

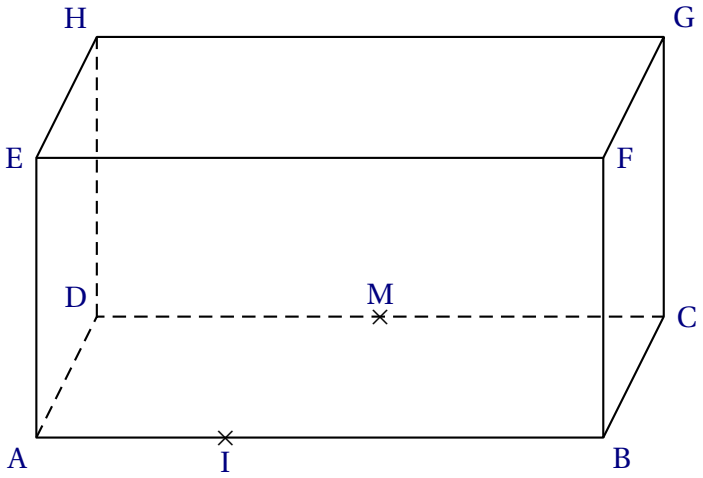


On considère le point I du segment [AB] tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment [CD].
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est :
   $$2x+6y+3z-9=0.$$
   c. Le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $5x+15y-3z+7=0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG).
4. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).
   Déterminer les coordonnées du point N.
5. Le point R de coordonnées $\left(3\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) ? Justifier la réponse.

Corrigé

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que AB = 3 et AD = AE = 1 représenté ci-dessous.



1. F(3 ; 0 ; 1), H(0 ; 1 ; 1), M(1,5 ; 1 ; 0).

2. **a.** Soit $\overrightarrow{\text{HF}}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{MF}}\begin{pmatrix}1,5\\-1\\1\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires.

On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{HF}} = 6-6+0=0$

On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{MF}} = 3-6+3=0$.

Conclusion : le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMF), il est donc normal à ce plan.

b. On sait qu'alors :

$X(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{MHF}) \iff 2x+6y+3z+d=0$. Ainsi par exemple :

$\text{H}(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{MHF}) \iff 0+6+3+d=0 \iff d=-9$, donc finalement :

$$X(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{MHF}) \iff 2x+6y+3z-9=0.$$

c. Le plan $\mathscr{P}$ a par exemple pour vecteur normal $\vec{p}\begin{pmatrix}5\\15\\-3\end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{n}$, (on a bien $2\times\frac{5}{2}=5$, $6\times\frac{5}{2}=15$, mais $3\times\frac{5}{2}\neq -3$) donc les deux plans ne sont pas parallèles.

3. On a D(0 ; 1 ; 0) et G(3 ; 1 ; 1), d'où $\overrightarrow{\text{DG}}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

On sait que :

$$X(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{DG}) \iff \overrightarrow{\text{DX}}=t\overrightarrow{\text{DG}},\,t\in\mathbb{R} \iff \begin{cases} x-0 &= 3t\\ y-1 &= 0\\ z-0 &= 1t\end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \iff \begin{cases} x &= 3t\\ y &= 1\\ z &= t\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$

4. Si la droite coupe le plan en un point N, les coordonnées de ce point vérifient les équations de la droite et celle du plan soit le système :

$$\begin{cases} x &= 3t \\ y &= 1 \\ z &= t \\ 2x+6y+3z-9 &= 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$6t+6+3t-9=0 \iff 9t-3=0 \iff 3t-1=0 \iff t=\dfrac{1}{3}$. Les coordonnées de N sont donc $\left(3\times\frac{1}{3}\,;\,1\,;\,\frac{1}{3}\right)$, soit $\mathrm{N}\left(1\,;\,1\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

5. • On vérifie d'abord que R appartient au plan (HMF) :

$\mathrm{R}\left(3\,;\,\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\right) \in (\mathrm{HMF}) \iff 6+\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}-9=0 \iff 6+3-9=0$ ce qui est vrai.

• On vérifie maintenant que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{GR}}$ est bien un vecteur normal au plan (HMF) :

On a $\overrightarrow{\mathrm{GR}}\begin{pmatrix}3-3\\\frac{1}{4}-1\\\frac{1}{2}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{3}{4}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Or ce vecteur n'est manifestement pas colinéaire au vecteur connu $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$: pour que $\vec{n}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{GR}}$ il faudrait que sa première coordonnée soit égale à 0, ce qui n'est pas le cas.

Conclusion : le point R n'est pas le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF).

Exercice 52.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les quatre questions sont indépendantes.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

1. On considère les points A(1 ; 0 ; 3) et B(4 ; 1 ; 0).

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

a. $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 1 \\ z = -3+3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

b. $\begin{cases} x = 1+4t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

c. $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = t \\ z = 3-3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

d. $\begin{cases} x = 4+t \\ y = 1 \\ z = 3-3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

On considère la droite (d) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3+4t \\ y = 6t \\ z = 4-2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

2. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite (d) ?

a. M(7 ; 6 ; 6) **b.** N(3 ; 6 ; 4) **c.** P(4 ; 6 ; −2) **d.** R(−3 ; −9 ; 7)

3. On considère la droite (d') de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -2+3k \\ y = -1-2k \\ z = 1+k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Les droites (d) et (d') sont :

a. sécantes **b.** non coplanaires **c.** parallèles **d.** confondues

4. On considère le plan (P) passant par le point I(2 ; 1 ; 0) et perpendiculaire à la droite (d).
Une équation du plan (P) est :

a. $2x+3y-z-7=0$ **b.** $-x+y-4z+1=0$
c. $4x+6y-2z+9=0$ **d.** $2x+y+1=0$

Corrigé

1. On considère les points A(1 ; 0 ; 3) et B(4 ; 1 ; 0).

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : **c.** $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = t \\ z = 3-3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

On vérifie que pour $t = 0$ on obtient les coordonnées du point A et pour $t = 1$, on obtient les coordonnées du point B.

La réponse correcte est la réponse C.

2. Le paramètre $t = 1$ permet de vérifier l'ordonnée des trois premiers points mais pas leurs autres coordonnées, donc le seul point qui appartient à la droite (d) est R.

Pour $t = -\dfrac{3}{2}$ on trouve les coordonnées de R.

La réponse correcte est la réponse D.

3. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

$\vec{u'}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d').

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ n'ont pas leur coordonnées proportionnelles donc ils ne sont pas colinéaires. Donc les droites (d) et (d′) sont ni parallèles ni confondues.

Les deux droites sont sécantes s'il existe deux réels t et k tels que :

$$\begin{cases} 3+4t = -2+3k \\ 6t = -1-2k \\ 4-2t = 1+k \end{cases} \iff \begin{cases} 4t-3k = -5 \\ 6t+2k = -1 \\ -2t-k = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} -5k = -11 & L_1+2L_3 \\ 2t = -7 & L_2+2L_3 \\ -2t-k = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} k = \frac{11}{5} \\ t = \frac{-7}{2} \\ -2t-k = -3 \end{cases}$$

or $-2\times\dfrac{-7}{2}-\dfrac{11}{5}=\dfrac{24}{5}\neq -3$

donc les droites (d) et (d′) ne sont pas sécantes, et comme elles sont ni parallèles ni sécantes, elles sont non coplanaires.

La réponse correcte est la réponse B.

4. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d) est un vecteur normal au plan (P).

donc $M(x;y;z)\in(P) \iff \overrightarrow{IM}.\vec{u}=0 \iff 4(x-2)+6(y-1)-2(z-0)=0 \iff 4x+6y-2z-14=0$

donc $M(x;y;z)\in(P) \iff 2x+3y-z-7=0$

Une équation du plan (P) est : $2x+3y-z-7=0$.

La réponse correcte est la réponse A.