Annales baccalauréat spécialité
Fonction logarithme

Corrigés :

Exercice 1. Amérique du Sud 12 novembre 2026 - Exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x(2-\ln(x)).$$

On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

PARTIE A : Étude de fonction

1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,\infty[$, on a : $f'(x) = 1-\ln(x)$
   c. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Justifier que $f(x) \leqslant 0$ pour $x \in \left[\mathrm{e}^2;+\infty\right[$.
3. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^2;\mathrm{e}^3\right]$.
   b. Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α au dixième.
   c. Montrer que : $\ln(\alpha) = 2+\dfrac{1}{\alpha}$.

PARTIE B : Étude d'une suite

Le but de cette partie est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;2]$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0,1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$$

2. On admet que la suite (u_n) est croissante. En déduire qu'elle converge.
3. On admet que la limite L de cette suite vérifie l'équation $f(x) = x$.
   Déterminer la valeur L.

PARTIE C : Calcul d'aire

On admet que la fonction f est négative ou nulle sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^2;\alpha\right]$ où α est la valeur définie en **Partie A. 3.**.
On note $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \mathrm{e}^2$ et $x = \alpha$.

1. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que

$$\int_{e^2}^{\alpha} x\ln(x)\,dx = \frac{\alpha^2(2\ln\alpha - 1) - 3e^4}{4}$$

2. a. Justifier que : $\mathscr{A} = \int_{e^2}^{\alpha} x\ln(x)\,dx - \int_{e^2}^{\alpha} 2x\,dx$.

b. En utilisant le résultat de la question **3. c.** dans la Partie **A**, montrer que

$$\mathscr{A} = \frac{\alpha(2-\alpha) + e^4}{4}$$

Exercice 2. Antilles-Guyane 17 juin 2026 - Exercice 4

On considère la fonction f_k définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_k(x) = 1 - x + \frac{k(1+\ln x)}{x}$$

où k est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme népérien.

On désigne par $\mathscr{C}_k$ la représentation graphique de la fonction f_k dans un repère orthonormé.

On admet que la fonction f_k est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

On note f_k' sa dérivée première et f_k'' sa dérivée seconde.

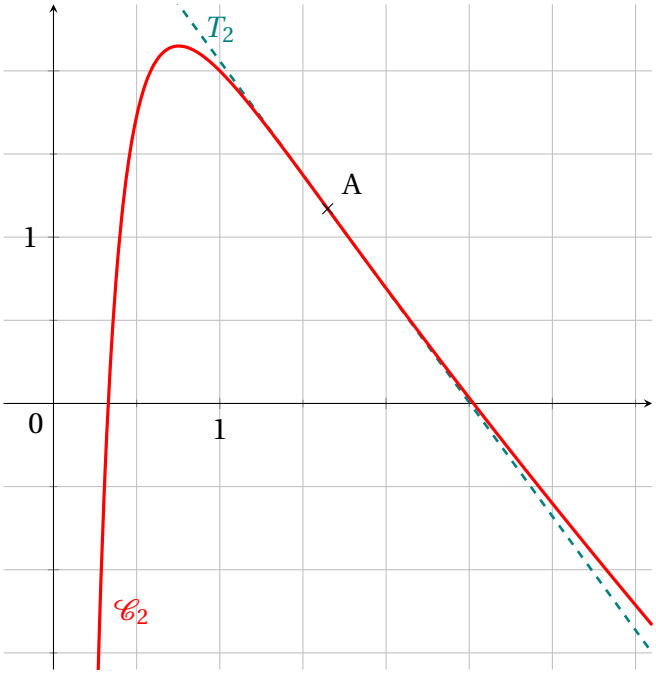
Partie A : étude d'un premier cas particulier

Dans cette partie, on se place dans le cas $k = 2$.

La courbe $\mathscr{C}_2$ est représentée sur le graphique ci-dessous.

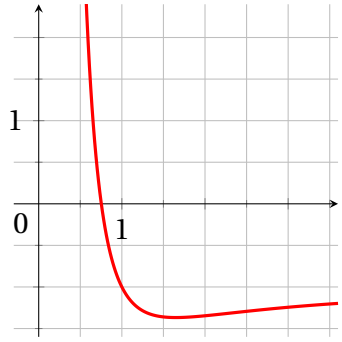
On précise que :

- Le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_2$;
- T_2 est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point A.

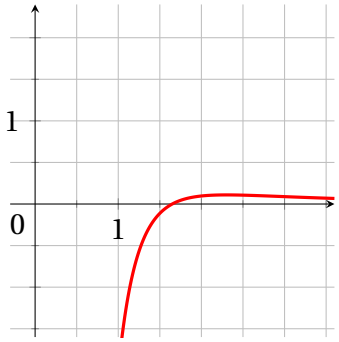


1. On considère une primitive F_2 de la fonction f_2 sur $]0;+\infty[$.
Avec la précision permise par le graphique, donner les variations de la fonction F_2 sur l'intervalle $]0;3]$.

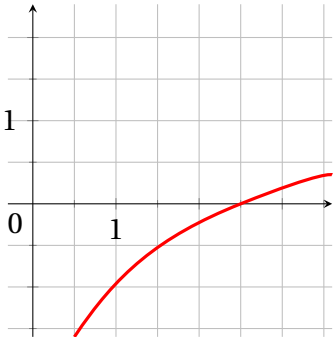
2. Parmi les trois courbes ci-dessous, indiquer celle qui représente f_2' et celle qui représente f_2''.
Justifier.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

Partie B : étude d'un second cas particulier

Dans cette partie on se place dans le cas $k = 1$.

On considère la fonction f_1 définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_1(x) = 1 - x + \frac{1+\ln x}{x}$$

1. a. Montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$f_1'(x) = -1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

b. Déterminer la limite de $f_1'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. On admet que :

- l'axe des ordonnées est une asymptote de la courbe de f_1' ;
- pour tout réel $x > 0$, $\quad f_1''(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x^3}$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de f_1' sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f_1'	‖	$+\infty$ ↘	$-1-\dfrac{1}{2e}$	↗	-1

a. Justifier les variations de la fonction f_1' sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et la valeur de l'extremum.

b. Justifier la limite de la fonction f_1' en 0.

c. Montrer qu'il existe une unique solution α à l'équation $\quad f_1'(x) = 0 \quad$ sur $]0;+\infty[$.
En déduire que f_1 admet un maximum sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

d. Recopier et compléter les pointillés du programme écrit en langage Python ci-dessous, afin qu'il renvoie une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution α de l'équation $\quad f_1'(x) = 0 \quad$ sur $]0;+\infty[$.

```
def d(x) :
  return -1-ln(x)/x**2

def alpha() :
  u = 0.5
  while d(u) ... 0 :
    u = ...
  return u
```

On rappelle que x**2 désigne x^2.

Partie C : *k* quelconque

On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $\quad h(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$,

et la fonction H définie sur $]0;+\infty[$ par $\quad H(x) = \dfrac{1}{2}(1+\ln x)^2$.

On admet que H est dérivable sur $]0;+\infty[$.

1. Montrer que la fonction H est une primitive de h.

On rappelle que k est un réel strictement positif et que f_k est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_k(x) = 1 - x + \frac{k(1+\ln x)}{x}$$

2. Existe-t-il une valeur de k pour laquelle la valeur moyenne de la fonction f_k sur l'intervalle $[1;\mathrm{e}]$ est égale à 0 ?

Justifier.

Exercice 3. Métropole 16 juin 2026 - Exercice 4

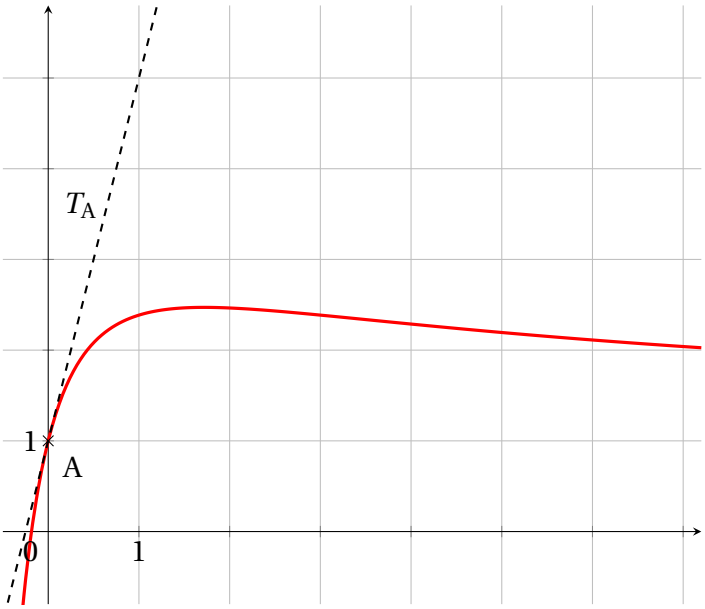
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = a + \frac{b\ln(x+1)}{x+1}.$$

où a et b sont des réels, et ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]-1;+\infty[$.
On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

L'objectif de cette partie est de déterminer les valeurs de a et b de sorte que la courbe représentative de la fonction f sur $]-1;+\infty[$ corresponde à celle tracée dans le repère orthonormé ci-dessous :



On précise que la droite T_A est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point A$(0;1)$.

1. Justifier que $a = 1$.
2. En utilisant le graphique :
   a. Donner la valeur de $f'(0)$.
   Justifier.
   b. Donner le signe de $f''(1)$.
   Justifier.
3. a. Montrer que pour tout réel x appartenant à $]-1;+\infty[$, on a :
$$f'(x) = \frac{b(1-\ln(x+1))}{(x+1)^2}$$
   b. En déduire la valeur de b.

Partie B

On admet dans la suite de l'exercice que la fonction f est définie sur $]-1;+\infty[$ par :
$$f(x) = 1 + \frac{4\ln(x+1)}{x+1}$$

1. Justifier que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f.
2. Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x+1) > 0$ sur $]-1;+\infty[$.
3. On admet que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$.
   Dresser le tableau de variation complet de la fonction f en indiquant la valeur exacte de son extremum.
   Justifier.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2;+\infty[$.
   En donner une valeur arrondie à 10^{-1}.

5. **a.** Montrer que :

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\ln 3\right)^2.$$

b. En déduire l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

Exercice 4. Centres étrangers 11 juin 2026 - Exercice 3

Partie A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[2;+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(3x^2 + 2x\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[2;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

2. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[2;+\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - x$$

On admet que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

b. Donner la valeur de α arrondie au centième.

c. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, les réponses pourront s'appuyer sur les résultats de la **partie A**.
On définit une suite (a_n) par son premier terme $a_0 > 0$ et pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \ln\left(3{a_n}^2 + 2a_n\right)$$

On étudie le cas où $2 \leqslant a_0 \leqslant \alpha$, où α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$.

2. Démontrer que la suite (a_n) est croissante.

3. Démontrer que la suite (a_n) converge.

4. Démontrer que la limite de la suite (a_n) est α.

Partie C

Dans cette partie, on prend $a_0 = 2$.

La suite (a_n) est ainsi définie par $a_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \ln\left(3{a_n}^2 + 2a_n\right)$$

On note (b_n) la suite définie par $b_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$b_{n+1} = \ln\left(3{b_n}^2 + 2b_n\right)$$

On admet que la suite (b_n) est strictement décroissante et qu'elle converge vers α.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $a_n \leqslant b_n$.

2. On considère le script ci-dessous écrit en langage Python.

```
from math import *
def algo(p):
  a = 2
  b = 10
  n = 0
  while b - a > 10**(-p):
    a = log(3*a**2 + 2*a)
    b = log(3*b**2 + 2*b)
    n = n + 1
  return (n,a)
```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande `log(c)` renvoie la valeur de $\ln(c)$;
- la commande `a**2` renvoie la valeur de a^2.

a. Donner les valeurs renvoyées par l'instruction `algo(2)`.
On arrondira si besoin les valeurs au millième.

b. Interpréter les valeurs renvoyées dans le contexte de l'exercice.

Exercice 5. Centres étrangers 10 juin 2026 - Exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

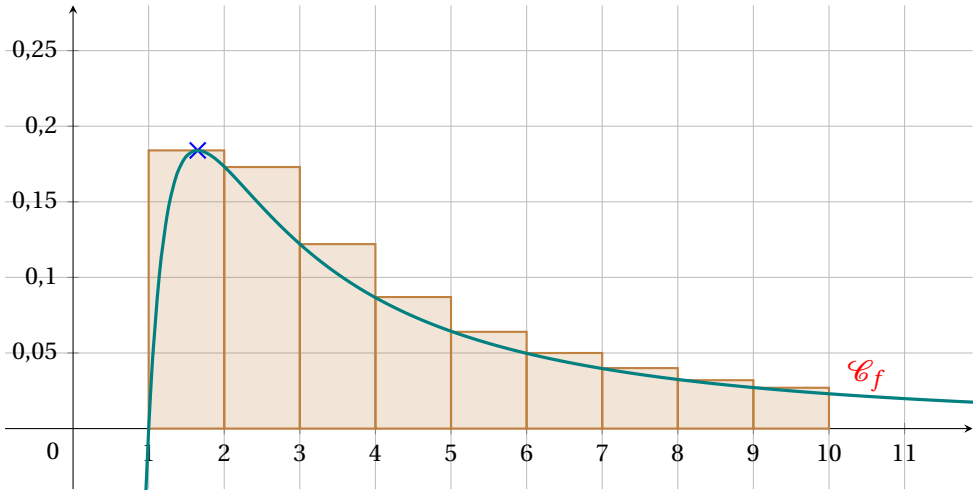
1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0;+\infty[$.
   b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Pour tout réel strictement positif x, démontrer que
$$f'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$$
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs exactes des éventuels extremums de la fonction.
4. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ, tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
5. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, on a
$$f''(x) = \frac{-5+6\ln(x)}{x^4}$$
6. **a.** Étudier la convexité de la fonction f en précisant les coordonnées des éventuels points d'inflexion.
   b. En déduire que, pour tout réel x appartenant à $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$, on a
$$x-1 \geqslant \frac{\ln(x)}{x^2}$$
7. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $\left[\mathrm{e}^{\frac{5}{6}};+\infty\right[$, on a aussi
$$x-1 \geqslant \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Partie B

On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel non nul n, par :

$$I_n = \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. Donner une interprétation graphique de I_n pour n un entier naturel non nul.
2. Démontrer que la suite (I_n) est croissante.
3. On souhaite calculer une approximation de $\displaystyle\int_1^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ en déterminant la somme des aires des rectangles tracés dans le graphique ci-dessous.



Pour cela, on utilise le script suivant, écrit en langage Python.

```
from math import *

S=1/(2*exp(1))
for i in range (2,10):
  S =...
print(S)
```

Recopier et compléter ce script afin qu'il réponde au problème posé.

4. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$I_n = \frac{n-1-\ln(n)}{n}$$

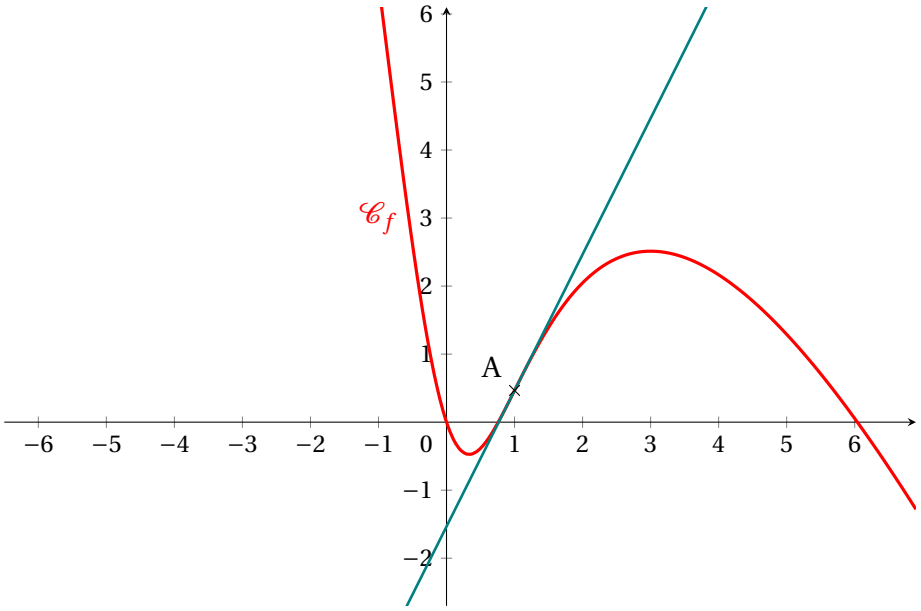
5. Calculer la limite de la suite (I_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6. Amérique du Nord 20 mai 2026 - Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 5\ln\left(x^2+1\right) - 3x$$

et on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.



1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f, les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. **a.** Démontrer que, pour tout x réel strictement positif,

$$f(x) = x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

b. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $+\infty$.

4. **a.** Démontrer que pour tout x réel, $\quad f'(x) = \dfrac{-3x^2+10x-3}{x^2+1}$.

b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,

$$f''(x) = \frac{-10x^2+10}{\left(x^2+1\right)^2}$$

a. Valider ou rejeter la conjecture faite à la question **1**.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

c. En déduire que pour tout $x \geqslant 1$, $\quad \ln\left(x^2+1\right) \leqslant x + \ln(2) - 1$.

Exercice 7. Nouvelle-Calédonie 21 novembre 2025 - Exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Donner un encadrement du réel α d'amplitude $0,01$.

c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x)$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé d'origine O. On considère un réel x strictement positif et le point M de la courbe C_g d'abscisse x. On note OM la distance entre les points O et M.

a. Exprimer la quantité OM^2 en fonction du réel x.

b. Montrer que, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la quantité OM^2 admet un minimum en α.

c. La valeur minimale de la distance OM, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, est appelée distance du point O à la courbe $\mathscr{C}_g$. On note d cette distance.
Exprimer d à l'aide de α.

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,8]$ par

$$f(x) = \frac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x}$$

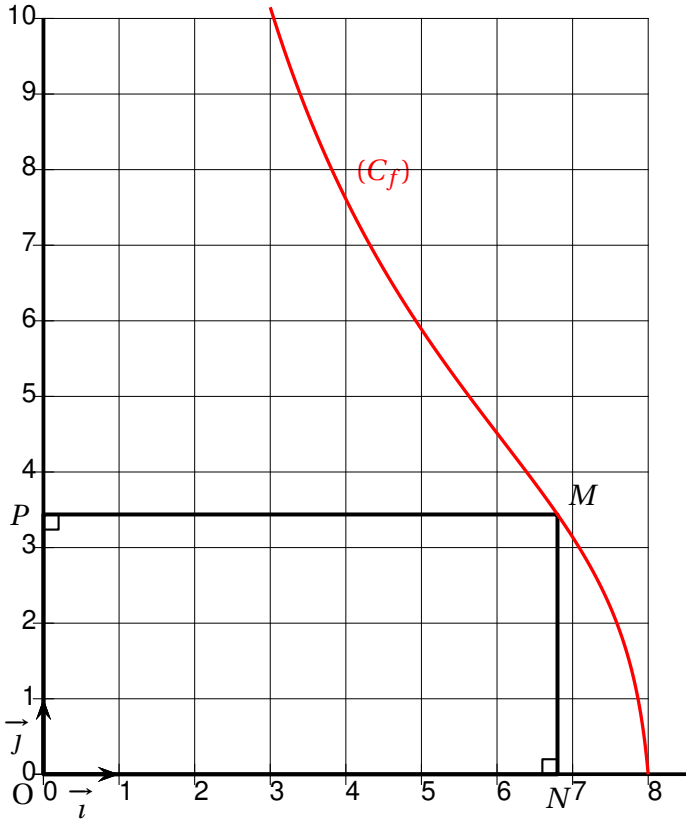
Soit C_f la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x^2+7x+8 \geqslant 0$.
2. En déduire que pour tout $x \in]0\,;\,8]$, on a $f(x) \geqslant 0$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie B

La courbe C_f est représentée ci-dessous.
Soit M le point de C_f d'abscisse x avec $x \in]0\,;\,8]$.
On appelle N et P les projetés orthogonaux du point M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.
Dans cette partie, on s'intéresse à l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle $ONMP$.



1. Donner les coordonnées des points N et P en fonction de x.
2. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,8]$,

$$\mathscr{A}(x) = 10\ln\left(-x^2+7x+9\right)$$

3. Existe-t-il une position du point M pour laquelle l'aire du rectangle $ONMP$ est maximale ? Si elle existe, déterminer cette position.

Partie C

On considère un réel strictement positif k.
On souhaite déterminer la plus petite valeur de x, approchée au dixième, appartenant à $[3{,}5\,;\,8]$ pour laquelle l'aire $\mathscr{A}(x)$ devient inférieure ou égale à k.
Pour ce faire, on considère l'algorithme ci-dessous.
Pour rappel, en langage Python, $\ln(x)$ s'écrit log (x).

```
1   from math import *
2
3   def A(x) :
4     return 10*log (- 1* x**2 + 7*x + 9)
5
6   def pluspetitevaleur(k) :
7     x = 3.5
8     while A(x)..... :
9       x = x + 0.1
10    return ...........
```

1. Recopier et compléter les lignes 8 et 10 de l'algorithme.

2. Quel nombre renvoie alors l'instruction `pluspetitevaleur(30)` ?

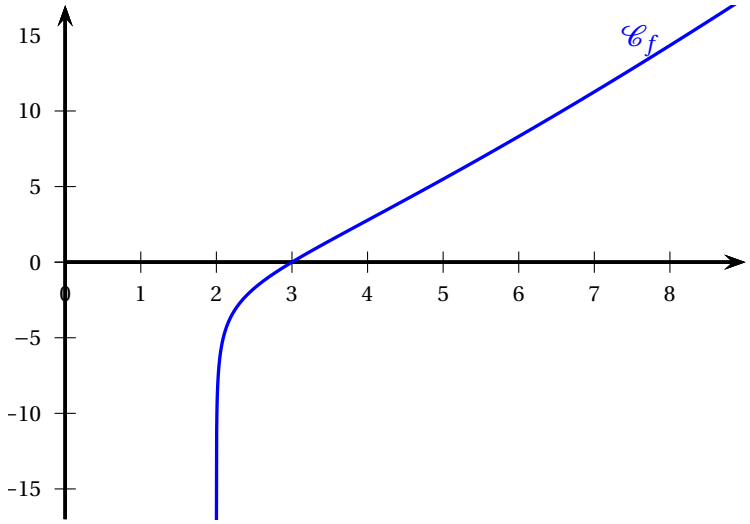
3. Que se passe-t-il lorsque $k = 35$? Justifier.

Exercice 9. Polynésie 18 juin 2025 - Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x-2).$$

Une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2\,;\,+\infty[$.
3. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} f(x)$.
   Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1. ?
4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$:
$$f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}.$$
5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.
   a. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, on a :
$$g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$
   b. On admet que $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} g(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
   En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2\,;\,+\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g.
   c. En déduire que, pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.
   d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$.
6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.
7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 ?

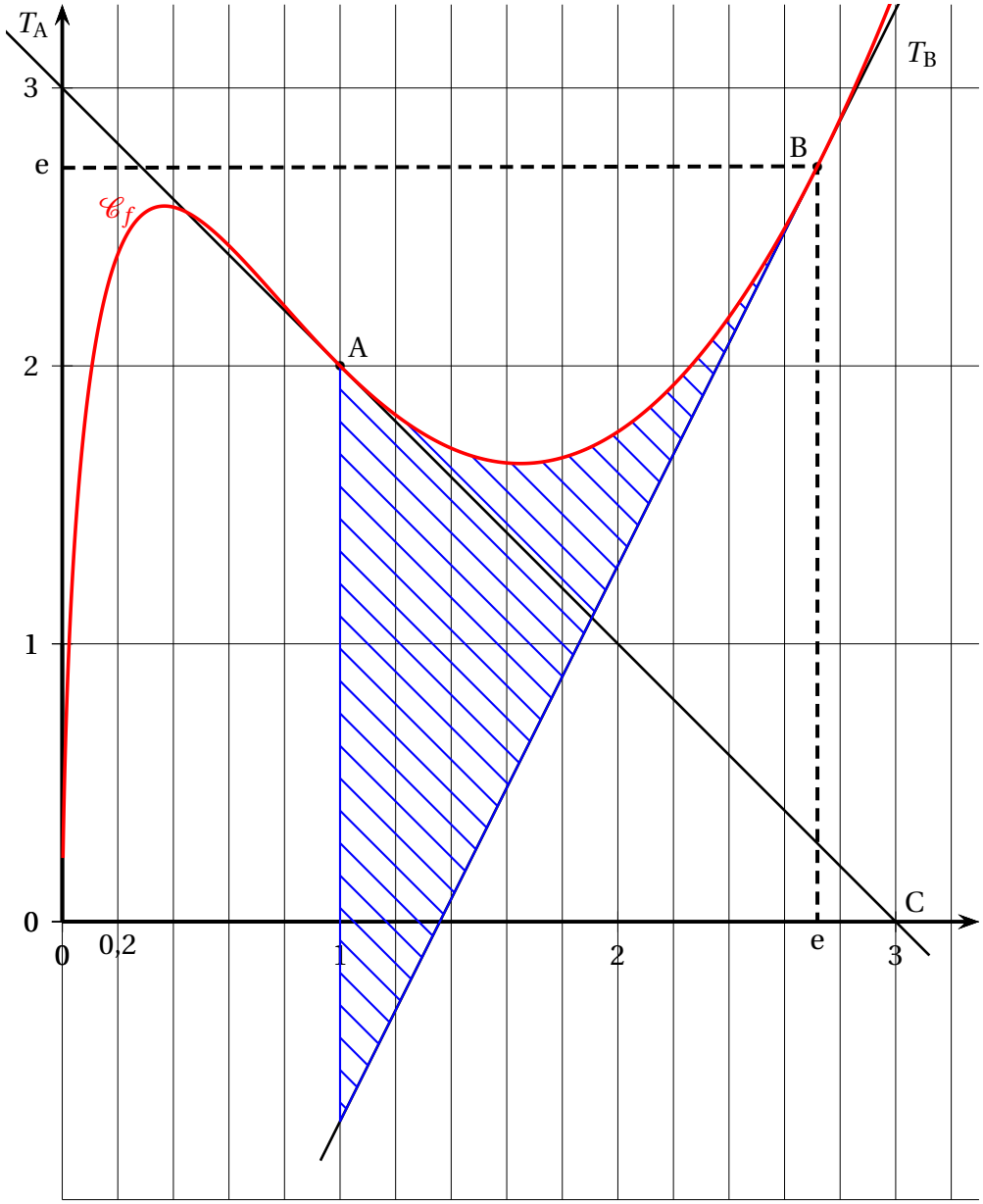
Exercice 10. Métropole 17 juin 2025 - Exercice 2

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]0\,;3]$;
- la droite T_{A},tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A$(1\,;2)$;
- la droite T_{B} tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B$(\text{e}\,;\text{e})$.

On précise par ailleurs que la tangente T_{A} passe par le point C$(3\,;0)$.



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0\,;\,3]$?
3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Partie B : étude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
   En déduire que $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
   On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.
3. On admet que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.
   a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1}{x}(4\ln x + 1)$.
   b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.
   c. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - e$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{e^2+1}{4}.$$
3. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente T_B, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.
   On admet que $\displaystyle\int_1^e x(\ln x)^2\,dx = \frac{e^2-1}{4}$.
   En déduire la valeur exacte de $\mathscr{A}$ en unité d'aire.

Exercice 11. Centres étrangers 12 juin 2025 - Exercice 3

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par
$$f(x) = 4\ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$$
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en -1.
2. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, on a :
$$f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;6{,}5]$.
4. On considère h la fonction définie sur l'intervalle $[2\,;6{,}5]$ par $h(x) = f(x) - x$.
   On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

x	2		$m \approx 2,364$		6,5
$h(x)$	$h(2)$	↗	$M \approx 2,265$	↘	$h(6,5)$

Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2\,;\,6,5]$.

5. On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```
from math import *

def f(x) :
    return 4*log(1+x)-(x**2)/25

def bornes(n) :
    p = 1/10**n
    x = 6
    while f(x)-x > 0 :
        x = x + p
    return (x-p, x)
```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande log(x) renvoie la valeur $\ln x$;
- la commande c∗∗d renvoie la valeur de c^d.

a. Donner les valeurs renvoyées par la commande bornes(2).
On donnera les valeurs arrondies au centième.

b. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,

$$2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 6,5.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.

3. On rappelle que le réel α, défini dans la partie A, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle [2 ; 6,5].
Justifier que $\ell = \alpha$.

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.
   c. Étudier le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   d. Étudier la convexité de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\,;\,+\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1\,;\,2]$.
   b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$.
   c. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g

La fonction g est définie sur $]0\,;\,1]$ par :

$$g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0\,;\,1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. **a.** Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.
   b. On admet le tableau de signes suivant :

x	0		$\dfrac{1}{\alpha}$		1
signe de $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$	‖	$+$	0	$-$	

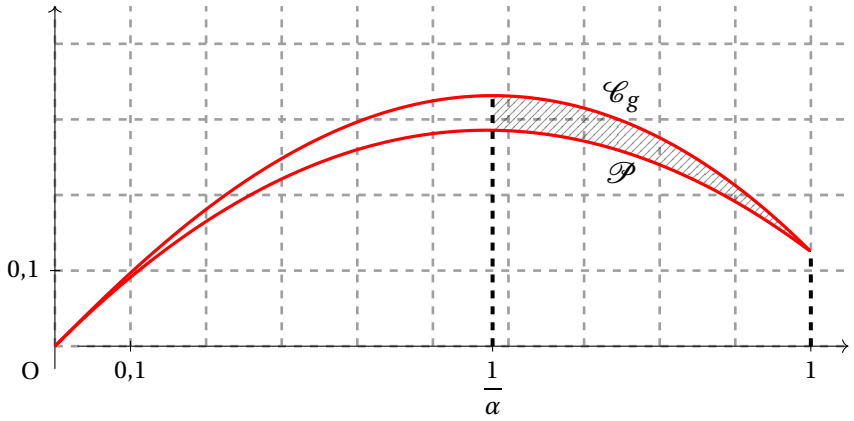
   En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0\,;\,1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

— La courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g ;

— La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -\dfrac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{P}$, et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.
On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

1. **a.** Justifier la position relative des courbes C_g et $\mathscr{P}$ sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.
   b. Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathscr{A}$.

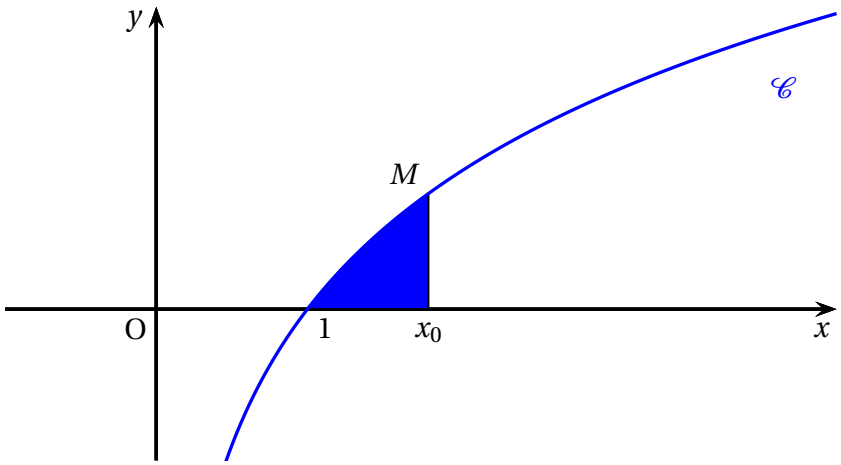
Exercice 13. Amérique du Nord 22 mai 2024 - Exercice 4

Soit a un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

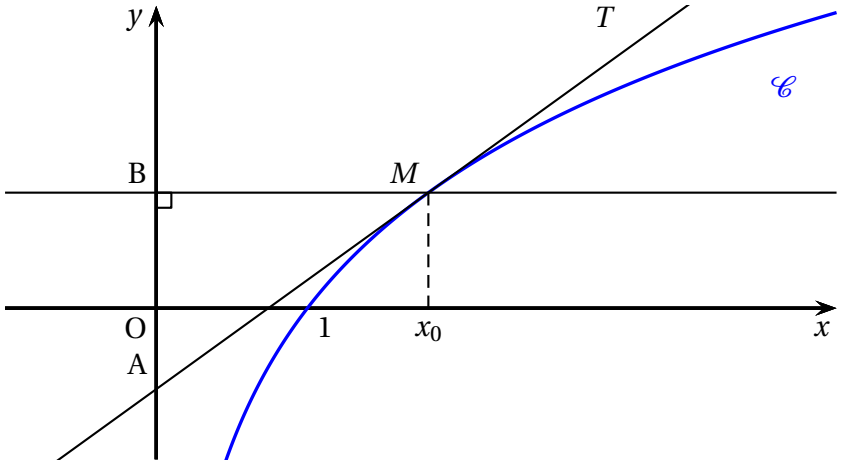
$$f(x) = a\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a[x\ln(x) - x]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire l'aire du domaine bleuté en fonction de a et de x_0.



On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse x_0.
On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



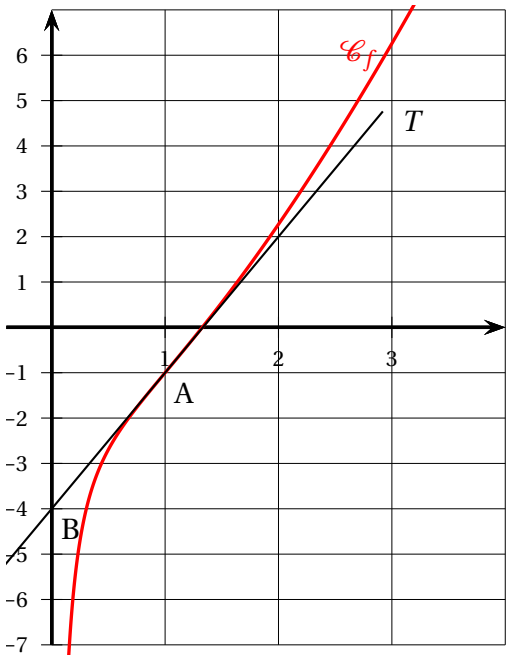
4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera.
Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1\,;\,-1)$.
Cette tangente passe également par le point B$(0\,;\,-4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
   Que semble représenter le point A pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   a. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$

3. **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$