Annales baccalauréat spécialité
Fonction logarithme

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x(2-\ln(x)).$$

On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

PARTIE A : Étude de fonction

1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,\infty[$, on a : $f'(x) = 1-\ln(x)$
   c. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Justifier que $f(x) \leqslant 0$ pour $x \in \left[\mathrm{e}^2;+\infty\right[$.
3. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^2;\mathrm{e}^3\right]$.
   b. Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α au dixième.
   c. Montrer que : $\ln(\alpha) = 2+\dfrac{1}{\alpha}$.

PARTIE B : Étude d'une suite

Le but de cette partie est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;2]$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0,1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$$

2. On admet que la suite (u_n) est croissante. En déduire qu'elle converge.
3. On admet que la limite L de cette suite vérifie l'équation $f(x) = x$.
   Déterminer la valeur L.

PARTIE C : Calcul d'aire

On admet que la fonction f est négative ou nulle sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^2;\alpha\right]$ où α est la valeur définie en **Partie A. 3.**.
On note $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \mathrm{e}^2$ et $x = \alpha$.

1. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que

$$\int_{\mathrm{e}^2}^{\alpha} x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha^2(2\ln\alpha-1)-3\mathrm{e}^4}{4}$$

2. **a.** Justifier que : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^2}^{\alpha} x\ln(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathrm{e}^2}^{\alpha} 2x\,\mathrm{d}x$.
   b. En utilisant le résultat de la question **3. c.** dans la Partie **A**, montrer que

$$\mathscr{A} = \frac{\alpha(2-\alpha)+\mathrm{e}^4}{4}$$

Corrigé

Partie A : étude de fonction

1. Pour tout $x>0$, $f(x)=x(2-\ln(x))=2x-x\ln(x)$.

- Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\ln(x)=-\infty$, par produit on aura $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2. Pour tout $x>0$, $f'(x)=2-\ln(x)+x\times\dfrac{-1}{x}=1-\ln(x)$.

3. Le sens de variation de la fonction f est alors donné par le signe de l'expression $1-\ln(x)$ qui est strictement positive sur $]0;\mathrm{e}[$, strictement négative sur $]\mathrm{e};+\infty[$ et nulle en e. La fonction f est strictement croissante sur $]0;\mathrm{e}[$ et strictement décroissante sur $]\mathrm{e};+\infty[$. On peut résumer par un tableau de variation :

x	0		e		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ 0	↗	$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}$	↘	$-\infty$

4. $f(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}^2(2-\ln(\mathrm{e}^2))=\mathrm{e}^2(2-2)=0$. Comme f est strictement décroissante sur $[\mathrm{e}^2;+\infty[$ (car $\mathrm{e}^2>\mathrm{e}$) et nulle en e^2, on déduit que $f(x)\leqslant 0$ sur l'intervalle $[\mathrm{e}^2;+\infty[$.

5. **a.** $f(\mathrm{e}^3)=\mathrm{e}^3(2-3)=-\mathrm{e}^3<-1$. La fonction continue f est strictement décroissante sur l'intervalle $[\mathrm{e}^2;\mathrm{e}^3]$, sa restriction sur cet intervalle est alors bijective sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^3;0]$ qui contient -1. Il existe donc bien un unique réel $\alpha\in[\mathrm{e}^2;\mathrm{e}^3]$ tel que $f(\alpha)=-1$.

b. À l'aide d'une calculatrice, on obtient l'encadrement au dixième de α :

$$8,3<\alpha<8,4$$

c. $f(\alpha)=-1\iff\alpha(2-\ln(\alpha))=-1\iff 2-\ln(\alpha)=-\dfrac{1}{\alpha}\iff\ln(\alpha)=2+\dfrac{1}{\alpha}$.

Partie B : étude d'une suite

1. Montrons par récurrence sur n que pour tout entier n : $0,1\leqslant u_n\leqslant\mathrm{e}$.

- **condition initiale** : $u_0=0,1\in[0,1;\mathrm{e}]$;
- **hérédité** : si pour un certain entier n, on a $u_n\in[0,1;\mathrm{e}]$, alors :
  Comme f est croissante sur $[0,1;\mathrm{e}]$, $f([0,1;\mathrm{e}])=[f(0,1);f(\mathrm{e})]=[f(0,1);\mathrm{e}]$.
  De plus $f(0,1)=0,1\times(2-\ln(0,1))\approx 0,43$, ce qui établit que $u_{n+1}\in[0,1;\mathrm{e}]$.
  L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai au rang $n\in\mathbb{N}$, il l'est aussi au rang $n+1$
  D'après le principe de récurrence, on a donc montré que pour tout entier n : $0,1\leqslant u_n\leqslant\mathrm{e}$.

2. On admet que la suite (u_n) est croissante. D'après le théorème de convergence dominée ((u_n) est majorée par e), on peut en déduire que la suite (u_n) converge vers un réel L, avec $L\leqslant\mathrm{e}$.

3. On sait aussi que cette limite L est solution de l'équation $f(x)=x$, on en déduit la valeur de L :

$$f(L)=L\iff L=L(2-\ln(L))\iff 2-\ln(L)=1\iff\ln(L)=1\iff L=\mathrm{e}$$

La simplification par L dans la 2^e étape est légitime puisque $L\in[0,1;\mathrm{e}]$ est non nul

Partie C : calcul d'aire

1. Calculons $\int_{\mathrm{e}^2}^{\alpha} x\ln x\,\mathrm{d}x$. Effectuons une intégration par parties en posant :

$$u'(x)=x \qquad v(x)=\ln x$$
$$u(x)=\frac{x^2}{2} \qquad v'(x)=\frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}\int_{e^2}^{\alpha} x\ln x\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2\ln x}{2}\right]_{\mathrm{e}^2}^{\alpha} - \frac{1}{2}\int_{\mathrm{e}^2}^{\alpha} x\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}\right]_{\mathrm{e}^2}^{\alpha}\\ &= \frac{\alpha^2\ln\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{4}-\mathrm{e}^4\times\frac{2}{2}+\frac{\mathrm{e}^4}{4}\\ &= \frac{\alpha^2\ln\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{4}-\mathrm{e}^4+\frac{\mathrm{e}^4}{4}\\ &= \frac{\alpha^2(2\ln\alpha-1)-3\mathrm{e}^4}{4}.\end{aligned}$$

2. **a.** Comme la fonction est négative sur l'intervalle $[\mathrm{e}^2;\alpha]$, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x=\mathrm{e}^2$ et $x=\alpha$ est égale à :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= -\int_{\mathrm{e}^2}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_{\mathrm{e}^2}^{\alpha}(2x-x\ln x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathrm{e}^2}^{\alpha} x\ln x\,\mathrm{d}x-\int_{\mathrm{e}^2}^{\alpha}2x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

b. Utilisons la relation $\ln\alpha=2+\dfrac{1}{\alpha}$ établie en **A.3.c** :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \frac{\alpha^2(2\ln\alpha-1)-3\mathrm{e}^4}{4}-\left[x^2\right]_{\mathrm{e}^2}^{\alpha}\\ &= \frac{\alpha^2(2\ln\alpha-1)-3\mathrm{e}^4-4\alpha^2+4\mathrm{e}^4}{4}\\ &= \frac{\alpha^2\left(4+\dfrac{2}{\alpha}-1\right)+\mathrm{e}^4-4\alpha^2}{4}\\ &= \frac{2\alpha-\alpha^2+\mathrm{e}^4}{4}\\ &= \frac{\alpha(2-\alpha)+\mathrm{e}^4}{4}\end{aligned}$$

Exercice 2.

On considère la fonction f_k définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_k(x) = 1 - x + \frac{k(1+\ln x)}{x}$$

où k est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme népérien.

On désigne par $\mathscr{C}_k$ la représentation graphique de la fonction f_k dans un repère orthonormé.

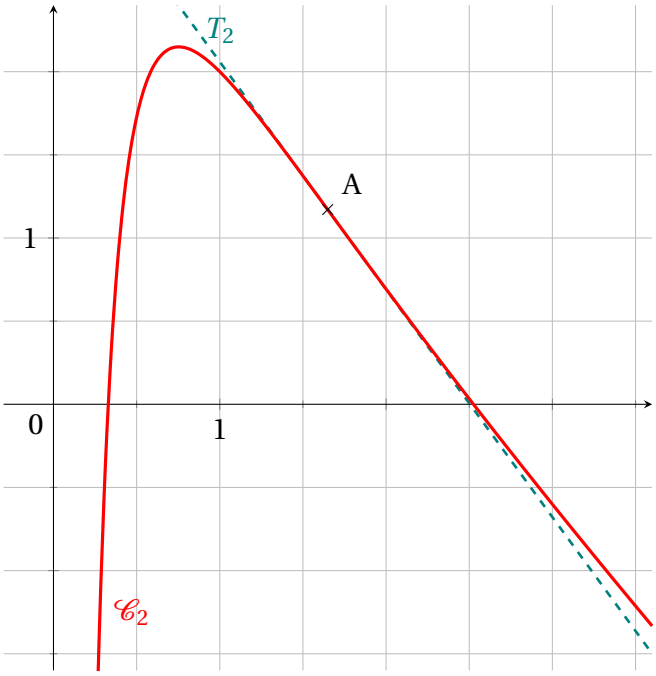
On admet que la fonction f_k est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

On note f_k' sa dérivée première et f_k'' sa dérivée seconde.

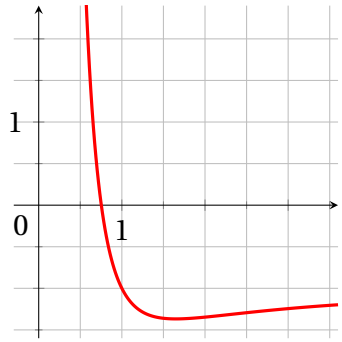
Partie A : étude d'un premier cas particulier

Dans cette partie, on se place dans le cas $k = 2$.
La courbe $\mathscr{C}_2$ est représentée sur le graphique ci-dessous.
On précise que :

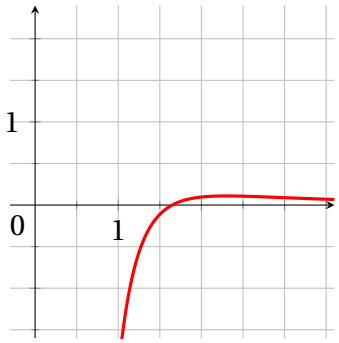
- Le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_2$;
- T_2 est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point A.



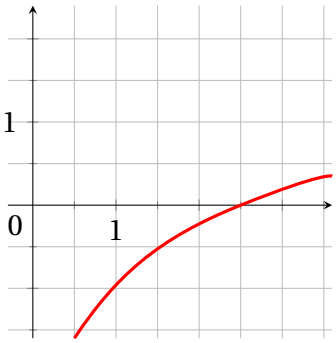
1. On considère une primitive F_2 de la fonction f_2 sur $]0;+\infty[$.
   Avec la précision permise par le graphique, donner les variations de la fonction F_2 sur l'intervalle $]0;3]$.
2. Parmi les trois courbes ci-dessous, indiquer celle qui représente f_2' et celle qui représente f_2''.
   Justifier.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

Partie B : étude d'un second cas particulier

Dans cette partie on se place dans le cas $k = 1$.

On considère la fonction f_1 définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_1(x) = 1 - x + \frac{1+\ln x}{x}$$

1. a. Montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$f_1'(x) = -1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

b. Déterminer la limite de $f_1'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. On admet que :

- l'axe des ordonnées est une asymptote de la courbe de f_1' ;
- pour tout réel $x > 0$, $\quad f_1''(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x^3}$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de f_1' sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f_1'	‖	$+\infty$	$\searrow$	$-1-\dfrac{1}{2e}$	$\nearrow$ -1

a. Justifier les variations de la fonction f_1' sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et la valeur de l'extremum.

b. Justifier la limite de la fonction f_1' en 0.

c. Montrer qu'il existe une unique solution α à l'équation $\quad f_1'(x) = 0 \quad$ sur $]0;+\infty[$.

En déduire que f_1 admet un maximum sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

d. Recopier et compléter les pointillés du programme écrit en langage Python ci-dessous, afin qu'il renvoie une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution α de l'équation $\quad f_1'(x) = 0 \quad$ sur $]0;+\infty[$.

```
def d(x) :
  return -1-ln(x)/x**2

def alpha() :
  u = 0.5
  while d(u) ... 0 :
    u = ...
  return u
```

On rappelle que x**2 désigne x^2.

Partie C : k quelconque

On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$,

et la fonction H définie sur $]0;+\infty[$ par $H(x) = \dfrac{1}{2}(1+\ln x)^2$.

On admet que H est dérivable sur $]0;+\infty[$.

1. Montrer que la fonction H est une primitive de h.

On rappelle que k est un réel strictement positif et que f_k est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_k(x) = 1 - x + \frac{k(1+\ln x)}{x}$$

2. Existe-t-il une valeur de k pour laquelle la valeur moyenne de la fonction f_k sur l'intervalle $[1;\mathrm{e}]$ est égale à 0 ?

Justifier.

Corrigé

Partie A : étude d'un premier cas particulier

1. F_2 est une primitive de la fonction f_2 sur $]0;+\infty[$ donc f_2 est la dérivée de la fonction F_2.

Les variations de la fonction F_2 sont donc données par le signe de la fonction f_2.

Avec la précision permise par le graphique :

x	0		0,3		2,5		3
signe de $f_2(x)$	‖	−	0	+	0	−	
variations de F_2	‖	↘		↗		↘	

La fonction F_2 est décroissante sur l'intervalle $]0;0,3]$ et sur l'intervalle $[2,5;3]$, et elle est croissante sur l'intervalle $[0,3;2,5]$.

2. La courbe 1 représente la fonction f_2' et la courbe 2 représente la fonction f_2'' :

La dérivée de la fonction f_2 doit s'annuler lorsque la fonction f_2 admet un maximum. Ce maximum est atteint pour $x \approx 0,75$.

La seule courbe qui s'annule aux environs de 0,75 est la courbe 1 donc la courbe 1 représente la fonction f_2'.

Le point A est un point d'inflexion pour la courbe de la fonction f_2 donc la dérivée seconde s'annule en $x_A \approx 1,6$.

La seule courbe qui s'annule aux environs de 1,6 est la courbe 2 donc la courbe 2 représente la fonction f_2''.

Partie B : étude d'un second cas particulier

1. a. f_1 est de la forme $w+\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} w(x)=1-x \\ u(x)=1+\ln(x) \\ v(x)=x \end{cases}$. On a : $\begin{cases} w'(x)=-1 \\ u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ v'(x)=1 \end{cases}$.

On a : $f_1'=w'+\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

Donc, pour tout réel $x>0$:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= -1+\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\left(1+\ln(x)\right)}{x^2} \\ &= -1+\frac{1-1-\ln(x)}{x^2} \\ &= -1-\frac{\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

On a bien, pour tout réel $x>0$, $\quad f_1'(x)=-1-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

b. Pour tout réel $x>0$, $\quad f_1'(x)=-1-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1'(x)=-1$.

2. a. Pour tout réel $x>0$, $\quad f_1''(x)=\dfrac{2\ln x-1}{x^3}$.

$x>0$ donc $x^3>0$ donc $f_1''(x)$ est du signe de $2\ln(x)-1$.

$$\begin{aligned} 2\ln(x)-1>0 &\iff 2\ln(x)>1 \\ &\iff \ln(x)>\frac{1}{2} \\ &\iff x>\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \quad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante} \end{aligned}$$

De plus $f_1'\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)=-1-\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)^2}$

$$\begin{aligned} &= -1-\frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^1} \\ &= -1-\frac{1}{2\mathrm{e}} \end{aligned}$$

On a donc :

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
signe de $f_1''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f_1'	‖	↘	$-1-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$	↗	

b. Pour tout réel $x>0$, $\quad f_1'(x)=-1-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+}-\ln(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to0^+}x^2=0^+ \end{cases}$ donc, par quotient et somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=+\infty$.

c. Sur l'intervalle $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$:

La fonction f_1' est continue (car dérivable) et strictement décroissante.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1'(x) = +\infty > 0$ et $f_1'\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = -1 - \dfrac{1}{2\,\mathrm{e}} < 0$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_1'(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$

Sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$, la fonction f_1' est strictement croissante et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1'(x) = -1$

donc, pour tout réel $x > \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$, $\quad f_1'(x) < -1 < 0$.

Donc l'équation $f_1'(x) = 0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$.

Finalement, il existe une unique solution α à l'équation $\quad f_1'(x) = 0 \quad$ sur $]0;+\infty[$.

On peut donc en déduire le signe de f_1' et les variations de f_1 sur cet intervalle :

x	0		α		$+\infty$
signe de $f_1(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f_1	‖	↗		↘	

f_1 admet donc un maximum atteint pour $x = \alpha$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

d. Le programme écrit en langage Python renvoyant une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution α de l'équation $\quad f_1'(x) = 0 \quad$ sur $]0;+\infty[$ est :

```
def d(x) :
    return -1-ln(x)/x**2

def alpha() :
    u = 0.5
    while d(u)  > 0 :
        u = u + 0.01
    return u
```

Partie C : *k* quelconque

1. H est dérivable sur $]0;+\infty[$

H est de la forme $\dfrac{1}{2}u^2$ avec $u(x) = 1+\ln(x)$. On a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.

On a $H' = \dfrac{1}{2} \times 2u'u$

Donc pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{1}{x} \times (1+\ln(x)) \\ &= \frac{1+\ln x}{x} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction H est une primitive de h sur $]0;+\infty[$.

2. La valeur moyenne de la fonction f_k sur l'intervalle $[1;\mathrm{e}]$ est égale à $\mu = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\mathrm{e}} f_k(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\mathrm{e}} \left(1-x+\frac{k(1+\ln x)}{x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\mathrm{e}} (1-x+kh(x))\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\left[x-\frac{x^2}{2}+kH(x)\right]_1^{\mathrm{e}}\\
&= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\left(\left(\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}^2}{2}+kH(\mathrm{e})\right)-\left(1-\frac{1^2}{2}+kH(1)\right)\right)\\
&= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\left(\left(\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}^2}{2}+k\frac{1}{2}(1+\ln \mathrm{e})^2\right)-\left(1-\frac{1^2}{2}+k\frac{1}{2}(1+\ln 1)^2\right)\right)\\
&= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\left(\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}^2}{2}+k\frac{(1+1)^2}{2}-1+\frac{1}{2}-k\frac{(1+0)^2}{2}\right)\\
&= \frac{2\mathrm{e}-\mathrm{e}^2+4k-2+1-k}{2(\mathrm{e}-1)}\\
&= \frac{2\mathrm{e}-\mathrm{e}^2+3k-1}{2(\mathrm{e}-1)}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\mu = 0 \iff 2\mathrm{e}-\mathrm{e}^2+3k-1=0 \iff k=\frac{-2\mathrm{e}+\mathrm{e}^2+1}{3} \iff k=\frac{(\mathrm{e}-1)^2}{3}.$$

La valeur moyenne de la fonction f_k sur l'intervalle $[1;\mathrm{e}]$ est nulle si est seulement si $k=\dfrac{(\mathrm{e}-1)^2}{3}$

Exercice 3.

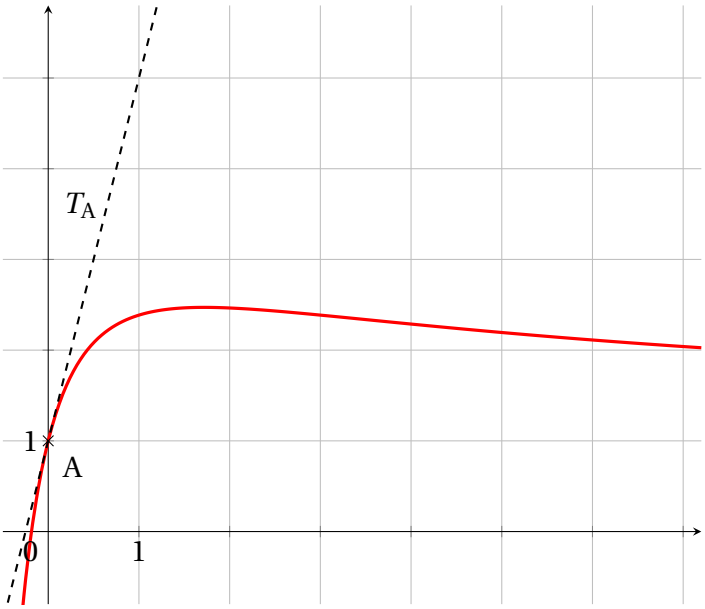
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = a + \frac{b\ln(x+1)}{x+1}.$$

où a et b sont des réels, et ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]-1;+\infty[$.
On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

L'objectif de cette partie est de déterminer les valeurs de a et b de sorte que la courbe représentative de la fonction f sur $]-1;+\infty[$ corresponde à celle tracée dans le repère orthonormé ci-dessous :



On précise que la droite T_A est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point A$(0;1)$.

1. Justifier que $a = 1$.
2. En utilisant le graphique :
   a. Donner la valeur de $f'(0)$.
   Justifier.
   b. Donner le signe de $f''(1)$.
   Justifier.
3. a. Montrer que pour tout réel x appartenant à $]-1;+\infty[$, on a :
$$f'(x) = \frac{b(1-\ln(x+1))}{(x+1)^2}$$
   b. En déduire la valeur de b.

Partie B

On admet dans la suite de l'exercice que la fonction f est définie sur $]-1;+\infty[$ par :
$$f(x) = 1 + \frac{4\ln(x+1)}{x+1}$$

1. Justifier que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f.
2. Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x+1) > 0$ sur $]-1;+\infty[$.
3. On admet que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$.
   Dresser le tableau de variation complet de la fonction f en indiquant la valeur exacte de son extremum.
   Justifier.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2;+\infty[$.
   En donner une valeur arrondie à 10^{-1}.

5. **a.** Montrer que :

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(\ln 3\big)^2.$$

b. En déduire l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

Corrigé

Partie A

1. D'après l'énoncé, le point A$(0;1)$ est sur la courbe représentative de f.

On a donc : $f(0) = 1 \iff a + \dfrac{b\ln(0+1)}{0+1} = 1$

$\iff a + \dfrac{b\ln(1)}{1} = 1$

$\iff a = 1 \quad$ car $\ln(1) = 0$

On a donc bien $a = 1$.

2. **a.** La valeur de $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0, c'est-à-dire de la tangente T_A.

Cette tangente passe par A et par B$(1;5)$.

Son coefficient directeur est donc : $\dfrac{5-1}{1-0} = 4$.

On a donc $f'(0) = 4$.

b. Sur l'intervalle $[0;2]$, au moins, la fonction f est manifestement concave.

Ainsi, on aura f'' à valeurs négatives sur au moins $[0;2]$.

Notamment, on a $f''(1)$ négatif.

3. **a.** f est dérivable sur son ensemble de définition.

Soit x appartenant à $]-1;+\infty[$:

On peut dire que : $x \longmapsto \ln(x+1)$ a pour dérivée, par composition : $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$.

Ainsi pour x appartenant à $]-1;+\infty[$:

$$f'(x) = 0 + \frac{b \times \dfrac{1}{x+1} \times (x+1) - 1 \times b\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{b - b\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{b\big(1-\ln(x+1)\big)}{(x+1)^2}$$

b. D'après la question **2. a.**, on a $f'(0) = 4$.

$f'(0) = 4 \iff \dfrac{b\big(1-\ln(0+1)\big)}{(0+1)^2} = 4$

$\iff \dfrac{b\big(1-\ln(1)\big)}{1^2} = 4$

$\iff b(1-0) = 4$

$\iff b = 4$

On en déduit que $b = 4$.

Partie B

1. D'après la propriété des croissances comparées : $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\ln(y)}{y} = 0$.

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ donc, avec $y = x+1$, par composition, on en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$.

Par limite de la somme et du produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+4\times\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 1+4\times 0 = 1$.

f a une limite finie égale à 1, quand x tend vers $+\infty$.

Par définition, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

2. Résolvons : $1-\ln(x+1) > 0 \iff 1 > \ln(x+1)$

$\iff \mathrm{e}^1 > x+1$ car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\iff \mathrm{e}-1 > x$

Sur $]-1;+\infty[$, l'ensemble des solutions de l'équation est $]-1;\mathrm{e}-1[$.

3. On a les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, l'une calculée à la question **1.**, l'autre admise.

D'après la question **3. a.** de la **partie A**, on a, pour tout x réel strictement supérieur à 1 :

$f'(x) = \dfrac{4\big(1-\ln(x+1)\big)}{(x+1)^2} = \dfrac{4}{(x+1)^2}\times\big(1-\ln(x+1)\big)$.

Or : $\forall x\in]-1;+\infty[,\quad \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0$

Pour tout x strictement supérieur à 1, le signe du nombre dérivé $f'(x)$ est donc donné par le signe de l'expression $1-\ln(x+1)$.

On a établi ce signe à la question précédente.

Le changement de variations de f interviendra donc pour $x = \mathrm{e}-1$.

$f(\mathrm{e}-1) = 1+\dfrac{4\ln(\mathrm{e}-1+1)}{\mathrm{e}-1+1} = 1+\dfrac{4\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = 1+\dfrac{4}{\mathrm{e}} = 1+4\mathrm{e}^{-1}$.

On a donc le tableau de variation complet de la fonction f :

x	-1		$\mathrm{e}-1$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $-\infty$	↗	$1+4\mathrm{e}^{-1}$	↘	1

4. e est inférieur à 3, donc $\mathrm{e}-1$ est inférieur à 2 (on a : $\mathrm{e}-1\approx 1{,}72$).

Sur l'intervalle $[2;+\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante.

De plus 1,5 est une valeur intermédiaire entre $f(2) = 1+\dfrac{4\ln(3)}{3}\approx 2{,}46$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

D'après le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones (dit aussi théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2;+\infty[$.

À la calculatrice, on obtient 25,1 comme valeur approchée arrondie à 10^{-1} de cette solution.

5. **a.** Posons u définie sur $]-1;+\infty[$ par : $u : x \longmapsto \ln(x+1)$.

On a : $u' : x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$.

On reconnaît donc, pour tout x dans $[0;2]$: $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = \ln(x+1) \times \dfrac{1}{x+1} = u(x) \times u'(x)$.

On en déduit : $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\big(\ln(x+1)\big)^2\right]_0^2$

$$= \left(\frac{1}{2}\big(\ln(2+1)\big)^2\right) - \left(\frac{1}{2}\big(\ln(0+1)\big)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\big(\ln 3\big)^2 - \frac{1}{2}\big(\ln 1\big)^2$$

$$= \frac{1}{2}\big(\ln 3\big)^2 \quad \text{car } \ln(1) = 0$$

b. Comme la fonction f est une fonction continue et positive sur $[0;2]$, l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$ correspond à : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(1 + \frac{4\ln(x+1)}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$= \int_0^2 1\,\mathrm{d}x + 4\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

$$= 2 + 4 \times \frac{1}{2}\big(\ln 3\big)^2 \quad \text{d'après la question précédente}$$

$$= 2 + 2\big(\ln 3\big)^2$$

En unité d'aire, l'aire demandée est donc $2 + 2\big(\ln 3\big)^2$

Exercice 4.

Partie A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[2;+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(3x^2 + 2x\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[2;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

2. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[2;+\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - x$$

On admet que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

b. Donner la valeur de α arrondie au centième.

c. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, les réponses pourront s'appuyer sur les résultats de la **partie A**.
On définit une suite (a_n) par son premier terme $a_0 > 0$ et pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \ln\left(3{a_n}^2 + 2a_n\right)$$

On étudie le cas où $2 \leqslant a_0 \leqslant \alpha$, où α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$.

2. Démontrer que la suite (a_n) est croissante.

3. Démontrer que la suite (a_n) converge.

4. Démontrer que la limite de la suite (a_n) est α.

Partie C

Dans cette partie, on prend $a_0 = 2$.
La suite (a_n) est ainsi définie par $a_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \ln\left(3{a_n}^2 + 2a_n\right)$$

On note (b_n) la suite définie par $b_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$b_{n+1} = \ln\left(3{b_n}^2 + 2b_n\right)$$

On admet que la suite (b_n) est strictement décroissante et qu'elle converge vers α.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $a_n \leqslant b_n$.

2. On considère le script ci-dessous écrit en langage Python.

```
from math import *
def algo(p):
  a = 2
  b = 10
  n = 0
  while b - a > 10**(-p):
    a = log(3*a**2 + 2*a)
    b = log(3*b**2 + 2*b)
    n = n + 1
  return (n,a)
```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande `log(c)` renvoie la valeur de $\ln(c)$;
- la commande `a**2` renvoie la valeur de a^2.

a. Donner les valeurs renvoyées par l'instruction `algo(2)`.
On arrondira si besoin les valeurs au millième.

b. Interpréter les valeurs renvoyées dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

Partie A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[2;+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(3x^2+2x\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[2;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminons la dérivée de la fonction f.

f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = 3x^2+2x$, on a donc $u'(x) = 3\times 2x+2 = 6x+2$.

La dérivée de $\ln(u)$ est $\dfrac{u'}{u}$ donc pour tout réel x de l'intervalle $[2;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{6x+2}{3x^2+2x}$.

$\forall x \in [2;+\infty[$, $\quad 6x+2>0$ et $3x^2+2x>0$ donc $f'(x)>0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

2. a. Sur l'intervalle $[2;+\infty[$, la fonction g est continue (car dérivable) et strictement décroissante.

De plus, $g(2) = \ln(3\times 2^2+2\times 2)-2 = \ln(16)-2>0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty < 0$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

Remarque : $g(\alpha)=0 \implies f(\alpha)-\alpha=0 \implies f(\alpha)=\alpha$.

b. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 4,05$.

c. La fonction g étant strictement décroissante sur $[2;+\infty[$ et s'annulant en α, on a le tableau de signes suivant :

x	2		α		$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

1. Pour tout entier naturel non nul n, posons P_n l'affirmation : « $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$ ».

Démontrons par récurrence que les affirmations P_n sont toutes vraies.

- **Initialisation :** Par hypothèse $2 \leqslant a_0 \leqslant \alpha$

  Donc que l'affirmation P_0 est vraie.
- **Hérédité :** Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est à dire $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$ »., montrons que l'affirmation P_{n+1} est vraie, c'est à dire $2 \leqslant a_{n+1} \leqslant \alpha$ ».

  P_n est vraie $\implies 2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$

  $\implies f(2) \leqslant f(a_n) \leqslant f(\alpha)$ car la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$

  $\implies \ln(16) \leqslant a_{n+1} \leqslant \alpha$ car $f(\alpha)=\alpha$ et par définition de la suite (a_n)

  $\implies 2 \leqslant a_{n+1} \leqslant \alpha$ car $\ln(16) \approx 2,77$

  $\implies P_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :** On a montré que l'affirmation P_0 est vraie, et que pour un n entier naturel non nul, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.

  En vertu du principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel non nul n, l'affirmation est vraie, et donc pour tout entier naturel n, on a $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$.

2. Soit n un entier naturel quelconque :

$a_{n+1}-a_n = f(a_n)-a_n = g(a_n)$.

Or, d'après la question précédente $a_n \in [2\,;\,\alpha]$ et on a démontré dans la partie A, que la fonction g est positive sur cet intervalle,

donc $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$

donc la suite (a_n) est croissante.

3. On a montré que la suite (a_n) est majorée par α et qu'elle est croissante, elle est donc convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant \alpha$.

4. La suite (a_n) est définie par une relation de récurrence $a_{n+1} = f(a_n)$ avec f une fonction continue.

De plus, la suite (a_n) est convergente vers une limite ℓ.

D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est donc solution de l'équation $f(x) = x$ soit de l'équation $g(x) = 0$.

D'après la partie A, cette équation admet une unique solution α donc $\ell = \alpha$.

Partie C

1. Dans la partie B, on a montré que pour tout entier naturel n, $a_n < \alpha$.

On sait que la suite (b_n) est strictement décroissante et qu'elle converge vers α donc pour tout entier naturel n, $\alpha \leqslant b_n$

Donc pour tout entier naturel n, on a $\quad a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$ d'où $a_n \leqslant b_n$.

2. **a.** L'instruction `algo(2)` renvoie : $(9, 4.04)$ arrondi au millième

b. Cette algorithme calcule les termes successifs des suites (a_n) et (b_n) jusqu'à ce que $b_n - a_n \leqslant 10^{-p}$. Il renvoie donc le 1er rang i pour lequel $b_n - a_n \leqslant 10^{-p}$ ainsi que le terme a_i

Le premier rang pour lequel on aura $a_n - b_n \leqslant 10^{-2}$ est donc 9 et $a_9 \approx 4,04$.

Exercice 5.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0;+\infty[$.

b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Pour tout réel strictement positif x, démontrer que

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs exactes des éventuels extremums de la fonction.

4. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ, tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

5. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, on a

$$f''(x) = \frac{-5+6\ln(x)}{x^4}$$

6. **a.** Étudier la convexité de la fonction f en précisant les coordonnées des éventuels points d'inflexion.

   b. En déduire que, pour tout réel x appartenant à $\left]0; \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$, on a

$$x - 1 \geqslant \frac{\ln(x)}{x^2}$$

7. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $\left[\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}; +\infty\right[$, on a aussi

$$x - 1 \geqslant \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Partie B

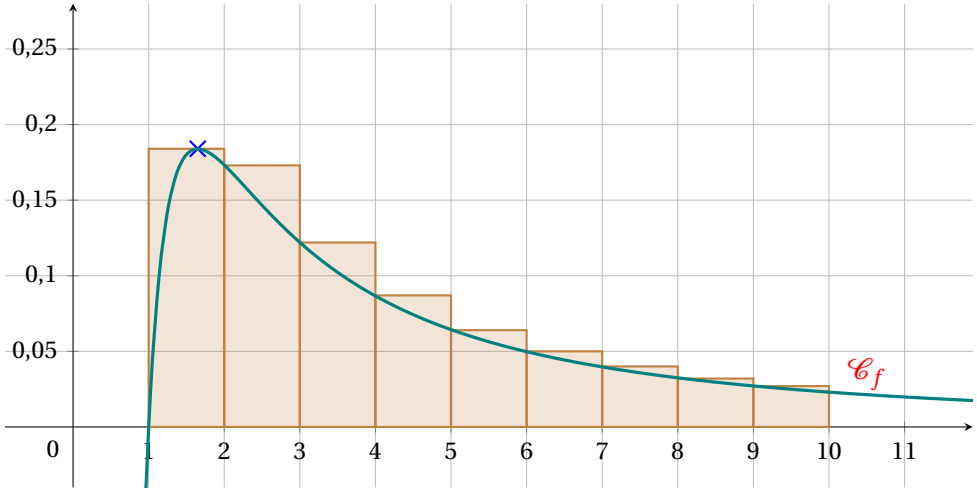
On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel non nul n, par :

$$I_n = \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. Donner une interprétation graphique de I_n pour n un entier naturel non nul.

2. Démontrer que la suite (I_n) est croissante.

3. On souhaite calculer une approximation de $\displaystyle\int_1^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ en déterminant la somme des aires des rectangles tracés dans le graphique ci-dessous.



Pour cela, on utilise le script suivant, écrit en langage Python.

```
from math import *

S=1/(2*exp(1))
for i in range (2,10):
  S =...
print(S)
```

Recopier et compléter ce script afin qu'il réponde au problème posé.

4. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$I_n = \frac{n-1-\ln(n)}{n}$$

5. Calculer la limite de la suite (I_n) quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé

Partie A

1. **a.**
- Limite en 0^+ :
$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0^+ \end{cases}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.
- Limite en $+\infty$:
Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$

b. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
donc la droite d'équation $x = 0$, c'est à dire l'axe des ordonnées, est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$
donc la droite d'équation $y = 0$, c'est à dire l'axe des abscisses, est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2. Pour tout réel strictement positif x, $f(x) = \ln(x) \times x^{-2}$.
f est de la forme $u \times v$ avec $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v(x) = x^{-2} \end{cases}$.
On a : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = -2x^{-3} \end{cases}$.
$f' = u'v + v'u$ donc pour tout réel strictement positif x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \times x^{-2} + \ln(x) \times (-2x^{-3}) \\ &= \frac{1}{x} \times 1x^2 - \ln(x) \times \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{1}{x^3} - \frac{2\ln(x)}{x^3} \\ &= \frac{1-2\ln(x)}{x^3} \end{aligned}$$

3. x est strictement positif donc x^3 aussi donc $f'(x)$ est du signe de $1-2\ln(x)$.

$$\begin{aligned} 1-2\ln(x)>0 &\iff 1>2\ln(x)\\ &\iff 1>\ln(x^2)\\ &\iff \mathrm{e}>x^2\\ &\iff \sqrt{\mathrm{e}}>x \quad \text{car } x>0 \end{aligned}$$

$f(\sqrt{\mathrm{e}})=\dfrac{\ln(\sqrt{\mathrm{e}})}{\sqrt{\mathrm{e}}^2}=\dfrac{\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

Le tableau de variations est donc :

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $-\infty$	↗	$\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$	↘	0

4. L'équation réduite de la droite Δ, tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Pour $a=1$:

$f'(1)=\dfrac{1-2\ln(1)}{1^3}=\dfrac{1-2\times 0}{1}=1$ et $f(1)=\dfrac{\ln(1)}{1^2}=\dfrac{0}{1}=0$.

Donc : $y=1(x-1)+0$ soit $y=x-1$.

L'équation réduite de la droite Δ, tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est : $y=x-1$.

5. Pour tout réel strictement positif x, $f'(x)=(1-2\ln(x))\times x^{-3}$.

f' est de la forme $g\times h$ avec $\begin{cases} g(x)=1-2\ln(x)\\ h(x)=x^{-3}\end{cases}$.

On a : $\begin{cases} g'(x)=0-2\times\dfrac{1}{x}\\ h'(x)=-3x^{-4}\end{cases}$.

$f''=g'h+h'g$ donc pour tout réel strictement positif x :

$$\begin{aligned} f''(x)&=\frac{-2}{x}\times x^{-3}+(1-2\ln(x))\times(-3x^{-4})=\frac{-2}{x}\times 1x^3-(1-2\ln(x))\times\frac{3}{x^4}\\ &=\frac{-2}{x^4}-\frac{3(1-2\ln(x))}{x^4}=\frac{-2-3+6\ln(x)}{x^4}=\frac{-5+6\ln(x)}{x^4}\end{aligned}$$

On a bien, pour tout réel strictement positif x, $f''(x)=\dfrac{-5+6\ln(x)}{x^4}$.

6. **a.** Pour étudier la convexité de la fonction f, il faut étudier le signe de la dérivée seconde.

Sur $]0;+\infty[$, $x^4>0$ donc $f''(x)$ est du signe de $-5+6\ln(x)$.

$$\begin{aligned} -5+6\ln(x)>0 &\iff 6\ln(x)>5\\ &\iff \ln(x)>\frac{5}{6}\\ &\iff x>\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\end{aligned}$$

On a donc :

$f''(x)$ est négatif sur $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$ et positif sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{5}{6}};+\infty\right[$.

donc f est concave sur $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$ et convexe sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{5}{6}};+\infty\right[$.

f'' s'annule en changeant de signe en $e^{\frac{5}{6}}$ et $f\left(e^{\frac{5}{6}}\right) = \dfrac{\ln\left(e^{\frac{5}{6}}\right)}{e^{\frac{5}{6}2}} = \dfrac{\frac{5}{6}}{e^{\frac{10}{6}}} = \dfrac{5}{6e^{\frac{5}{3}}}$

Donc le point $\left(e^{\frac{5}{6}}; \dfrac{5}{6e^{\frac{5}{3}}}\right)$ est un point d'inflexion pour f.

b. f est concave sur $\left]0; e^{\frac{5}{6}}\right]$ donc, sur cet intervalle, la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de ces tangentes, en particulier, en dessous de la tangente au point A (car $0 < 1 < e^{\frac{5}{6}}$).

Donc pour tout réel x appartenant à $\left]0; e^{\frac{5}{6}}\right]$:

$f(x) \leqslant x-1 \iff \dfrac{\ln(x)}{x^2} \leqslant x-1$

7. Donc pour tout réel x appartenant à $\left]0; e^{\frac{5}{6}}\right]$:

- Pour tout réel x appartenant à $\left]0; e^{\frac{5}{6}}\right]$: $f(x) \leqslant x-1$ et donc, en particulier, $f\left(e^{\frac{5}{6}}\right) \leqslant e^{\frac{5}{6}} - 1$.
- $e^{\frac{5}{6}} > e^{\frac{1}{2}}$ et f est décroissante sur $[\sqrt{e}; +\infty[$ donc pour tout $x \geqslant e^{\frac{5}{6}}$, $f(x) \leqslant f\left(e^{\frac{5}{6}}\right)$
- Pour tout $x \geqslant e^{\frac{5}{6}}$, $x-1 \geqslant e^{\frac{5}{6}} - 1$

Pour tout $x \geqslant e^{\frac{5}{6}}$, on a donc : $x-1 \geqslant e^{\frac{5}{6}} - 1 \geqslant f\left(e^{\frac{5}{6}}\right) \geqslant f(x)$

Soit $x-1 \geqslant \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

Partie B

1. Pour tout entier naturel non nul n :

- $1 \leqslant n$
- Sur l'intervalle $[1; n]$, $\ln(x) \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 1$ donc $f(x) \geqslant 0$

donc I_n est égale à l'aire, en unité d'aire, de la surface délimitée par :

- la courbe $\mathscr{C}_f$;
- l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations $x = 1$ et $x = n$.

2. Soit n un entier naturel non nul.

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx - \int_1^{n} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx + \int_n^{1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$$
$$= \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

Or, sur l'intervalle $[1; +\infty[$, $f(x) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx \geqslant 0$ soit $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$.

La suite (I_n) est donc croissante.

3. On souhaite calculer une approximation de $\displaystyle\int_1^{10} f(x)\,dx$ en déterminant la somme des aires des rectangles tracés dans le graphique.

Soit i un entier compris entre 1 et 9.

Le i-ème rectangle a pour largeur 1 et pour hauteur le maximum de $f(x)$ pour $x \in [i; 1+1]$

Le premier rectangle a pour aire : $1 \times f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$

ce qui est déjà stocké dans la variable S par la ligne : `S = 1 /(2 * exp(1))`

Pour les rectangles suivants, la fonction f étant décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$, la hauteur sera $f(i)$ soit $\dfrac{\ln(i)}{i^2}$

Pour i allant de 2 à 9, il faut donc rajouter à S, la valeur du i-ème rectangle soit $\dfrac{\ln(i)}{i^2}$.

Remarque : en langage Python la commande log(c) renvoie la valeur de $\ln(c)$.

Le programme complété est donc :

```
from math import *

S=1/(2*exp(1))
for i in range (2,10):
  S = S + log(i)/(i**2)
print(S)
```

4. $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$

Ce qui implique : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{-1}{x} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $[1;n]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[1;n]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$

d'où $I_n = \left[\dfrac{-1}{x}\times\ln(x)\right]_1^n - \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\times\frac{-1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{n}\times\ln(n) - \frac{-1}{1}\times\ln(1) - \int_1^n \frac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{-\ln(n)}{n} - \left[\dfrac{1}{x}\right]_1^n = -\dfrac{\ln(n)}{n} - \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{1}\right) = -\dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{n}{n}$

$= \dfrac{-\ln(n) - 1 + n}{n}$

pour tout entier naturel non nul n on a donc bien : $I_n = \dfrac{n-1-\ln(n)}{n}$.

5. $I_n = \dfrac{n-1-\ln(n)}{n} = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{\ln(n)}{n}$

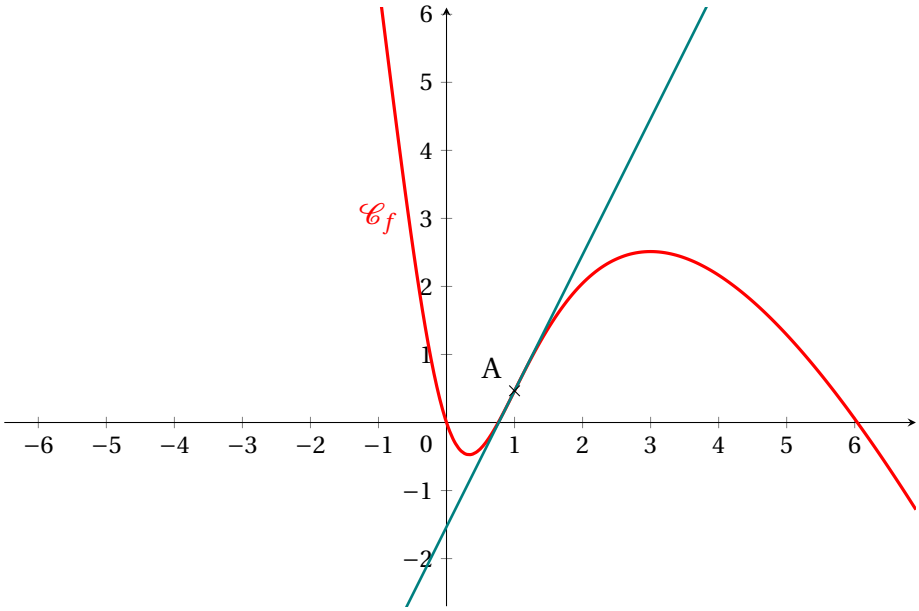
$\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \text{Par croissances comparées, } \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0 \end{cases}$ donc, par somme, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 1$

Exercice 6.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 5\ln\left(x^2+1\right) - 3x$$

et on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.



1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f, les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. **a.** Démontrer que, pour tout x réel strictement positif,

$$f(x) = x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

b. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $+\infty$.

4. **a.** Démontrer que pour tout x réel, $\quad f'(x) = \dfrac{-3x^2+10x-3}{x^2+1}$.

b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,

$$f''(x) = \frac{-10x^2+10}{\left(x^2+1\right)^2}$$

a. Valider ou rejeter la conjecture faite à la question **1**.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

c. En déduire que pour tout $x \geqslant 1$, $\quad \ln\left(x^2+1\right) \leqslant x + \ln(2) - 1$.

Corrigé

1. De ce que l'on voit de la courbe, la fonction est manifestement convexe d'abord, puis concave. Comme la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A semble traverser la courbe au point de tangence, on peut émettre la conjecture que la fonction f est convexe sur $]-\infty\,;\,1]$ et concave sur $[1\,;\,+\infty[$.

2. On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x = +\infty$

Donc par produit et somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

3. a. Soit x un réel strictement positif.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5\ln\left(x^2+1\right) - 3x \\ &= 5\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) - 3x \\ &= 5\ln\left(x^2\right) + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - 3x \quad \text{par propriété de la fonction ln.} \\ &= 5\times 2\ln(x) - 3x + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

On a donc bien : pour tout x réel strictement positif, $f(x) = x\left(10\dfrac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

b. On va utiliser la forme établie à la question précédente pour lever l'indétermination :

— D'une part :

D'après la propriété des croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Donc par produit et somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 10\dfrac{\ln(x)}{x} - 3 = -3$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(10\dfrac{\ln x}{x} - 3\right) = -\infty$.

— D'autre part : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{X\to 1} \ln(X) = 0 \end{cases}$ par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$

Par produit on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 5\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$.

Finalement, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

4. a. Pour déterminer l'expression de la fonction dérivée de f, on va revenir à l'expression de départ de $f(x)$, plus simple que celle obtenue à la question **3. a.**.

On a admis que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Si on pose : $\begin{cases} u : x \longmapsto x^2+1 \\ u' : x \longmapsto 2x \end{cases}$ on a $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = 5\ln\left(u(x)\right) - 3x$.

Ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 5\dfrac{u'(x)}{u(x)} - 3$

$$= 5\frac{2x}{x^2+1} - 3$$
$$= \frac{10x}{x^2+1} + \frac{-3\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$$
$$= \frac{10x - 3x^2 - 3}{x^2+1}$$
$$= \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2+1}$$

On arrive bien à l'expression attendue.

b. Pour tout x réel, l'expression x^2+1 est supérieure à 1, et donc strictement positive.

Le signe de $f'(x)$ est donc celui du trinôme : $-3x^2 + 10x - 3$.

Ce trinôme a un coefficient dominant égal à -3, donc négatif. Cela signifie que toutes les images $-3x^2 + 10x - 3$ sont négatives, sauf pour les valeurs x comprises entre d'éventuelles racines.

Le discriminant du trinôme est : $\Delta = 10^2 - 4 \times (-3) \times (-3) = 100 - 36 = 64 = 8^2$.

Comme il est strictement positif, le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \dfrac{-10-8}{2\times(-3)} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-10+8}{2\times(-3)} = \dfrac{1}{3}$.

On peut donc établir le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
signe de $-3x^2+10x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a donc une fonction f qui est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{3}\right]$, ainsi que sur l'intervalle $[3\,;\,+\infty[$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}\,;\,3\right]$.

Ceci est cohérent avec la courbe tracée sur le sujet.

5. a. Puisque l'expression de la fonction dérivée seconde est donnée, on va pouvoir utiliser ce résultat.

Le dénominateur $\left(x^2+1\right)^2$ est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, en tant que carré d'un réel lui-même strictement positif.

$f''(x)$ a donc le même signe que son numérateur :

$-10x^2 + 10 = 10(1-x^2) = 10(1-x)(1+x)$.

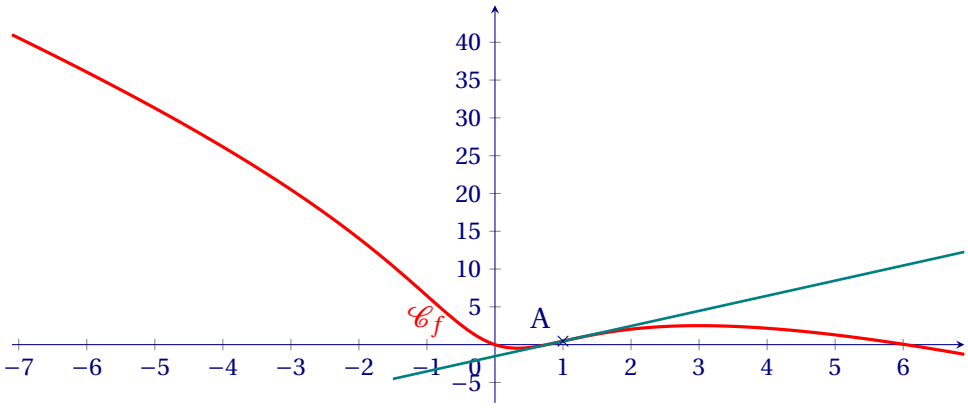
Le numérateur est donc une expression polynomiale de degré 2, dont le coefficient dominant est négatif, et ayant deux racines évidentes : 1 et -1.

On peut donc établir le tableau de signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

f est donc convexe sur $[-1;1]$, et concave sur $]-\infty;-1]$ ainsi que sur $[1;+\infty[$, avec deux points d'inflexion, à l'abscisse -1 et à l'abscisse 1 (c'est le point A).

Cela permet donc de rejeter la conjecture formulée à la question **1.**. Cette conjecture est faussée par l'échelle choisie pour la représentation de f. Ci-après, avec une échelle qui permet d'observer les images pour des abscisses inférieures à -1, la concavité de cette zone devient apparente :



b. L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1 est donnée par la formule classique : $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$.

Avec : $f(1) = 5\ln(1^2+1) - 3\times 1 = 5\ln(2) - 3$;

et : $f'(1) = \dfrac{-3\times 1^2 + 10\times 1 - 3}{1^2+1} = \dfrac{4}{2} = 2$;

On arrive à : $y = 2(x-1) + 5\ln(2) - 3$ soit $y = 2x + 5\ln(2) - 5$.

c. On nous demande d'établir une inégalité pour $x \geqslant 1$.

Sur $[1\ ;\ +\infty[$, on a établi à la question **5. a.** que la fonction est concave.

Graphiquement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de f est en dessous de toutes ses tangentes sur cet intervalle, notamment en dessous de celle au point d'abscisse 1, dont on vient de déterminer l'équation.

On peut donc affirmer : $f(x) \leqslant 2x + 5\ln(2) - 5$

$$\begin{aligned}
&\iff 5\ln\left(x^2+1\right) - 3x \leqslant 2x + 5\ln(2) - 5\\
&\iff 5\ln\left(x^2+1\right) \leqslant 3x + 2x + 5\ln(2) - 5\\
&\iff 5\ln\left(x^2+1\right) \leqslant 5x + 5\ln(2) - 5\\
&\iff 5\ln\left(x^2+1\right) \leqslant 5\left(x + \ln(2) - 1\right)\\
&\iff \ln\left(x^2+1\right) \leqslant x + \ln(2) - 1 \quad \text{car } 5 > 0
\end{aligned}$$

On établit donc ainsi l'inégalité demandée.

Exercice 7.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a :
$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$
3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Donner un encadrement du réel α d'amplitude $0,01$.
   c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :
$$g(x) = \ln(x)$$
   On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé d'origine O. On considère un réel x strictement positif et le point M de la courbe C_g d'abscisse x. On note OM la distance entre les points O et M.
   a. Exprimer la quantité OM^2 en fonction du réel x.
   b. Montrer que, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la quantité OM^2 admet un minimum en α.
   c. La valeur minimale de la distance OM, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, est appelée distance du point O à la courbe $\mathscr{C}_g$. On note d cette distance.
   Exprimer d à l'aide de α.

Corrigé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]0\,,\,+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1.$$

1. On calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0^+ \end{array}\right\} \underset{\text{quotient}}{\overset{\text{par}}{\Longrightarrow}} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + 1\right) = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -\infty}$$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

$$\text{Par croissance comparée } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + 1\right) = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ la courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0\,,\,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\times\ln(x)}{\left(x^2\right)^2} = \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{\cancel{x}(1-2\ln(x))}{x^{\cancel{4}3}} = \boxed{\frac{1-2\ln(x)}{x^3}}$$

3. Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ on a $x^3 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1-2\ln(x)$.

$$1-2\ln(x) \geqslant 0 \iff -2\ln(x) \geqslant -1 \iff \ln(x) \leqslant \frac{1}{2} \iff x \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(car } x \mapsto \mathrm{e}^x \text{ est croissante)}$$

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1+2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}$	↘	1

$$\begin{aligned} f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) &= \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)^2} + 1 \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{2\times\frac{1}{2}}} + 1 \\ &= \frac{1}{2\mathrm{e}} + 1 \\ &= \frac{1+2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} \approx 1,184 \end{aligned}$$

4. **a.** Sur l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$ la fonction f est continue et strictement croissante avec $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -\infty$ et $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1+2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} > 0$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

Sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$ la fonction f est continue et strictement décroissante avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution.

Finalement l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. À la calculatrice, on trouve :

$$\boxed{0,65 < \alpha < 0,66}$$

c. D'après les questions précédentes et puisque la fonction f est croissante sur $\left]0\,;\,e^{\frac{1}{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$, la fonction f est strictement négative sur $]0\,;\,\alpha[$, s'annule en α et est strictement positive sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

5. **a.** Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Le triangle OHM est rectangle en H, on peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{HM}^2 = \boxed{x^2 + [\ln(x)]^2}$$

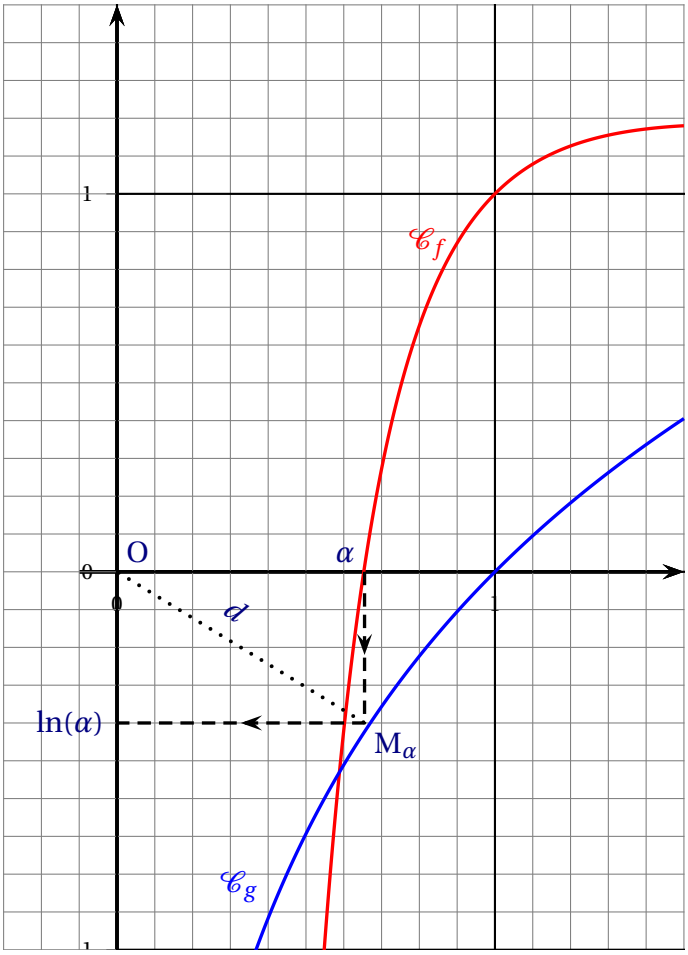
b. On considère la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = x^2 + [\ln(x)]^2$. Elle est dérivable puisque somme de fonctions dérivables, et sa dérivée est :

$$h'(x) = 2x + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) = \frac{2x^2 + 2\ln(x)}{x} = \frac{2\cancel{x}\left(1 + \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)}{\cancel{x}} = 2x\left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 2x \times f(x)$$

Or, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, on a $2x > 0$, donc $h'(x)$ est du signe de $f(x)$.
Donc, d'après la question **4.c.**, $h'(x)$ est négatif sur $]0\,;\,\alpha]$ et positif sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.
Donc h admet un minimum en $x = \alpha$.
La quantité OM^2 admet donc un minimum en α.

c. Pour $x = \alpha$, on a $\mathrm{OM}^2 = \alpha^2 + (\ln(\alpha))^2$.
α est la solution de l'équation $f(x) = 0$, donc $f(\alpha) = 0$.
Donc $\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} + 1 = 0 \iff \ln(\alpha) = -\alpha^2 \implies (\ln(\alpha))^2 = \alpha^4$
Le minimum de OM^2 est donc $\alpha^2 + \alpha^4$.
Puisque la quantité OM^2 admet un minimum en α et que d est la valeur minimale de OM :

$$\boxed{d = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}}$$



Exercice 8.

On considère la fonction f définie sur $]0\,;8]$ par

$$f(x)=\frac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x}$$

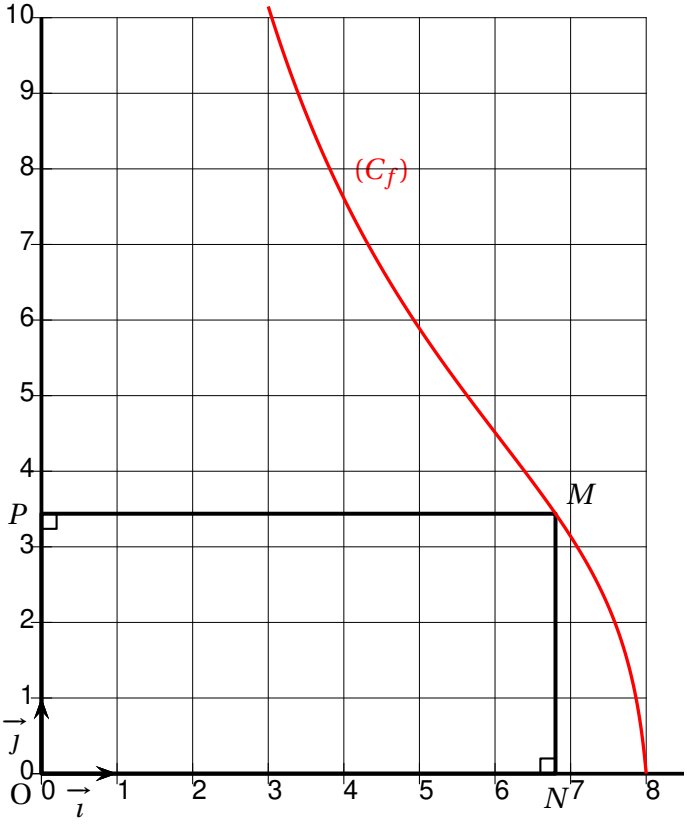
Soit C_f la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x^2+7x+8\geqslant 0$.
2. En déduire que pour tout $x\in]0\,;\,8]$, on a $f(x)\geqslant 0$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie B

La courbe C_f est représentée ci-dessous.
Soit M le point de C_f d'abscisse x avec $x\in]0\,;\,8]$.
On appelle N et P les projetés orthogonaux du point M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.
Dans cette partie, on s'intéresse à l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle $ONMP$.



1. Donner les coordonnées des points N et P en fonction de x.
2. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,8]$,

$$\mathscr{A}(x) = 10\ln\left(-x^2+7x+9\right)$$

3. Existe-t-il une position du point M pour laquelle l'aire du rectangle $ONMP$ est maximale ? Si elle existe, déterminer cette position.

Partie C

On considère un réel strictement positif k.
On souhaite déterminer la plus petite valeur de x, approchée au dixième, appartenant à $[3{,}5\,;\,8]$ pour laquelle l'aire $\mathscr{A}(x)$ devient inférieure ou égale à k.
Pour ce faire, on considère l'algorithme ci-dessous.
Pour rappel, en langage Python, $\ln(x)$ s'écrit log (x).

```
1   from math import *
2
3   def A(x) :
4     return 10*log (- 1* x**2 + 7*x + 9)
5
6   def pluspetitevaleur(k) :
7     x = 3.5
8     while A(x)..... :
9       x = x + 0.1
10    return ...........
```

1. Recopier et compléter les lignes 8 et 10 de l'algorithme.
2. Quel nombre renvoie alors l'instruction `pluspetitevaleur(30)` ?
3. Que se passe-t-il lorsque $k = 35$? Justifier.

Corrigé

Partie A

1. $-x^2+7x+8=0$ admet -1 comme solution évidente. L'autre solution de l'équation du second degré est donc 8.
   Le trinôme est négatif (du signe du coefficient de x^2), sauf entre les racines, d'où le tableau de signes de $x \longmapsto -x^2+7x+8$:

x	$-\infty$		-1		8		$+\infty$
signe de $-x^2+7x+8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2+7x+8 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ est l'intervalle $[-1\,;\,8]$
2. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,8]$, $-x^2+7x+8 \geqslant 0$. D'où en ajoutant 1 à chaque membre $-x^2+7x+9 \geqslant 1$.
   Comme la fonction logarithme népérien est une fonction croissante on a pour tout x appartenant à $]0\,;\,8]$, $\ln\left(-x^2+7x+9\right) \geqslant \ln(1)$. C'est à dire $\ln\left(-x^2+7x+9\right) \geqslant 0$.
   Pour tout x appartenant à $]0\,;\,8]$, $x>0$ et $10\ln\left(-x^2+7x+9\right) \geqslant 0$, donc $f(x) = \dfrac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x} \geqslant 0$.
3. Sur l'intervalle $[0\,;\,8]$ la courbe représentative est au dessus de l'axe des abscisses.

Partie B

1. Pour $x \in]0\,;\,8]$, $\mathrm{M}\left(x, \dfrac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x}\right)$ et donc $\mathrm{N}(x,0)$ et $\mathrm{P}\left(0, \dfrac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x}\right)$.
2. Comme pour $x \in]0\,;\,8]$, l'abscisse de N est positive et l'ordonnée de P est positive. On peut écrire ON= x et OP= $\dfrac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x}$.
   L'aire de ONMP vaut ON × OP donc :
   $\forall x \in]0\,;\,8] \quad \mathscr{A}(x) = x \times \dfrac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x} = 10\ln\left(-x^2+7x+9\right)$
3. Sur $]0\,;\,8[$, $-x^2+7x+9>0$ donc $\mathscr{A}$ est une fonction dérivable de la variable x sur $]0\,;\,8[$ comme composée de fonction définies et dérivables.
   $\forall x \in]0\,;\,8[, \mathscr{A}'(x) = 10 \times \dfrac{-2x+7}{-x^2+7x+9}$.
   S'il existe $x \in]0\,;\,8[$ telle que $\mathscr{A}(x)$ soit maximale, il faut que $\mathscr{A}'(x)=0$
   Pour $x \in]0\,;\,8[$, $-x^2+7x+9>0$, $\mathscr{A}'(x)$ est donc du signe de $-2x+7$.
   $\mathscr{A}'(x) \geqslant 0 \iff -2x+7 \geqslant 0$
   $\mathscr{A}'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant \dfrac{7}{2}$
   $\mathscr{A}$ est croissante sur $\left]0\,;\,\dfrac{7}{2}\right[$ et décroissante sur $\left]\dfrac{7}{2}\,;\,8\right[$.

La dérivée s'annule en $\frac{7}{2}$, en étant positive avant puis négative après, donc la fonction $\mathscr{A}$ a un maximum sur $]0\,;\,8[$, :

$\mathscr{A}\left(\frac{7}{2}\right) = 10\ln(17) + 10\ln(5) - 20\ln(2) \approx 30{,}56$

Partie C

1.

```
1  from math import *
2
3  def A(x):
4          return 10*log(-1 * x**2 + 7*x + 9)
5
6  def pluspetitevaleur(k):
7          x = 3.5
8          while A(x) > k:
9                  x = x + 0.1
10         return x
```

2.
```
>>>pluspetitevaleur(30)
4.599999999999998
```

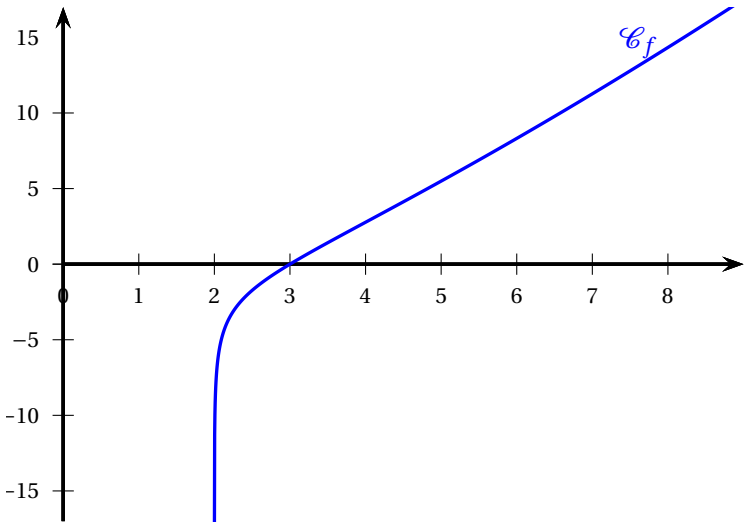
3. Lorsque $k = 35$, la condition `A(x) > 35` n'est pas vérifiée donc le contenu de la boucle n'est pas exécuté. L'appel `pluspetitevaleur(35)` renvoie `3.5`.

Exercice 9.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x-2).$$

Une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2\,;\,+\infty[$.
3. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} f(x)$.
   Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1. ?
4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$:
$$f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}.$$
5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.
   a. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, on a :
$$g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$
   b. On admet que $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} g(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
   En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2\,;\,+\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g.
   c. En déduire que, pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.
   d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$.
6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.
7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 ?

Corrigé

1. Par lecture graphique, il semble que :
   — la fonction f est strictement croissante sur son ensemble de définition ;
   — $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\mathscr{C}_f$ semblant présenter une asymptote d'équation $x = 2$;
   — $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Résolvons l'équation sur $]2\,;\,+\infty[$:
$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x\ln(x-2) = 0\\ &\iff x = 0 \text{ ou bien } \ln(x-2) = 0 \quad \text{d'après la règle du produit nul}\\ &\iff \ln(x-2) = 0 \quad \text{car } x > 2 \text{ donc } x \neq 0\\ &\iff \exp\big(\ln(x-2)\big) = \exp(0) \quad \text{car exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}\\ &\iff x-2 = 1\\ &\iff x = 3 \end{aligned}$$
   L'équation a une unique solution : $x = 3$.
3. On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} x-2 = 0^+$ et donc, en posant $y = x-2$, par composition, on en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} \ln(x-2) = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\y>0}} \ln(y) = -\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x = 2$, donc, par limite du produit : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} [x \times \ln(x-2)] = -\infty$.

Cela confirme à la fois la conjecture sur la limite en 2 (en effet, comme f n'est définie que sur $]2\,;\,+\infty]$, la limite en 2 est la limite à droite en 2), et cela confirme aussi la conjecture sur l'asymptote d'équation $x = 2$, qui est l'interprétation graphique de cette limite.

4. Si $u : x \longmapsto x-2$ alors $u' : x \longmapsto 1$.

Ainsi $x \longmapsto \ln(x-2)$ est la composée $\ln \circ u$ et donc se dérive en :

$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{1}{x-2}$.

On dérive un produit de fonctions dérivables sur $]2\,;\,+\infty[$.

Pour tout réel strictement supérieur à 2, on a :

$f'(x) = 1 \times \ln(x-2) + x \times \dfrac{1}{x-2} = \ln(x-2) + \dfrac{x}{x-2}$.

On arrive bien à l'expression annoncée pour $f'(x)$.

5. **a.** On a : $g'(x) = f''(x) = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1\times(x-2) - x\times 1}{(x-2)^2}$

$= \dfrac{1}{(x-2)} + \dfrac{-2}{(x-2)^2} = \dfrac{x-2}{(x-2)^2} + \dfrac{-2}{(x-2)^2}$

$= \dfrac{x-4}{(x-2)^2}$

On arrive bien à la forme demandée.

b. $g'(x)$ est le quotient de $(x-4)$ par $(x-2)^2$.

Le dénominateur étant le carré d'un réel non nul, il est strictement positif, donc $g'(x)$ a le signe de $(x-4)$. On peut donc établir le tableau de variations suivant :

x	2		4		$+\infty$
signe de $x-4$	‖	$-$	0	$+$	
signe de $g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de g	‖ $+\infty$	↘	$2+\ln(2)$	↗	$+\infty$

On a : $g(4) = f'(4) = \ln(4-2) + \dfrac{4}{4-2} = \ln(2) + \dfrac{4}{2} = 2 + \ln(2)$.

c. En observant le tableau de variations précédent, on a :

$2 > 1 \implies \ln(2) > 0$ donc on a $g(4) \geqslant 2 > 0$.

Donc, les variations de g indiquent que g atteint un minimum égal à $g(4) > 0$, pour $x = 4$.

On en déduit que la fonction g est à valeurs strictement positives sur $]2\,;\,+\infty[$.

d. Puisque g est la fonction dérivée f', on en déduit que f' est à valeurs strictement positives sur $]2\,;\,+\infty[$, et donc que f est strictement croissante sur $]2\,;\,+\infty[$.

6. On a établi les variations de $g = f'$ à la question **5. b.** :

— sur $]2\,;\,4]$, f' est décroissante, donc f est concave ;

— sur $[4\,;\,+\infty[$, f' est croissante, donc f est convexe.

f change de convexité en $x = 4$, donc le point de coordonnées $\big(4\,;\,f(4)\big)$, est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

On a $f(4) = 4 \times \ln(4-2) = 4\ln(2) = \ln\left(2^4\right) = \ln(16)$.

Les coordonnées exactes du point d'inflexion sont donc $(4\ ;\ \ln(16))$.

7. $\mathscr{C}_f$ admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 au point d'abscisse x si et seulement si $f'(x) = 3$, ou encore $g(x) = 3$.

On a $g(4) = 2 + \ln(2) \approx 2,7$. On a donc :

— Sur $]2\ ;\ 4]$, g est strictement décroissante, et continue (car dérivable), et 3 est une valeur strictement comprise entre $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = +\infty$ et $g(4) = 2+\ln(2) \approx 2,7$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, il existe une unique solution à l'équation $g(x) = 3$ dans l'intervalle $]2\ ;\ 4]$, notée α ;

— De façon analogue, sur $]4\ ;\ +\infty[$, g est strictement croissante, et continue (car dérivable), et 3 est une valeur strictement comprise entre $\lim\limits_{x\to 4} g(x) \approx 2,7$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$. Il existe aussi une unique solution à l'équation $g(x) = 3$ dans l'intervalle $]4\ ;\ +\infty[]$, notée β ;

Ainsi, l'équation $f'(x) = 3$ équivalente à $g(x) = 3$ admet exactement deux solutions α et β sur $]2\ ;\ +\infty[$.

Il y a donc exactement deux valeurs de x (α et β) pour lesquelles la tangente à $\mathscr{C}_f$ a un coefficient directeur égal à 3.

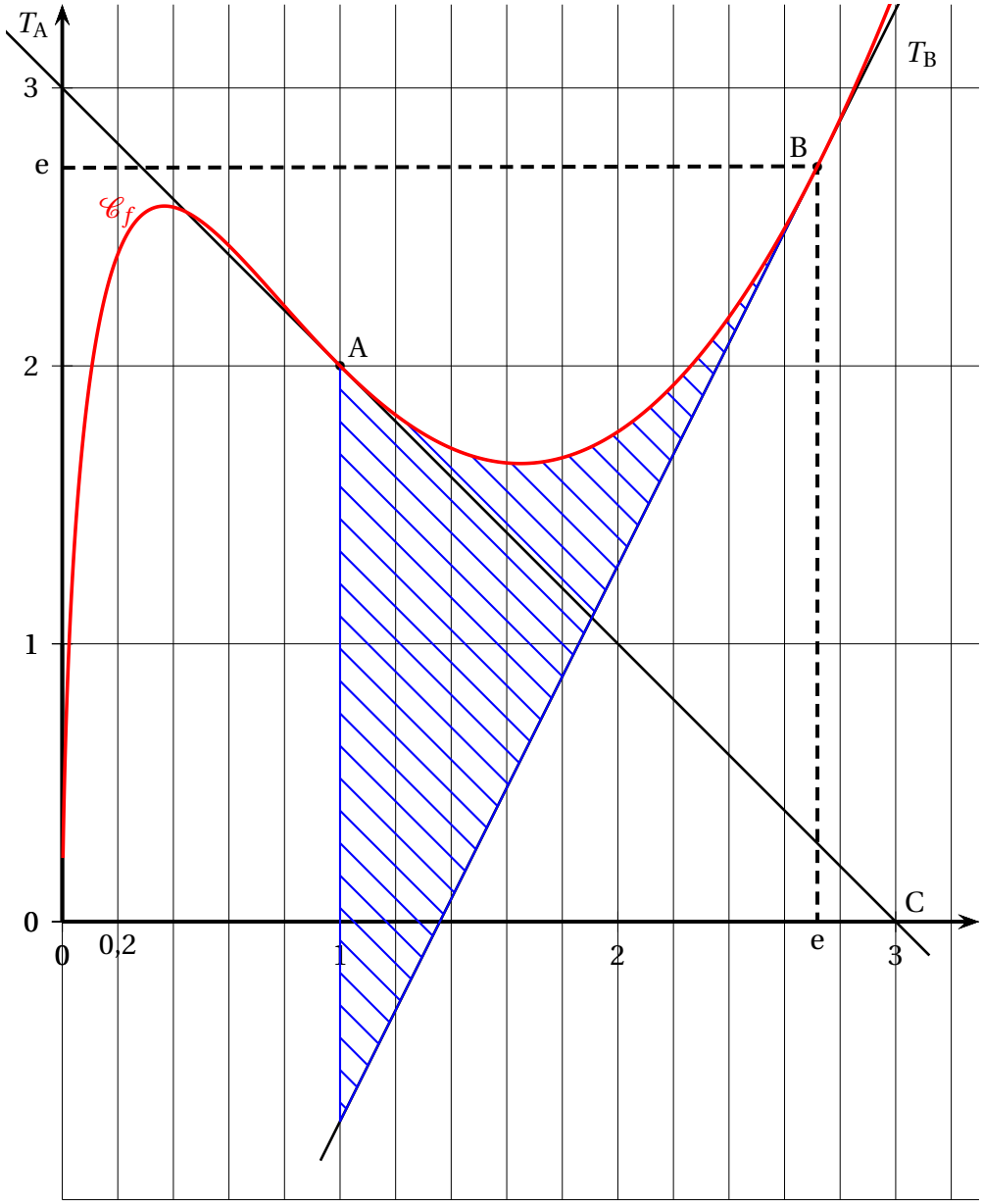
Exercice 10.

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]0\,;\,3]$;
- la droite T_{A},tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $\text{A}(1\,;\,2)$;
- la droite T_{B} tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $\text{B}(\text{e}\,;\,\text{e})$.

On précise par ailleurs que la tangente T_{A} passe par le point $\text{C}(3\,;\,0)$.



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0\,;\,3]$?
3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Partie B : étude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
   En déduire que $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
   On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.
3. On admet que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.
   a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1}{x}(4\ln x + 1)$.
   b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.
   c. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - e$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{e^2+1}{4}.$$
3. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente T_B, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.
   On admet que $\displaystyle\int_1^e x(\ln x)^2\,dx = \frac{e^2-1}{4}$.
   En déduire la valeur exacte de $\mathscr{A}$ en unité d'aire.

Corrigé

Partie A : Lectures graphiques

1. Le nombre dérivé $f'(1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à C_f au point A(1 ; 2).
   La tangente T_A passe par le point C(3 ; 0) son coefficient directeur est donc égal à $\dfrac{0-2}{3-1} = \dfrac{-2}{2} = -1$.
   Donc $f'(1) = -1$.
2. $f'(x) = 0$ lorsque la tangente à la courbe est horizontale.
   L'équation $f'(x) = 0$ admet donc 2 solutions dans l'intervalle $]0\,;\,3]$ ce qui correspond à deux extremums de la fonction.
3. Graphiquement, sur l'intervalle $[0\,;\,0,5]$ le graphe de la fonction semble concave donc on en déduit : $f''(0,2) < 0$.

Partie B : Étude de la fonction f

1. $2X^2-3X+2=0$ est une équation du second degré. Déterminons son discriminant Δ :
$\Delta=(-3)^2-4\times2\times2=9-16=-7<0$
Le discriminant est négatif donc cette équation n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.
C_f coupe l'axe des abscisses à l'abscisse x est équivalent à $f(x)=0$ soit
$x\left(2(\ln x)^2-3\ln x+2\right)=0$.
Or $x>0$ donc $f(x)=0 \iff 2(\ln x)^2-3\ln x+2=0$
Posons pour $x>0$, $X=\ln(x)$, l'équation devient : $2X^2-3X+2=0$ or on vient de démontrer que cette équation n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$ donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$ donc C_f ne coupe pas l'axe des abscisses

2. $f(x)=x\left(2(\ln x)^2-3\ln x+2\right)=x(\ln x)^2\left(2-\dfrac{3}{\ln x}+\dfrac{2}{(\ln x)^2}\right)$.
On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^2=+\infty$
d'où, d'une part : $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln x)^2=+\infty$
et, d'autre part $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{\ln x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{(\ln x)^2}=0\end{cases}$ donc, par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}2-\dfrac{3}{\ln(x)}+\dfrac{2}{(\ln(x))^2}=2$.
Et finalement, par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

3. **a.** $f'(x)=2(\ln x)^2+\ln x-1$.
Non demandé : f est dérivable comme produit de sommes de fonctions de x dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x)=2(\ln x)^2-3\ln x+2+x(4\ln x\times\dfrac{1}{x}-3\dfrac{1}{x})=2(\ln x)^2-3\ln x+2+4\ln x-3=2(\ln x)^2+\ln x-1$.
On sait que u étant une fonction de x dérivable $(u^n)'=nu'u^{n-1}$
Donc pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$:
$f''(x)=2\times2\ln x\times\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}-0=\dfrac{1}{x}(4\ln x+1)$.

b. Pour déterminer la convexité de f, déterminons le signe de $f''(x)$.
Sur $]0\,;\,+\infty[$, $\dfrac{1}{x}>0$ donc $f''(x)$ est du signe de $4\ln x+1$
$4\ln x+1=0 \iff \ln x=-\dfrac{1}{4}$
$\iff x=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$
$4\ln x+1>0 \iff \ln x>-\dfrac{1}{4}$
$\iff x>\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$
Donc $f''(x)\geqslant0 \iff x\in\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\,;\,+\infty\right[$: la fonction f est convexe sur cet intervalle.
D'où :

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$		$+\infty$
signe de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

La fonction f est concave sur l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\right]$ et convexe sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\,;\,+\infty\right[$.
La valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion est $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\approx0,779$.

c. La fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[e^{-\frac{1}{4}} ; +\infty\right[$ or $e^{-\frac{1}{4}} < 1$
donc la fonction f est convexe sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$
et donc sur cet intervalle, la courbe C_f est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier T_B.

Partie C : Calcul d'aire

1. L'équation réduite de la tangente T_B au point d'abscisse e est : $y = f'(e)(x-e)+f(e)$
$f'(e) = 2(\ln e)^2 + \ln e - 1 = 2\times 1 + 1 - 1 = 2$;
$f(e) = e\left(2(\ln e)^2 - 3\ln e + 2\right) = e\left(2\times 1^2 - 3 + 2\right) = e\times 1 = e$. (Ceci est dans l'énoncé mais pas clairement !)
La tangente T_B a donc pour équation réduite $y = 2x - e$.

2. $x \longmapsto x\ln x$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = \ln x & \text{et} \quad u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x & \text{et} \quad v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$
Les fonctions u et v sont continues car dérivables sur $[1 ; e]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[1 ; e]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :
$\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$
d'où
$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln x\,dx &= \left[\ln x\times\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e\left[\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}\right]dx \\ &= \left(\ln e\times\frac{e^2}{2}\right) - \left(\ln 1\times\frac{1^2}{2}\right) - \int_1^e\frac{x}{2}\,dx \\ &= 1\times\frac{e^2}{2} - 0 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{2e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{e^2+1}{4}\end{aligned}$$

3. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f, la tangente T_B, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.
Sur l'intervalle $[1 ; e]$, la courbe C_f est au-dessus de la tangente T_B donc l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f, la tangente T_B, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$ est égale, en unité d'aires, à $\displaystyle\int_1^e [f(x) - 2x + e]\,dx$.

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_1^{\mathrm{e}} [f(x) - 2x + \mathrm{e}]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} [2x(\ln x)^2 - 3x\ln x + 2x - 2x + \mathrm{e}]\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_1^{\mathrm{e}} x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x - 3\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{e}\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= 2\times\frac{\mathrm{e}^2-1}{4} - 3\times\frac{\mathrm{e}^2+1}{4} + \Big[\mathrm{e}x\Big]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \frac{2\mathrm{e}^2-2-3\mathrm{e}^2-3}{4} + \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} \\ &= \frac{-\mathrm{e}^2-5}{4} + \frac{4\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}}{4} \\ &= \frac{3\mathrm{e}^2-5-4\mathrm{e}}{4}.\end{aligned}$$

Soit une aire d'environ 1,57 unités d'aire.

La valeur exacte de $\mathscr{A}$ est $\dfrac{3\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}-5}{4}$ u.a.

Exercice 11.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 4\ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en -1.
2. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{100-2x-2x^2}{25(x+1)}$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;6{,}5]$.
4. On considère h la fonction définie sur l'intervalle $[2\,;6{,}5]$ par $h(x) = f(x) - x$.
   On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

x	2		$m \approx 2{,}364$		6,5
$h(x)$	$h(2)$	↗	$M \approx 2{,}265$	↘	$h(6{,}5)$

   Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2\,;\,6{,}5]$.

5. On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```
from math import *

def f(x) :
    return 4*log(1+x)-(x**2)/25

def bornes(n) :
    p = 1/10**n
    x = 6
    while f(x)-x > 0 :
        x = x + p
    return (x-p, x)
```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande log(x) renvoie la valeur $\ln x$;
- la commande c∗∗d renvoie la valeur de c^d.

a. Donner les valeurs renvoyées par la commande bornes(2).
On donnera les valeurs arrondies au centième.

b. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,

$$2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 6{,}5.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.

3. On rappelle que le réel α, défini dans la partie A, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle [2 ; 6,5].
Justifier que $\ell = \alpha$.

Corrigé

Partie A :

1. D'une part : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} x+1 = 0^+ \\ \lim\limits_{X\to 0} \ln X = -\infty \end{cases}$ donc par composition $\lim\limits_{x\to -1} 4\ln(x+1) = -\infty$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-x^2}{25} = -\dfrac{1}{25}$

donc par somme $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$

2. f est dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

f est de la forme $4\ln(u)-v$ avec $u(x)=x+1$ et $v(x)=\dfrac{x^2}{25}$.

On a $u'(x)=1$ et $v'(x)=\dfrac{2x}{25}$

Or $f'=4\dfrac{u'}{u}-v'$ donc :

Pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[$, on a :

$f'(x)=4\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2x}{25}=\dfrac{4\times25-(x+1)2x}{25(x+1)}=\dfrac{100-2x-2x^2}{25(x+1)}$

3. Pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[$, on a :

$f'(x)=\dfrac{100-2x-2x^2}{25(x+1)}$

$25(x+1)>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $100-2x-2x^2$, fonction polynôme du second degré donc le coefficient dominant (-2) est négatif.

$\Delta=(-2)^2-4\times100\times(-2)=804>0$

$100-2x-2x^2=0$ admet donc deux racines :

$x_1=\dfrac{2-\sqrt{804}}{2(-2)}=\dfrac{-1+\sqrt{201}}{2}\approx6,6$

et $x_2=\dfrac{2+\sqrt{804}}{2(-2)}=\dfrac{-1-\sqrt{201}}{2}\approx-7,6<-1$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	-1		x_1		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $-\infty$	↗	$f(x_1)$	↘	

$[2\ ;\ 6,5]\subset]-1\ ;\ x_1[$ donc f est strictement croissante sur $[2\ ;\ 6,5]$.

4. $h(2)=f(2)-2=4\ln(2+1)-\dfrac{2^2}{25}-2\approx2,23$.

Sur l'intervalle $[2\ ;\ m]$ la fonction h est strictement croissante, or $h(2)>0$ donc sur $[2\ ;\ m]$, $h(x)>0$ et l'équation $h(x)=0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[m\ ;\ 6,5]$, la fonction h est strictement décroissante et continue.

$h(m)=M\approx2,265>0$

et $h(6,5)=4\ln(6,5+1)-\dfrac{6,5^2}{25}-6,5\approx-0,13<0$

0 est donc une valeur intermédiaire entre $h(m)$ et $h(6,5)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotone, l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[m\ ;\ 6,5]$.

Finalement, l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2\ ;\ 6,5]$.

5. **a.** Avec la calculatrice on trouve que les valeurs renvoyées par la commande bornes (2) sont : (6.36, 6.37)

b. Dans le contexte de l'exercice, un encadrement de α est $6,36<\alpha<6,37$.

Partie B :

1. Pour tout entier naturel n, on pose P_n, l'affirmation : « $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$. ».

Initialisation : On a, d'une part : $u_0 = 2$,

Et, d'autre part : $u_1 = f(u_0) = f(2) \approx 4,23$

Donc $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6,5$

Pour $n = 0$, l'affirmation P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n naturel , tel que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire :

« $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$ ».

On veut montrer que cela implique que l'affirmation P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$

Or la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2\ ;\ 6,5]$ donc :

$f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(6,5)$

or $f(2) \approx 4,23 > 2$ et $f(6,5) \approx 6,37 < 6,5$

donc, par définition de la suite u, $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 6,5$

c'est l'inégalité P_{n+1}

Conclusion : L'affirmation est vraie au rang 0, et, pour tout rang naturel non nul, sa véracité est héréditaire, donc, en vertu du principe de démonstration par récurrence, on peut vérifier l'inégalité P_n pour tout entier naturel n.

2. Pour tout entier n , $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite u est croissante,

de plus pour tout entier n, $u_n \leqslant 6,5$ donc la suite u est majorée,

or tout suite croissante et majorée est convergente, donc la suite (u_n) converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 6,5$.

3. La suite u est une suite convergente vers une limite ℓ de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f fonction continue. D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ ou $h(x) = 0$

On sait de plus que cette limite appartient à l'intervalle $[2\ ;\ 6,5]$ et que sur cette intervalle l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α on a donc $\ell = \alpha$.

On rappelle que le réel α, défini dans la partie **A**, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2\ ;\ 6,5]$.

Exercice 12.

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.
   c. Étudier le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   d. Étudier la convexité de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\,;\,+\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1\,;\,2]$.
   b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$.
   c. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g

La fonction g est définie sur $]0\,;\,1]$ par :

$$g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0\,;\,1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. **a.** Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.
   b. On admet le tableau de signes suivant :

x	0		$\dfrac{1}{\alpha}$		1
signe de $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$	‖	$+$	0	$-$	

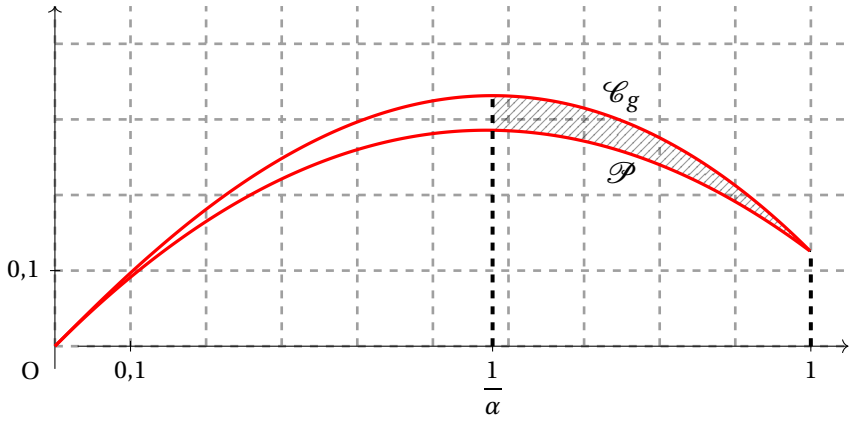
   En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0\,;\,1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

— La courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g ;

— La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -\dfrac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{P}$, et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.
On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

1. **a.** Justifier la position relative des courbes C_g et $\mathscr{P}$ sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.

b. Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathscr{A}$.

Corrigé

Partie A : étude de la fonction f.

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x, \quad \text{sur }]0\,;\,+\infty[$$

1. **a.**

• Limite en 0 : On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} x - 2 = -2$ et que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

• Limite en plus l'infini :

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. Sur l'intervalle de définition f est une somme de fonctions dérivables et sur cet intervalle :

$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{2x+1}{2x}$.

c. On a successivement : $0 < x \Rightarrow 0 < 2x < 2x+1$ et

$2x+1 > 2x > 0 \Rightarrow \dfrac{2x+1}{2x} > 1 > 0$: donc $f'(x) > 1 > 0$: $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ de moins l'infini à plus l'infini.

d. f' est elle-même dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle, en dérivant la somme $1 + \dfrac{1}{2x}$ on obtient :

$f''(x) = 0 + \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{2x^2}$.

Or $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow 2x^2 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2x^2} > 0$ et enfin $f''(x) < 0$.

Conclusion : la fonction f est concave sur $]0\,;\,+\infty[$

2. **a.** Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue car dérivable sur cet intervalle et strictement croissante de moins à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in]0\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Comme $f(1) = 1 - 2 + 0,5 \times \ln 1 = -1$ et

$f(2) = 2 - 2 + \dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{\ln 2}{2} > 0$, le même théorème appliqué à l'intervalle $[1\,;\,2]$ montre que $\alpha \in [1\,;\,2]$.

b. On a donc :

- $f(x) < 0$ sur $]0\,;\,\alpha[$;
- $f(x) > 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$;
- $f(\alpha) = 0$.

c. Le dernier résultat s'écrit :

$\alpha - 2 + \dfrac{1}{2}\ln\alpha = 0 \iff \dfrac{1}{2}\ln\alpha = 2 - \alpha \iff \ln\alpha = 2(2-\alpha)$

Partie B étude de la fonction g

Sur $]0\,;\,1]$, $\quad g(x) = -\dfrac{7}{8}x^2 + x - \dfrac{1}{4}x^2\ln x$.

1. g est une somme de produits de fonctions dérivable sur $]0\,;\,1]$, elle est donc dérivable sur cet intervalle et

$g'(x) = -2 \times \dfrac{7}{8}x + 1 - \dfrac{1}{4}\left(2x\ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{7}{4}x + 1 - \dfrac{1}{2}x\ln x - x\dfrac{1}{4} = -\dfrac{8}{4}x + 1 - \dfrac{1}{2}x\ln x =$

$1 - 2x - \dfrac{x\ln x}{2}$.

Puisque $x \neq 0$, on peut factoriser x et $g'(x) = x\left(\dfrac{1}{x} - 2 - \ln x\dfrac{1}{2}\right)$.

Posons $X = \dfrac{1}{x} \iff x = \dfrac{1}{X}$; en remarquant que $X = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \ln X = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$, on peut écrire :

$g'(x) = \dfrac{1}{X}\left(X - 2 + \dfrac{1}{2}\ln X\right)$, soit $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2. **a.** On a vu dans la partie A que $0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) < 0$, soit en prenant les inverses de ces nombres positifs :

$\dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{x} \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.

b. D'après le tableau de signes admis comme $0 < x \leqslant 1$ on en déduit par produit que :

- $g'(x) > 0$ sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\alpha}\right[$; g est croissante sur cet intervalle
- $g'(x) < 0$ sur $\left]\dfrac{1}{\alpha}\,;\,1\right[$; g est décroissante sur cet intervalle
- $g'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$; $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ est un maximum de g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Partie C : un calcul d'aire

1. **a.** On sait que sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, $\ln x \leqslant 0$ et comme $x^2 \geqslant 0$, on conclut que $-\dfrac{1}{4}x^2\ln x \geqslant 0$.

Conclusion : sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, $-\dfrac{7}{8}x^2 + x \leqslant -\dfrac{7}{8}x^2 + x - \dfrac{1}{4}x^2\ln x$ ce qui signifie géométriquement que sur cet intervalle l'arc de la parabole est en dessous de la représentation graphique de g.

b. Ne connaissant pas de primitive évidente de la fonction $x \longmapsto x^2 \ln x$, on effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{array}{rcl} u(x) & = & \ln x \\ v'(x) & = & x^2 \end{array} \text{ d'où } \begin{array}{rcl} u'(x) & = & \dfrac{1}{x} \\ v(x) & = & \dfrac{x^3}{3} \end{array}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\alpha}\,;\,1\right]$ et leurs dérivées sont continues sur ce même intervalle,

donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} =$

$-\dfrac{1}{9} - \left(\dfrac{1}{3\alpha^3}\ln\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{9\alpha^3}\right) = -\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{3\alpha^3}\left(-\ln\alpha - \dfrac{1}{3}\right)$,

soit en remplaçant $\ln\alpha$ par $2(2-\alpha)$,

$\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9} - \frac{1}{3\alpha^3}\left(-4+2\alpha-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9} + \frac{4}{3\alpha^3} - \frac{2}{3\alpha^2} + \frac{1}{9\alpha^3} =$

$\dfrac{-\alpha^3+12-6\alpha+1}{9\alpha^3} = \dfrac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3}$.

2. L'aire de la partie hachurée est égale la différence des intégrales :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x\right)\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(-\frac{7}{8}x^2+x\right)\mathrm{d}x$, soit par linéarité de l'intégrale :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(-\frac{1}{4}x^2\ln x\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(x^2\ln x\right)\mathrm{d}x$,

soit d'après le calcul précédent :

$\mathscr{A} = -\dfrac{1}{4}\times\dfrac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3} = \dfrac{\alpha^3+6\alpha-13}{36\alpha^3} \approx 0{,}07.$

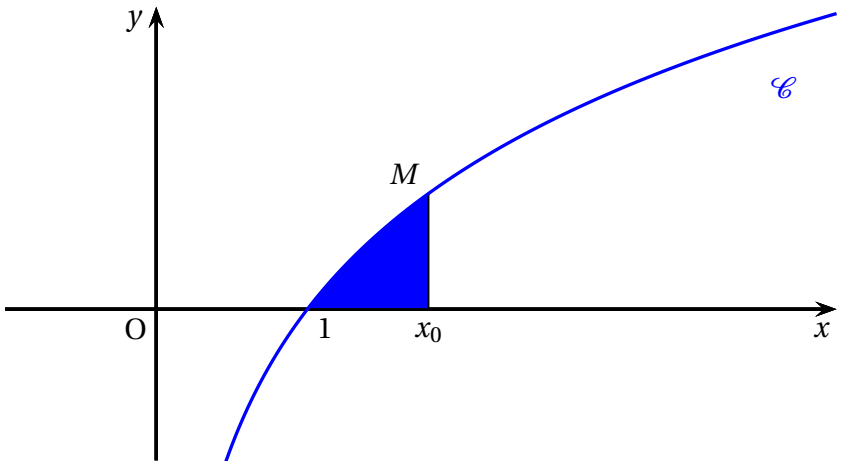
Exercice 13.

Soit a un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

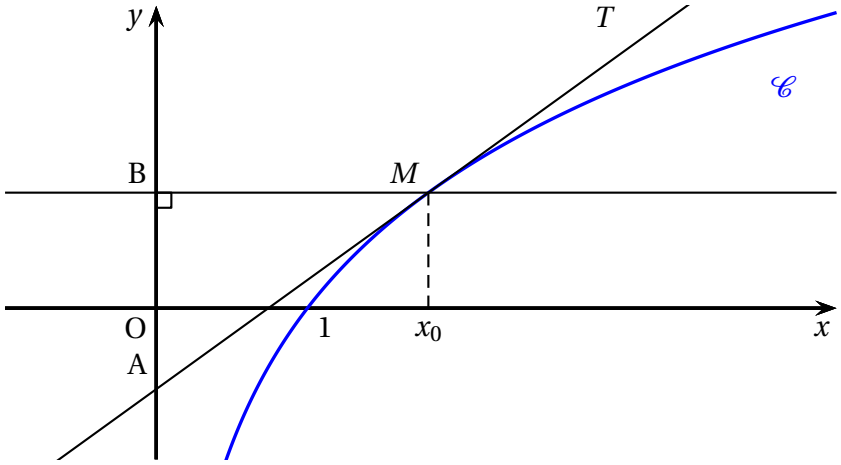
$$f(x) = a\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a[x\ln(x) - x]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire l'aire du domaine bleuté en fonction de a et de x_0.



On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse x_0.
On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera.
Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.

Corrigé

$$f(x) = a\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1. On a $f(x) = 0 \iff a\ln x = 0 \iff \ln x = 0$ (car $a \neq 0$) et par croissance de la fonction exponentielle $e^{\ln x} = e^0 \iff x = 1$.

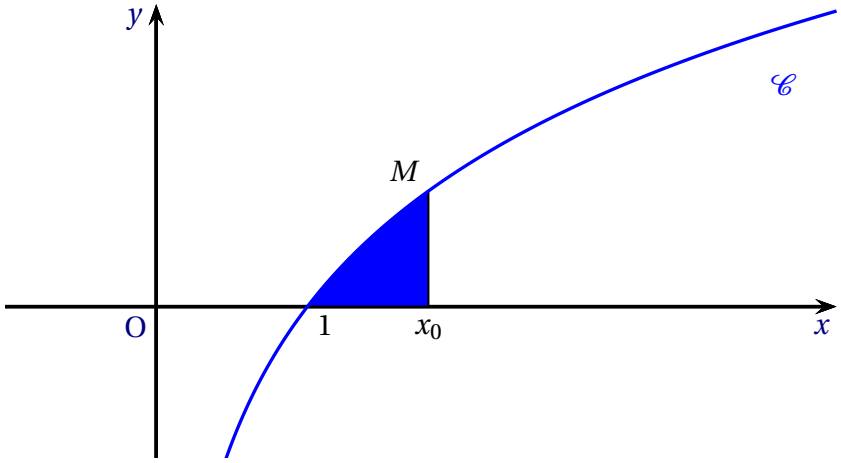
2. F est une différence de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, donc sur cet intervalle :
$F'(x) = a\left[\ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1\right] = a[\ln(x) + 1 - 1] = a\ln(x) = f(x)$, ce qui montre que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. On a vu que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en $x = 1$ donc la surface bleue correspond à des points où $x \geqslant 1$, soit $\ln(x) \geqslant 0 \Rightarrow a\ln(x) \geqslant 0$.

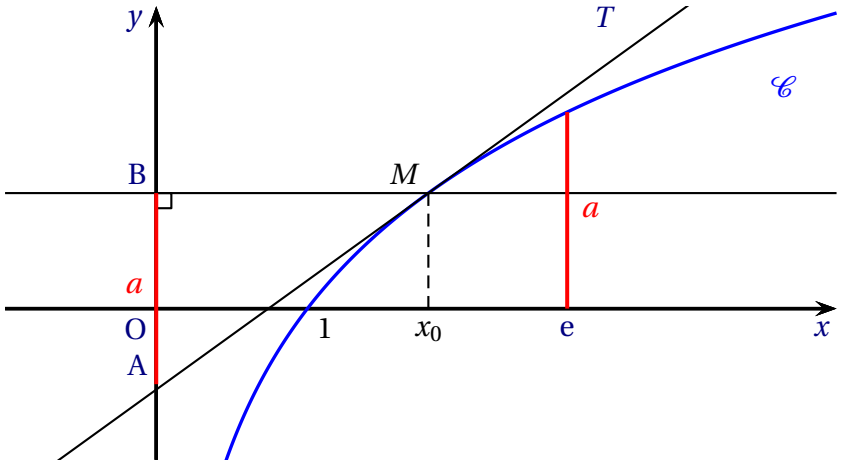
Autrement dit pour $x \geqslant 1$, la fonction f est positive et on sait que sur un intervalle $[1\ ;\ x_0]$ avec $x_0 \geqslant 1$, l'aire de la surface limitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$ est égale à l'intégrale :

$$\int_1^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^{x_0} = F(x_0) - F(1) = a[x_0\ln(x_0) - x_0] - a[1\ln(1) - 1] = .$$

l'aire bleutée est en unités d'aire : $a[x_0\ln(x_0) - x_0] + a = a\,[x_0\ln(x_0) - x_0 + 1]$.



On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse x_0.
On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. On sait (équation de la tangente au point d'abscisse x_0) que :

$M(x\ ;\ y) \in T \iff y - f(x_0) = f'(x - x_0))$.

- $f(x_0) = a\ln x_0$;
- f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle $f'(x) = \dfrac{a}{x}$, donc $f'(x_0) = \dfrac{a}{x_0}$.

On obtient donc :

$M(x\ ;\ y) \in T \iff y - a\ln x_0 = \dfrac{a}{x_0} \times (x - x_0) \iff y = a\ln x_0 + \dfrac{ax}{x_0} - a$.

En particulier T coupe l'axe des ordonnées si $x = 0$, d'où $y = a\ln x_0 - a$ (ordonnée de A).
L'ordonnée de B est égale à $f(x_0) = a\ln(x_0)$.
On a AB $= \left|y_B - y_A\right| = |a\ln(x_0) - (a\ln x_0 - a)| = |a| = a$ (car $a > 0$).
Remarque : On a $f(e) = a\ln e = a \times 1 = a$.
$f(e) = a$: on a mis en évidence ceci sur le dessin ; le corollaire est que la tangente à la courbe au point d'abscisse e contient l'origine O !

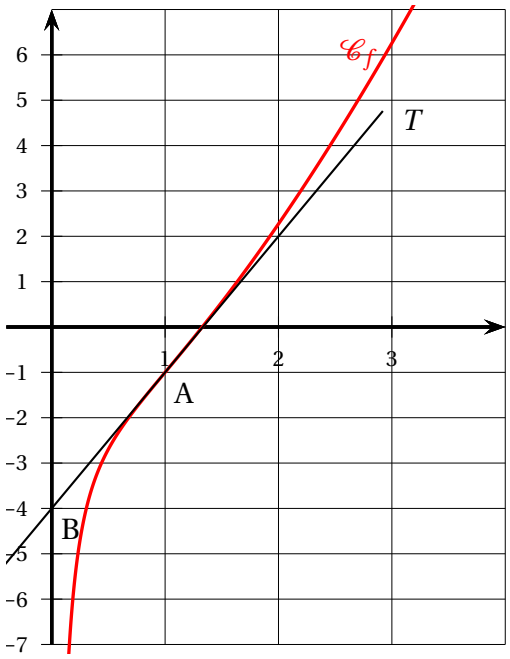
Exercice 14.

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1\,;\,-1)$.
Cette tangente passe également par le point B$(0\,;\,-4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
   Que semble représenter le point A pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

a. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$

3. **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Corrigé

Partie A : lectures graphiques

1. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A donc $f'(1) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-4+1}{0-1} = 3$, de plus, l'ordonnée à l'origine de $(\mathscr{T})$ est -4 donc l'équation réduite de $(\mathscr{T})$ est $y = 3x - 4$

2. f semble concave sur $]0\,;1[$ (car $\mathscr{C}_f$ semble située au-dessous ses tangentes) et f semble convexe sur $]1\,;+\infty[$ (car $\mathscr{C}_f$ semble située au-dessus de ses tangentes).

Le point $A(1\,;-1)$ semble être un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie B : étude analytique

1. — $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x^2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x) = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(x^2\right) = +\infty$

de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

— $\lim\limits_{x\to0} x\ln\left(x^2\right) = \lim\limits_{x\to0} 2x\ln(x) = 0$ par croissance comparée

de plus $\lim\limits_{x\to0} -\dfrac{1}{x} = -\infty$ (car $x > 0$) donc par somme $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$

L'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

a. f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables :

$f = uv - w$ avec $u(x) = x$; $v(x) = \ln\left(x^2\right)$ et $w(x) = \dfrac{1}{x}$

donc $f' = u'v + v'u - w'$ avec $u'(x) = 1$; $v'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$ et $w'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

donc $f'(x) = 1 \times \ln\left(x^2\right) + \dfrac{2}{x} \times x + \dfrac{1}{x^2} = \ln\left(x^2\right) + 2 + \dfrac{1}{x^2} = 2\ln(x) + 2 + \dfrac{1}{x^2}$.

b. f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables

$f''(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{-2x}{x^4} = \dfrac{2x^2}{x^3} - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2(x^2-1)}{x^3} = \dfrac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$.

3. **a.** On étudie le signes de $f''(x)$:

x	0		1		$+\infty$
signes de $x+1$		$+$		$+$	
signes de $x-1$		$-$	0	$+$	
signes de x^3		$+$		$+$	
signes de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

f est donc concave sur $]0\,;1[$ et convexe sur $]1\,;+\infty[$.

La dérivée s'annulant en $x=1$ en changeant de signe, $\mathscr{C}_f$ a un point d'inflexion en $x=1$, c'est le point $A(1\,;-1)$.

b. On utilise le tableau de signes de $f''(x)$ pour établir le tableau de variations de f' :

x	0		1		$+\infty$
signes de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f'	‖	↘	3	↗	

$f'(1)=2\ln(1)+2+\dfrac{1}{1^2}=3.$

f' admet pour minimum 3 sur $]0\,;+\infty[$ donc $\forall x\in]0\,;+\infty[$, $f'(x)>0$ donc f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

4. **a.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ donc $0\in\left]\lim\limits_{x\to 0} f(x)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$.

De plus f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (son corollaire) l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$.

b. En utilisant la calculatrice on trouve $1{,}327\leqslant\alpha\leqslant 1{,}328$ donc $\alpha\approx 1{,}33$ au centième près.

de plus $f(\alpha)=0\iff\alpha\ln\left(\alpha^2\right)-\dfrac{1}{\alpha}=0\iff\ln\left(\alpha^2\right)=\dfrac{1}{\alpha^2}\iff\alpha^2=\exp\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$ par croissance de la fonction exponentielle.