Annales baccalauréat spécialité
Probabilités, dénombrement et variables aléatoires

Exercice 1.

Un sac opaque contient dix boules indiscernables au toucher et numérotées de 0 à 9.

Une partie d'un jeu consiste à tirer deux boules dans ce sac, successivement et sans remise, pour former un nombre à deux chiffres dont le premier chiffre est le numéro de la première boule tirée et le deuxième chiffre est le numéro de la deuxième boule tirée.
Par exemple si l'on tire successivement la boule 6 puis la boule 2 le nombre formé est 62.

Partie A

1. Justifier que l'on peut former 90 nombres différents à l'aide de ce processus.
2. Pour gagner à ce jeu il faut réaliser l'évènement S : « le nombre à deux chiffres ainsi formé contient deux chiffres tous deux inférieurs ou égaux à 5 ».
   a. Combien de nombres gagnants sont possibles à l'issue de ce jeu ? Justifier.
   b. On note $P(S)$ la probabilité de l'évènement S.
   Montrer que $P(S) = \dfrac{1}{3}$.
3. Parmi tous les nombres à deux chiffres que l'on peut former en jouant à ce jeu, combien ont au moins un des deux chiffres le composant qui soit supérieur ou égal à 8 ?

Partie B

Un joueur joue successivement 5 parties de ce jeu, en remettant entre chaque partie les deux boules tirées dans le sac.
On note alors X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par ce joueur, c'est-à- dire le nombre de fois où il réalise l'évènement S.
On rappelle que $P(S) = \dfrac{1}{3}$.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
   Préciser les paramètres de cette loi.
2. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que ce joueur gagne exactement deux parties.
3. Déterminer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Soit n un entier naturel non nul.
   On considère ici que le joueur joue n parties de ce jeu, en remettant entre chaque partie les deux boules tirées dans le sac, et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par ce joueur.
   a. Montrer que $P(Y \geqslant 1) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
   b. Combien de parties ce joueur doit-il jouer au minimum pour que la probabilité qu'il en gagne au moins une, soit supérieure ou égale à 0,99 ?

Partie C

Cette partie est indépendante des parties A *et* B.
On note Z la variable aléatoire qui à une partie de ce jeu associe le nombre à deux chiffres obtenu après une partie.
Dans la suite on admet que : $E(Z) = 49,5$ et $V(Z) = 815$.

1. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montrer que l'on a :

$$P(|Z-49,5)| \geqslant 40) \leqslant 0,51$$

2. En déduire que le nombre à deux chiffres obtenu à ce jeu a au moins 49 % de chances d'être compris entre 10 et 89.

Corrigé

Partie A

1. Pour le chiffre des dizaines, il y a 10 possibilités. Pour le chiffre des unités, il reste 9 possibilités car le tirage est sans remise. Ainsi le nombre de nombres que l'on peut former après le tirage est $10 \times 9 = 90$.

2. **a.** On détermine le nombre d'issues favorables à l'évènement.

6 possibilités pour le premier chiffre $\{0;1;2;3;4;5\}$ sont favorables et 5 possibilités pour le chiffre des unités pour chaque chiffre des dizaines : $\{1;2;3;4;5\}$, $\{0;2;3;4;5\}$, $\{0;1;3;4;5\}$, $\{0;1;2;4;5\}$, $\{0;1;2;3;5\}$, $\{0;1;2;3;4\}$. Cela donne $6 \times 5 = 30$ issues favorables.

Il y a 30 nombres gagnants possibles à ce jeu.

b. On utilise l'hypothèse d'équiprobabilité où chaque nombre à la même chance d'apparaître.

Sous cette hypothèse : $P(S) = \dfrac{30}{90} = \dfrac{1}{3}$.

3. On décompose l'évènement en évènements deux à deux disjoints :

E_1 : « le premier chiffre est supérieur ou égal à 8 et le deuxième chiffre inférieur strictement à 8. »

E_2 : « le premier chiffre est inférieur strictement à 8 et le deuxième chiffre supérieur ou égal à 8. »

E_3 : « les deux chiffres sont supérieur ou égaux à 8. »

$\text{Card}(E_1) = 2 \times 8 = 16$

$\text{Card}(E_2) = 8 \times 2 = 16$

$\text{Card}(E_3) = 2 \times 1 = 2$

Ainsi le cardinal de l'évènement considéré est $16 + 16 + 2 = 34$.

Partie B

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(5\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

2. $P(X=2) = P(S)^2\,(1-P(S))^{5-2} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \approx 0,032$.

3. $\mathbf{E}(X) = 5 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$

Si on répète un grand nombre de fois, en moyenne on gagne environ $\dfrac{5}{3} \approx 1,67$ parties sur 5.

4. **a.** $\{Y<1\} = \{Y=0\}$ est l'évènement correspondant à « aucune partie n'a été gagnée ». Sa probabilité vaut $\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y<1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

b. On cherche la valeur de n plus petit entier tel que $1-\left(\frac{2}{3}\right)^n \geqslant 0{,}99$.

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n \geqslant 0{,}99 \iff \left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant 0{,}01 \iff \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)n} \leqslant \mathrm{e}^{0{,}01} \iff \ln\left(\frac{2}{3}\right)n \leqslant \ln(0{,}01) \iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

Comme $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 11{,}36$ alors $n \geqslant 12$.

Partie C

1. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$\forall t \in \mathbb{R}^{*+}, \quad P\Big(\big|Z-E(Z)\big| \geqslant t\Big) \leqslant \dfrac{V(Z)}{t^2}$.

$$P(|Z-49{,}5)| \geqslant 40) \leqslant \frac{815}{40^2}$$

et $\dfrac{815}{40^2} \approx 0{,}509\,375$

On a donc :

$$P(|Z-49{,}5)| \geqslant 40) \leqslant 0{,}51$$

2.

$$1-P(|Z-49{,}5)| \geqslant 40) \geqslant 0{,}49$$

$$P(|Z-49{,}5)| < 40) \geqslant 0{,}49$$

$$P(9{,}5 < Z < 89{,}5) \geqslant 0{,}49$$

et

$$P(10 \leqslant Z \leqslant 89) \geqslant P(9{,}5 < Z < 89{,}5) \geqslant 0{,}49$$

La probabilité que le nombre à deux chiffres obtenu à ce jeu a au moins 49 % (0,49) de chances d'être compris entre 10 et 89.

Exercice 2.

Le comité de surveillance d'un centre hospitalier enquête sur les infections susceptibles d'être contractées par un patient au cours d'un séjour dans leur établissement. Le service dans lequel se trouve le patient a une influence sur le risque d'infection.
Il a obtenu les résultats suivants :

- 69 % des patients hospitalisés étaient dans le service de médecine et 6,8 % d'entre eux ont été atteints d'une infection.
- 26 % des patients hospitalisés étaient dans le service de chirurgie et 7,5 % d'entre eux ont été atteints d'une infection.
- Le reste des patients hospitalisés était dans le service de réanimation. Parmi eux, 24 % ont été atteints d'une infection.

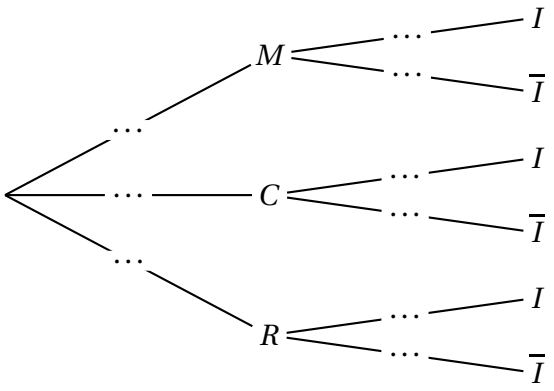
PARTIE A

On choisit au hasard un patient de ce centre hospitalier.
On définit les évènements suivants :

- M : « Le patient est hospitalisé dans le service de médecine »
- C : « Le patient est hospitalisé dans le service de chirurgie »
- R : « Le patient est hospitalisé dans le service de réanimation »
- I : « Le patient est atteint par une infection »

On note $\overline{S}$ l'évènement contraire de l'évènement S.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation de l'énoncé.



2. Montrer que la probabilité que le patient soit atteint d'une infection est égale à 0,078 42.

3. On interroge au hasard un patient de ce centre hospitalier parmi les personnes qui n'ont pas contracté une infection.

Déterminer la probabilité qu'il soit hospitalisé dans le service de réanimation. En donner une valeur arrondie au millième.

PARTIE B

On suppose dans cette partie que la probabilité qu'un patient hospitalisé soit atteint par une infection est $p = 0,078$.
Soit n un entier naturel non nul. On appelle X_n la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de n patients hospitalisés, donne le nombre d'entre eux atteints par une infection.
Le nombre de patients est suffisamment important pour assimiler le choix d'un échantillon de n patients à un tirage avec remise.

1. Justifier que la variable aléatoire X, suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. On note P_n la probabilité que dans un échantillon de n patients, il y ait au moins un patient atteint d'une infection.

a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n.

b. Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que la probabilité P_n est supérieure ou égale à 0,99.

3. On s'intéresse à la variable aléatoire R_n égale à la proportion de patients atteints par une infection dans un échantillon de n personnes, où n désigne un entier naturel strictement positif.

On a donc $R_n = \dfrac{X_n}{n}$.

On note $E(R_n)$ l'espérance et $V(R_n)$ la variance de la variable aléatoire R_n.

a. Justifier que $E(R_n) = 0,078$.

b. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

c. On admet que $V(R_n) = \dfrac{0,071\,916}{n}$.

Montrer que : $P(|R_n) - 0,078| \geqslant 0,1) \leqslant \dfrac{7,2}{n}$.

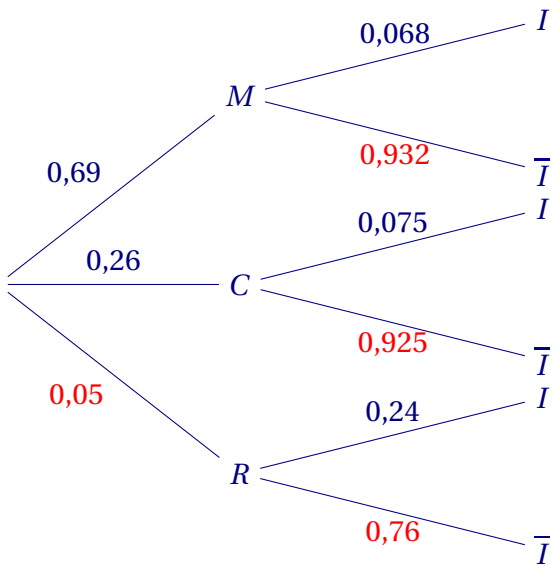
d. Un laboratoire effectue des prélèvements sur un échantillon de 500 patients hospitalisés dans ce centre. 20 % de ces prélèvements indiquent la présence d'une infection.

En exploitant l'inégalité précédente, justifier que cette situation peut être considérée comme exceptionnelle.

Corrigé

Partie A

1. L'arbre pondéré modélisant la situation de l'énoncé est le suivant :



Les probabilités en noir sont données dans l'énoncé, celles en rouge sont calculées par complémentarité.

2. Calculons la probabilité que le patient soit atteint d'une infection. Les évènements M, C et R formant une partition, la formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$\begin{aligned} P(I) &= P(M \cap I) + P(C \cap I) + P(R \cap I) \\ &= P(M) \times P_M(I) + P(C) \times P_C(I) + P(R) \times P_R(I) \\ &= 0{,}69 \times 0{,}068 + 0{,}26 \times 0{,}075 + 0{,}05 \times 0{,}24 \\ &= 0{,}078\,42 \end{aligned}$$

3. Il s'agit de calculer $P_{\overline{I}}(R)$:

$$P_{\overline{I}}(R) = \frac{P(R \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \frac{P_R(\overline{I})P(R)}{1 - P(I)} = \frac{0{,}76 \times 0{,}05}{1 - 0{,}078\,42} \approx 0{,}041 \quad \text{arrondi au millième}$$

Partie B

1. La variable X_n dénombre les succès d'une expérience à deux issues, succès (de probabilité p) et échec, répétée n fois. L'échantillon étant supposé être assimilé à un tirage sans remise, on peut donc conclure que la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètres $p = 0{,}078$ et n.

2. a. Calculons p_n, probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au moins un patient atteint de l'infection :

$$p_n = P(X_n \geqslant 1) = 1 - P(X_n < 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - p^0(1-p)^n = 1 - (1-p)^n = 1 - 0{,}922^n.$$

b. Il s'agit de déterminer le plus petit entier n à partir duquel $p_n \geqslant 0{,}99$:

$$p_n \geqslant 0{,}99 \iff 1 - 0{,}922^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}922^n \leqslant 0{,}01 \iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}922)} \approx 56{,}7.$$

À partir d'un échantillon de 57 patients, la probabilité qu'il y ait au moins un malade infecté est supérieure à 0,99.

3. a. Calculons l'espérance de la variable R_n :

$$E(R_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n} \times np = p.$$

En effet, X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p, donc d'espérance np.

b. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une variable aléatoire X d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$ s'écrit :

$$\text{Pour tout } \delta > 0, \text{ on a : } P(|X - E(X)|) \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

c. Si on admet que $V(R_n) = \dfrac{0{,}071\,916}{n}$, l'inégalité précédente devient dans le cas d'un écart $\delta = 0{,}1$:

$$P(|R_n - E(R_n)| \geqslant 0{,}1) = P(|R_n - 0{,}078|) \geqslant 0{,}1) \leqslant \frac{V(R_n)}{0{,}1^2} = \frac{0{,}071\,916}{0{,}01n} = \frac{7{,}1916}{n} \leqslant \frac{7{,}2}{n}.$$

d. Si on observe 20 % de patients infectés dans un échantillon de 500 patients hospitalisés, l'inégalité dans cette cette situation devient :

$$P(|R_{500} - 0,078)| \geqslant 0,122) \leqslant \frac{V(R_{500})}{0,122^2} = \frac{0,071\,916}{0,122^2 \times 500} \approx 0,009\,7.$$

La probabilité d'observer un écart aussi grand que 0,122 est inférieure à 0,01, ce qui nous permet de dire qu'il s'agit d'une situation exceptionnelle.

.

Exercice 3.

Partie A

Une joueuse de basket constate qu'elle réussit 60 % de ses lancers francs au cours d'une séance d'entraînement.

En se basant sur ces statistiques, on modélise la situation comme une succession d'épreuves aléatoires indépendantes.

1. Cette joueuse effectue cinq lancers consécutifs.

a. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers réussis.

Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $P(X \geqslant 4)$.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. On suppose maintenant que cette sportive doit effectuer n lancers, où n est un entier naturel non nul.

Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de lancers réussis.

On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,6$.

a. Montrer que $P(Y \geqslant 1) = 1 - 0,4^n$.

b. En déduire le nombre n de lancers à partir duquel la probabilité d'en réussir au moins un dépasse 0,999 9.

c. Recopier et compléter le script de la fonction Python suivante afin qu'elle permette de retrouver le résultat de la question **2. b.**

```
def basket ():
    p = 0.6
    n = 1
    while ..... :
        n = n + 1
        p = .....
    return ...
```

Partie B

Pour un autre joueur, on remarque que :

- lorsqu'il a réussi un lancer franc, il réussit le suivant avec une probabilité de $0,7$.
- lorsqu'il a raté un lancer franc, il réussit le suivant avec une probabilité de $0,4$.

On considère que la probabilité de réussir son premier lancer est de 0,5
On note G_1 l'évènement : « le joueur réussit son premier lancer franc ».
On a donc $P(G_1) = 0,5$.
On note G_2 l'évènement : « le joueur réussit son deuxième lancer franc ».

1. Calculer $P(G_2)$.

On pourra utiliser un arbre de probabilité.

Soit n un entier naturel non nul.
On note G_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième lancer franc » et p_n, la probabilité de G_n.
On définit ainsi une suite (p_n) de réels.
On admet que pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0,3p_n + 0,4$.

2. a. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que

$$\text{pour tout } n \geqslant 1, \quad p_n \leqslant p_{n+1}$$

b. Quel argument permet d'affirmer que la suite (p_n) est majorée ?

c. En déduire que la suite (p_n) est convergente.

3. On admet que la limite de (p_n) quand n tend vers $+\infty$ est $\dfrac{4}{7}$.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

Partie A

1. a. On considère l'expérience aléatoire « la joueuse effectue un lancer franc ». C'est une épreuve de Bernoulli dont le succès est l'évènement « la joueuse réussi son lancer ». La probabilité du succès est $p = 0,6$.

On répète cette expérience $n = 5$ fois de manière identique et indépendante donc la variable aléatoire qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $p = 0,6$ et $n = 5$.

b. $P(X \geqslant 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$.

La calculatrice donne $P(X \geqslant 4) \approx 0,34$. Cela signifie que pour environ 34 % des séries de 5 lancers francs de cette joueuse à l'entraînement, elle réussit au moins 4 des 5 lancers.

2. a.
$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) &= 1 - P(Y < 1) \\ &= 1 - P(Y = 0) \quad \text{car } Y \text{ prend des valeurs entières entre 0 et } n. \\ &= 1 - \binom{n}{0} \times 0,6^0 \times 0,4^n \\ &= 1 - 0,4^n \end{aligned}$$

On a donc bien : $P(Y \geqslant 1) = 1 - 0,4^n$.

b. Ici, on cherche n tel que $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}999\,9$.

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}999\,9 &\iff 1 - 0{,}4^n \geqslant 0{,}999\,9 \\ &\iff -0{,}4^n \leqslant -0{,}000\,1 \\ &\iff 0{,}4^n \leqslant 0{,}000\,1 \quad \text{car } -1 < 0 \\ &\iff n \ln(0{,}4) \leqslant \ln(0{,}000\,1) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}000\,1)}{\ln(0{,}4)} \quad \text{car } \ln(0,4) < 0 \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}000\,1)}{\ln(0{,}4)} \approx 10{,}052$.

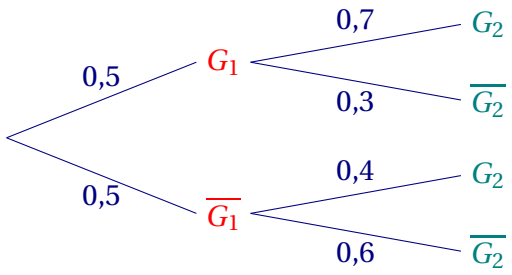
À partir de 11 lancers, la probabilité d'en réussir au moins un est supérieure à 0,999 9.

c. Voici le script Python complété :

```
def basket():
    p = 0.6
    n = 1
    while p < 0.9999 :
        n = n + 1
        p = 1 - 0.4**n
    return n
```

Partie B

1. On représente la situation à l'aide d'un arbre de probabilité



G_1 et $\overline{G_1}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(G_1 \cap G_2) + P(\overline{G_1} \cap G_2) \\ &= 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}4 \\ &= 0{,}55 \end{aligned}$$

2. a. Initialisation. Pour $n = 1$, on a $p_1 = 0{,}5$ et $p_2 = 0{,}55$.

On vérifie que $p_1 \leqslant p_2$ donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité. Soit n un entier naturel non nul ($n \geqslant 1$), on suppose que l'inégalité est vraie pour cet entier n. Il faut démontrer que, pour cet entier $n \geqslant 1$, si $p_n \leqslant p_{n+1}$ alors $p_{n+1} \leqslant p_{n+2}$.

D'après l'hypothèse de récurrence : $p_n \leqslant p_{n+1} \Longrightarrow 0{,}3p_n \leqslant 0{,}3p_{n+1}$ car $0{,}3 > 0$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow 0{,}3p_n + 0{,}4 \leqslant 0{,}3p_{n+1} + 0{,}4 \\ &\Longrightarrow p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est héréditaire.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc pour tout $n \geqslant 1$, $\quad p_n \leqslant p_{n+1}$.
Autrement dit, la suite (p_n) est croissante.

b. p_n est la probabilité que le joueur réussisse son n-ième lancer franc, on a donc $\quad 0 \leqslant p_n \leqslant 1$.
La suite (p_n) est bornée par 0 et 1, et donc elle est majorée par 1.

c. D'après les deux questions précédentes, la suite (p_n) est croissante et majorée par 1 : on en déduit qu'elle est convergente, vers une limite inférieure ou égale à 1.

3. Le fait que la limite de (p_n) quand n tend vers $+\infty$ est $\frac{4}{7}$ signifie qu'après un grand nombre de lancers francs, ce joueur va réussir en moyenne 4 lancers sur 7.

Exercice 4.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-1} près.
Les parties A, B et C sont indépendantes les unes des autres et peuvent donc être traitées séparément.

Partie A

On s'intéresse au respect des délais de livraison de colis à domicile dans une agglomération. Une étude a permis d'établir que :

- lorsque le livreur est expérimenté, le délai de livraison est respecté pour 95 % des colis ;
- lorsque le livreur est débutant, le délai de livraison est respecté pour 75 % des colis.

Dans une entreprise qui emploie ses propres livreurs parmi lesquels 60 % sont expérimentés et les autres sont débutants, on s'intéresse à une livraison choisie au hasard.
On note :

- E l'évènement : « la livraison est effectuée par un livreur expérimenté » ;
- R l'évènement : « le délai de livraison est respecté ».

1. Calculer $P(E \cap R)$.
On pourra s'appuyer sur un arbre de probabilité.

2. Justifier que $P(R) = 0,87$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Sachant qu'un colis a été livré en respectant les délais de livraison, quelle est la probabilité qu'il ait été livré par un livreur expérimenté ?

Partie B

Dans le but d'améliorer le service livraison, l'entreprise analyse un échantillon de 200 livraisons prises au hasard parmi celles effectuées par un livreur expérimenté sur une période donnée.
On rappelle que la probabilité qu'un livreur expérimenté respecte les délais de livraison est 95 %.
On suppose que le nombre de colis est assez important pour que l'on puisse assimiler le choix de cet échantillon à des tirages successifs avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de colis livrés en respectant les délais de livraison parmi les livraisons de cet échantillon.

1. Justifier que la variable aléatoire suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. L'évènement « tous les colis ont été livrés en respectant les délais de livraison » est-il un événement impossible ? Justifier.
3. Donner $P(X \geqslant 190)$ puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Deux zones géographiques sont desservies sans que les livraisons dans l'une n'aient d'incidence sur celles dans l'autre :

- en zone A, les délais de livraison sont respectés dans 85 % des cas ;
- en zone B, les délais de livraison sont respectés dans 90 % des cas.

L'entreprise observe 120 livraisons effectuées en zone A et 80 livraisons effectuées en zone B.
On note :

- X_A la variable aléatoire comptabilisant le nombre de colis livrés respectant les délais de livraison en zone A ;
- X_B la variable aléatoire comptabilisant le nombre de colis livrés respectant les délais de livraison en zone B ;
- $S = X_A + X_B$ la variable aléatoire donnant le nombre total de colis livrés respectant les délais de livraison.

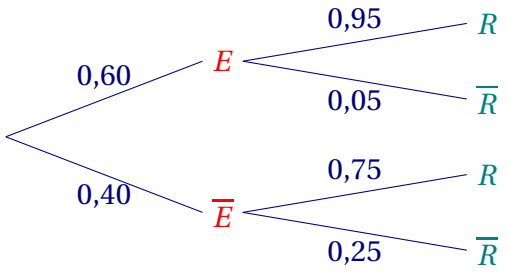
On admet que X_A suit une loi binomiale $\mathscr{B}(120\,;\,0,85)$ et que X_B suit une loi binomiale $\mathscr{B}(80\,;\,0,90)$

1. Calculer l'espérance et la variance des variables X_A et X_B.
2. Calculer $E(S)$.
3. Quelle condition permet d'affirmer que $V(S) = 22,5$?
4. À l'aide d'une inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer $P(S \in [165\,;\,183])$ et interpréter le résultat.

Corrigé

Partie A

1. On représente la situation à l'aide d'un arbre de probabilité



On a : $P(E \cap R) = P(E) \times P_E(R) = 0,60 \times 0,95 = 0,57$.

2. E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(R) &= P(E \cap R) + P\left(\overline{E} \cap R\right) \\ &= 0,57 + 0,40 \times 0,75 \\ &= 0,57 + 0,30 \\ &= 0,87 \end{aligned}$$

Cela signifie que dans cette entreprise, 87 % des livraisons respectent le délai de livraison.

3. On cherche $P_R(E)$: $P_R(E) = \dfrac{P(E \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}57}{0{,}87} = \dfrac{19}{29} \approx 0{,}655$.

Partie B

1. On considère l'expérience aléatoire « choisir une livraison effectuée par un livreur expérimenté ». C'est une épreuve de Bernoulli dont le succès est l'évènement « le délai est respecté ». La probabilité du succès est $p = 0{,}95$.

On répète cette expérience $n = 200$ fois de manière identique et indépendante (tirages assimilés à des tirages avec remise) donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}95$.

2. L'évènement « tous les délais sont respectés » est l'évènement $\{X = 200\}$.

$P(X = 200) = \binom{200}{200} \times 0{,}95^{200} \times 0{,}05^0 = 0{,}95^{200} \approx 3{,}5 \times 10^{-5}$.

On a donc $P(X = 200) > 0$: l'évènement n'est pas impossible, il est seulement très peu probable (sa probabilité arrondie à 10^{-3} est égale à 0,000).

3. $P(X \geqslant 190) = 1 - P(X \leqslant 189)$.

La calculatrice donne $P(X \geqslant 190) \approx 0{,}583$. Cela signifie que la probabilité qu'au moins 190 des 200 colis de l'échantillon soient livrés dans les délais est d'environ 58,3 %.

Partie C

1. X_A suit la loi binomiale de paramètres $n = 120$ et $p = 0{,}85$ donc :

$E(X_A) = 120 \times 0{,}85 = 102$ et $V(X_A) = 120 \times 0{,}85 \times 0{,}15 = 15{,}3$.

X_B suit la loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}90$ donc :

$E(X_B) = 80 \times 0{,}90 = 72$ et $V(X_B) = 80 \times 0{,}90 \times 0{,}10 = 7{,}2$.

2. Par linéarité de l'espérance : $E(S) = E(X_A) + E(X_B) = 102 + 72 = 174$.

3. Si les variables aléatoires X_A et X_B sont indépendantes, alors la variance de leur somme est la somme de leurs variances :

$V(S) = V(X_A) + V(X_B) = 15{,}3 + 7{,}2 = 22{,}5$.

C'est donc l'indépendance de X_A et X_B qui permet d'affirmer que $V(S) = 22{,}5$; elle est assurée ici par l'énoncé (les livraisons d'une zone n'ont pas d'incidence sur celles de l'autre).

4. L'intervalle [165 ; 183] est centré sur $E(S) = 174$: $S \in [165\,;\,183] \iff |S - 174| \leqslant 9$.

Comme S ne prend que des valeurs entières, cela équivaut à $|S - 174| < 10$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $a > 0$, on a : $P\big(|S - E(S)| \geqslant a\big) \leqslant \dfrac{V(S)}{a^2}$.

En l'appliquant pour $a = 10$, on obtient : $P\big(|S - 174| \geqslant 10\big) \leqslant \dfrac{22{,}5}{10^2}$ soit $P\big(|S - 174| \geqslant 10\big) \leqslant 0{,}225$.

En passant à l'évènement contraire :

$P\big(S \in [165\,;\,183]\big) = P\big(|S - 174| < 10\big) = 1 - P\big(|S - 174| \geqslant 10\big) \geqslant 1 - 0{,}225$.

On peut donc conclure : $P\big(S \in [165\,;\,183]\big) \geqslant 0{,}775$.

La probabilité que le nombre total de colis livrés dans les délais soit compris entre 165 et 183 est au moins de 77,5 %.

Exercice 5.

Dans cet exercice, on s'intéresse à la part des filles et des garçons s'orientant vers des études scientifiques après avoir suivi un enseignement de spécialité mathématiques en terminale.
Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans une académie donnée, la population est constituée d'élèves de terminale ayant choisi la spécialité mathématiques. On souhaite analyser leurs choix d'orientation, notamment vers les études supérieures en ingénierie.
Les répartitions sont les suivantes :

- 40 % sont des filles ; 60 % sont des garçons ;
- parmi les filles, 33,75 % envisagent des études d'ingénieur ;
- parmi les garçons, 54,25 % envisagent des études d'ingénieur.

On interroge uniformément au hasard un élève de terminale ayant choisi la spécialité mathématiques de cette académie et on considère les évènements suivants :

- F : « L'élève est une fille » ;
- I : « L'élève envisage des études d'ingénieur ».

Pour un évènement E quelconque, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire et $P(E)$ la probabilité de E.

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que l'élève choisi au hasard soit une fille envisageant des études d'ingénieur.

3. Démontrer que la probabilité que l'élève choisi au hasard envisage des études d'ingénieur est égale à $0,4605$.

4. L'élève interrogé envisage des études d'ingénieur. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une fille ?
Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} *près.*

Partie B

Dans cette partie, on considère un entier naturel n non nul.
On interroge uniformément au hasard dans cette académie n filles en terminale, qu'elles suivent ou non la spécialité mathématiques. On suppose que ce nombre de filles est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à des tirages indépendants avec remise.
On note X la variable aléatoire qui modélise le nombre de filles envisageant de devenir ingénieure qu'elle suive ou non la spécialité mathématiques.
On admet que la probabilité qu'une fille souhaite devenir ingénieure est égale à $0,15$.

1. **a.** Justifier que X suit une loi binomiale.

b. Exprimer en fonction de n l'espérance de X.

2. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit nombre de lycéennes qu'il faut interroger pour que la probabilité de l'évènement « Au moins une fille parmi celles interrogées souhaite devenir ingénieure » soit supérieure ou égale à $0,99$.

3. Dans cette question, on choisit un échantillon de $n = 29$ filles.

Déterminer la probabilité qu'au moins le quart des filles interrogées souhaite devenir ingénieure. *Donner une valeur approchée du résultat à* 10^{-3} *près.*

Partie C

On s'intéresse à dix académies françaises de tailles comparables numérotées de 1 à 10.
On considère X_1 la variable aléatoire qui, à un échantillon de 1 500 lycéennes de l'académie n° 1, associe le nombre de filles envisageant de devenir ingénieure.
On définit de la même façon les variables aléatoires $X_2, \ldots, X_{10}$ pour les académies 2 à 10.
On admet que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ sont indépendantes entre elles et qu'elles admettent la même espérance égale à 225 et la même variance égale à 191,25.
On considère la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$.

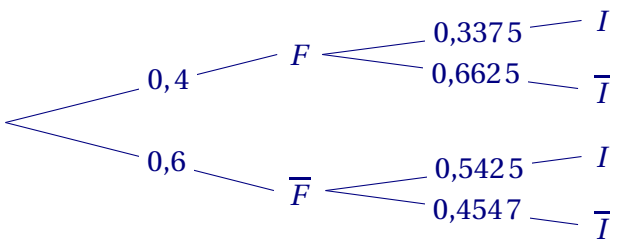
1. Que représente la variable aléatoire S pour les 15 000 lycéennes interrogées sur l'ensemble des dix académies ?
2. Calculer l'espérance et la variance de S.
3. On considère l'ensemble des 15 000 lycéennes formé par les échantillons issus des dix académies.

   Argumenter pour dire si l'affirmation suivante est vraie, fausse ou si on ne peut pas savoir : « La probabilité que le nombre total de filles envisageant de devenir ingénieure soit strictement compris entre 2 000 et 2 500 est supérieure à 0,95 ».

Corrigé

Partie A

1. D'après l'énoncé voici l'arbre pondéré des évènements F et I :



2. Il faut trouver $P(F \cap I) = P(F) \times P_F(I) = 0,4 \times 0,3375 = 0,135$.
3. On a de même $P\left(\overline{F} \cap I\right) = P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(I) = 0,6 \times 0,5425 = 0,3225$.

   D'après la loi des probabilités totale la probabilité que l'élève choisi au hasard envisage des études d'ingénieur est égale à :

   $P(I) = P(F \cap I) + P\left(\overline{F} \cap I\right) = 0,135 + 0,3225 = 0,4605$.
4. On calcule $P_I(F) = \dfrac{P(F \cap I)}{P(I)} = \dfrac{0,135}{0,4605} \approx 0,2932$ soit 0,293 au millième près.

   Parmi les élèves envisageant des études d'ingénieur un peu moins de 30 % sont des filles.

Partie B

1. a. Le nombre n est assez grand pour que l'on puisse considérer que chaque fille choisie ait une probabilité de vouloir devenir ingénieure est égale à 0,15 : la variable X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,15$.

b. On sait que $E = n \times p = n \times 0,15 = 0,15n$.

2. On a : $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,15^0 \times (1-0,15)^n = 1 - 0,85^n$.

Il faut donc que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 \iff 1 - 0,85^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,85^n$,

d'où par croissance de la fonction logarithme népérien :

$\ln 0,01 \geqslant n \ln 0,85 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,85} \leqslant n$ car $\ln 0,85 < 0$.

Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,85} \approx 28,3$.

Il faut donc interroger au moins 29 lycéennes.

3. On a $\dfrac{29}{4} = 7,25$. Il faut donc choisir sur les 29 filles 8 qui souhaitent devenir ingénieure, d'où :

$P(X \geqslant 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - P(X \leqslant 7)$: la calculatrice donne environ 0,059 : sur 29 filles interrogées la probabilité qu'au moins le quart souhaite devenir ingénieure est légèrement inférieure à 6 %.

Partie C

1. S représente le nombre de lycéennes souhaitant devenir ingénieure parmi les 15 000 lycéennes interrogées.

2. $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(X_1 + \ldots + X_{10}) = \mathrm{E}(X_1) + \ldots \mathrm{E}(X_{10})$ par linéarité ;

$\mathrm{E}(S) = 10\mathrm{E}(X)$ car toutes les variables aléatoires ont la même espérance, donc :

$\mathrm{E}(S) = 10 \times 225 = 2\,250$.

Il en est de même pour la variance de S :

$\mathrm{V}(S) = \mathrm{V}(X_1 + \ldots + X_{10}) = \mathrm{V}(X_1) + \ldots + \mathrm{V}(X_{10})$ car les lois sont indépendantes.

$\mathrm{V}(S) = 10\mathrm{V}(X)$ car elles suivent la, même loi de probabilité.

$\mathrm{V}(S) = 10 \times 191,25 = 1\,912,5$.

3. On sait que S a une espérance. Utilisons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour minorer la probabilité d'avoir un nombre de lycéennes désirant devenir ingénieure compris entre 2 000 et 2 500 :

$P(2\,000 < S < 2\,500) = P(-250 < S - \mathrm{E}(S) < 250) = P(|S - \mathrm{E}(S)| < 250)$ ou

$P(2\,000 < S < 2\,500) = 1 - P(|S - \mathrm{E}(S)| \geqslant 250$; d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$P(2\,000 < S < 2\,500) \geqslant 1 - \dfrac{\mathrm{V}(S)}{250^2}$ soit

$P(2\,000 < S < 2\,500) \geqslant 1 - \dfrac{1\,912,5}{62\,500}$

$P(2\,000 < S < 2\,500) \geqslant 1 - 0,030\,6$ et finalement,

$P(2\,000 < S < 2\,500) \geqslant 0,969\,4 > 0,95$.

Conclusion : à 5 % près l'affirmation est vraie.

Exercice 6.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

On s'intéresse à un réseau de communication constitué d'une chaîne de relais (satellites, antennes, opérateurs ...) pour transmettre des messages.

À chaque transmission entre deux relais successifs, des erreurs peuvent apparaitre dans le message.
Une étude statistique a permis d'établir que pour chaque relai :

- si le message reçu est sans erreur, il a 94% de chances d'être transmis sans erreur au relai suivant ;
- si le message reçu comporte des erreurs, il y a 35% de chances que les erreurs soient corrigées et donc que le message soit transmis sans erreur au relai suivant.

On choisit au hasard un message envoyé au cours d'une journée.

Pour un évènement E quelconque, on désigne par $\overline{E}$ son évènement contraire et par $P(E)$ sa probabilité.

Partie A

On considère les évènements suivants :

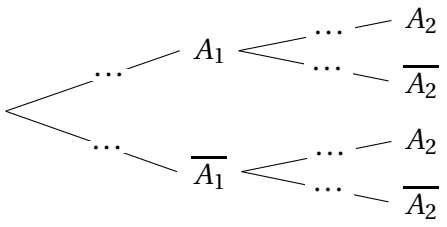
- A_1 : « le message reçu par le premier relai est sans erreur » ;
- A_2 : « le message reçu par le deuxième relai est sans erreur ».

On admet que $P(A_1) = 0,96$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

2. Montrer que $P(A_2) = 0,9164$.

3. Calculer $P_{A_2}\left(\overline{A_1}\right)$.
On arrondira le résultat à 10^{-4}.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.



Partie B

Pour vérifier le bon fonctionnement d'un relai, des tests indépendants les uns des autres sont effectués.
Un test est positif si la présence d'au moins une erreur est détectée.
On admet que la probabilité qu'un test soit positif est égale à 0,04.
On choisit au hasard un échantillon de 50 tests réalisés sur le relai.
Le nombre de tests réalisés est suffisamment grand pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

1. On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 50 tests associe le nombre de tests positifs.
Ainsi la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,04$.

a. Déterminer la probabilité que 4 tests soient positifs dans cet échantillon.
On arrondira le résultat à 10^{-2}.

b. Donner la probabilité qu'au moins un test soit positif dans cet échantillon.
On arrondira le résultat à 10^{-2}.

c. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

2. On étudie une chaîne de transmission de l'information composée de 25 relais.
On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 50 tests pratiqués sur le relai 1 associe le nombre de tests positifs.

On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour le relai 2, …, X_{25} pour le relai 25.

On admet que ces 25 variables aléatoires sont indépendantes entre elles et qu'elles admettent la même espérance égale à 2 et la même variance égale à 1,92.

On note M la variable aléatoire donnant la moyenne du nombre de tests positifs lors des contrôles effectués sur les 25 relais.

On a donc $M = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{25}}{25}$.

a. Vérifier que $\mathrm{E}(M) = 2$ et montrer que $\mathrm{V}(M) = 0{,}0768$.

b. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que la moyenne des tests positifs soit strictement inférieure à 7 est supérieure à 0,99.

Indication : on pourra utiliser, sans justification, le fait que :

$$P(M < 7) = P(-3 < M < 7).$$

Partie C

On désigne par n un entier naturel non nul.
On s'intéresse à une chaîne de transmission de l'information composée de n relais.
On considère l'évènement A_n : « le message reçu par le n-ième relai est sans erreur ».
On note p_n la probabilité que le message reçu au n-ième relai soit sans erreur.
On a ainsi $p_n = P(A_n)$ et $p_1 = 0,96$.
On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$p_{n+1} = 0,59\,p_n + 0,35.$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\quad p_{n+1} \leqslant p_n$.

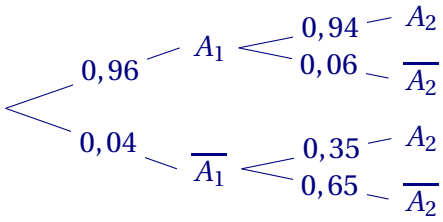
2. Montrer que la suite (p_n) est convergente.

3. Déterminer la valeur exacte de sa limite.

Corrigé

Partie A

1. L'arbre pondéré représentant la situation est :



2. Les événements A_1 et $\overline{A_1}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(A_2) \\ &= 0,96 \times 0,94 + 0,04 \times 0,35 \\ &= 0,9164 \end{aligned}$$

On a donc bien : $P(A_2) = 0,9164$.

3. $P_{A_2}\left(\overline{A_1}\right) = \dfrac{P\left(\overline{A_1} \cap A_2\right)}{P\left(A_2\right)}$.

$$= \frac{0,04 \times 0,35}{0,9164}$$
$$\approx 0,015277$$

Donc $P_{A_2}\left(\overline{A_1}\right) \approx 0,0153$, arrondi à 10^{-4}.

Dans le contexte de l'exercice, la probabilité que le message reçu par le premier relai soit avec erreur sachant que le message reçu par le deuxième relai était sans erreur est égale à 0,0153.

Partie B

1. a. Pour déterminer la probabilité que 4 tests soient positifs dans cet échantillon, il faut calculer $P(X = 4)$.

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,04$ donc :

$$P(X = 4) = \binom{50}{4} \times 0,04^4 \times (1 - 0,04)^{50-4} \approx 0,090159$$

La probabilité que 4 tests soient positifs dans cet échantillon est égale à 0,09, arrondi à 10^{-2}.

b. La probabilité qu'au moins un test soit positif dans cet échantillon est égale à $P(X \geqslant 1)$.

À l'aide de la calculatrice on trouve : $P(X \geqslant 1) \approx 0,8701$.

La probabilité qu'au moins un test soit positif dans cet échantillon est égale à 0,87, arrondi à 10^{-2}.

c. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,04$.

Donc :

$\mathrm{E}(X) = n \times p = 50 \times 0,04 = 2$

$\mathrm{V}(X) = n \times p \times (1 - p) = 50 \times 0,04 \times (1 - 0,04) = 1,92$.

L'espérance de la variable aléatoire X est égale à 2 et sa variance est égale à 1,92.

2. a. $M = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{25}}{25}$ est la variable aléatoire moyenne de 25 variables aléatoires indépendantes de même loi que X on a donc :

$\mathrm{E}(M) = \mathrm{E}(X) = 2$

et $\mathrm{V}(M) = \dfrac{\mathrm{V}(X)}{25}$

$$= \frac{1,92}{25}$$
$$= 0,0768$$

On a bien : $\mathrm{E}(M) = 2$ et $\mathrm{V}(M) = 0,0768$.

b. La probabilité que la moyenne des tests positifs soit strictement inférieure à 7 est égale à $P(M < 7)$.

On a : $P(M < 7) = P(-3 < M < 7) = P(-5 < M - 2 < 5) = 1 - P\left(\left|M - 2\right| \geq 5\right)$

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$\forall t \in \mathbb{R}^{*+}, \quad P\left(\left|M - E(M)\right| \geq t\right) \leq \dfrac{V(M)}{t^2}$.

Avec $t = 5$ on a : $P\left(\left|M - 2\right| \geq 5\right) \leq \dfrac{0,0768}{5^2}$

soit $P\left(\left|M - 2\right| \geq 5\right) \leq 0,003072$

On a donc : $1 - P\left(\left|M - 2\right| \geq 5\right) \geq 1 - 0,003072$

D'où : $P(M < 7) \geq 0,996928 \geq 0,99$

La probabilité que la moyenne des tests positifs soit strictement inférieure à 7 est donc supérieure à 0,99.

Partie C

1. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, posons P_n l'affirmation : « $p_{n+1} \leqslant p_n$. ».

Démontrons par récurrence que les affirmations P_n sont toutes vraies.

- **Initialisation :**

  $p_2 = 0,59p_1 + 0,35 = 0,59 \times 0,96 + 0,35 = 0,9164$.

  On a donc $p_2 \leqslant p_1$

  Donc que l'affirmation P_1 est vraie.
- **Hérédité :** Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est à dire $p_{n+1} \leqslant p_n$ »., montrons que l'affirmation P_{n+1} est vraie, c'est à dire $p_{n+2} \leqslant p_{n+1}$ ».

  P_n est vraie $\implies p_{n+1} \leqslant p_n$

  $\implies 0,59 \times p_{n+1} \leqslant 0,59 \times p_n$ car $0,59 > 0$

  $\implies 0,59 \times p_{n+1} + 0,35 \leqslant 0,59 \times p_n + 0,35$

  $\implies p_{n+2} \leqslant p_{n+1}$

  $\implies P_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :** On a montré que l'affirmation P_1 est vraie, et que pour un n entier naturel non nul, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.

  En vertu du principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel non nul n, l'affirmation est vraie, et donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $p_{n+1} \leqslant p_n$.

2. D'après la question précédente, pour tout entier naturel $n \leqslant 1$, on a $p_{n+1} \leqslant p_n$ donc la suite (p_n) est décroissante.

De plus, p_n est égal une probabilité donc $p_n \geqslant 0$, la suite (p_n) est donc minorée par 0.

Donc la suite (p_n) est convergente vers une limite ℓ.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,59x + 0,35$.

On a donc, pour tout entier naturel non nul n, $p_{n+1} = f(p_n)$.

La suite (p_n) est donc définie par une relation de récurrence avec f une fonction continue.

De plus, la suite (p_n) est convergente vers une limite ℓ.

D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est donc solution de l'équation $f(x) = x$.

$f(x) = x \iff 0,59x + 0,35 = x$

$\iff 0,35 = 0,41x$

$\iff x = \dfrac{0,35}{0,41}$

$\iff x = \dfrac{35}{41}$

(p_n) est donc convergente vers $\dfrac{35}{41}$.

Exercice 7.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Justifier chaque réponse.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On désigne par « musiciens professionnels » l'ensemble des femmes et hommes pratiquant un instrument de manière professionnelle.

1. Une étude a été réalisée auprès des musiciens professionnels pratiquant différents genres musicaux (Pop, Rap, Rock, Classique, etc.).

Cette étude indique que :

- 52 % des musiciens professionnels jouent de la Pop ;
- parmi les musiciens professionnels jouant de la Pop, 32 % sont des femmes ;
- 20 % des musiciens professionnels sont des femmes.

On choisit au hasard une personne dans l'ensemble des musiciens professionnels.

On note :

- O l'évènement : « la personne joue de la Pop » ;
- F l'évènement : « la personne est une femme ».

Affirmation 1 : Si la personne choisie est une femme, alors la probabilité qu'elle joue de la Pop est de 0,832.

2. La proportion de musiciens professionnels au sein de la population active dans le secteur de la culture est estimée à 6,2 %.

On prélève au hasard et de manière indépendante un échantillon de 5 000 personnes au sein de cette population.

La population considérée est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout échantillon ainsi défini, associe le nombre de musiciens professionnels dans l'échantillon.

Affirmation 2 : En arrondissant le résultat au dixième, on a $P(X \leqslant 340) \approx 0,4$.

Affirmation 3 : En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on peut affirmer qu'il y a plus de 95 % de chance que, sur cet échantillon de 5 000 actifs dans le secteur de la culture, le nombre de musiciens professionnels soit strictement compris entre 230 et 390.

3. Un jeu sur le thème de la culture de la Pop est proposé à 10 personnes dont 4 sont des musiciens professionnels.

Deux équipes de 5 joueurs s'affrontent.

Elles sont chacune constituées de 2 musiciens professionnels et de 3 personnes qui ne le sont pas.

Affirmation 4 : On peut former ainsi 120 équipes différentes.

Corrigé

1. **Affirmation 1 : Vraie.**

   Comme on choisit une personne au hasard, on est en situation d'équiprobabilité, et les proportions de l'énoncé sont assimilables à des probabilités.

   Si on traduit les informations données, on a :

   - $P(O) = 0,52$;
   - $P_O(F) = 0,32$;
   - $P(F) = 0,2$.

   La question posée est de déterminer $P_F(O)$.

   Par définition des probabilités conditionnelles : $P_F(O) = \dfrac{P(O \cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(O) \times P_O(F)}{P(F)}$

   On a finalement : $P_F(O) = \dfrac{0,52 \times 0,32}{0,2} = \dfrac{0,1664}{0,2} = 0,832$, c'est bien la valeur annoncée.

   Remarque : On peut tracer un arbre de probabilité pour visualiser les informations données, mais ici, toutes les probabilités utiles étaient données directement, on peut aussi s'en passer.

2. **Affirmation 2 : Fausse.**

   Ici, on a :

   - One épreuve aléatoire (le choix d'une personne au hasard dans la population) à deux issues : le succès (la personne joue de la musique professionnellement), ayant une probabilité estimée à $p = 0,062$, et l'échec ;
   - cette épreuve aléatoire est répétée $n = 5\,000$ fois, d'une façon qui est considérée comme identique et indépendante (le choix étant assimilable à un tirage avec remise) ;
   - la variable aléatoire X dénombre les succès parmi les n répétitions ;

   Ces trois critères permettent d'affirmer que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5\,000$ et $p = 0,062$.

   L'utilisation de la calculatrice donne : $P(X \leqslant 340) \approx 0,96$.

   L'écart entre cette valeur et 0,4 est donc strictement supérieur à un dixième : 0,4 n'est donc pas une valeur approchée au dixième près de cette probabilité.

3. **Affirmation 3 : Vraie.**

   Pour tout réel strictement positif t, l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev s'écrit :

   $$P\big(\big|X - \mathrm{E}(X)\big| \geqslant t\big) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{t^2}$$

   Comme X suit une loi binomiale, on a des propriétés pour calculer son espérance et sa variance :
   $\mathrm{E}(X) = np = 5\,000 \times 0,062 = 310$ et $\mathrm{V}(X) = np(1-p) = 5\,000 \times 0,062 \times (1 - 0,062) = 290,78$.
   On s'intéresse ici à l'évènement : $\{230 < X < 390\} \iff \{230 - 310 < X - 310 < 390 - 310\}$
   $\iff \{-80 < X - \mathrm{E}(X) < 80\}$
   $\iff \{\big|X - \mathrm{E}(X)\big| < 80\}$
   L'évènement $\{230 < X < 390\}$ est donc l'évènement contraire de $\{\big|X - \mathrm{E}(X)\big| \geqslant 80\}$.
   On va donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $t = 80$: $P\big(\big|X - \mathrm{E}(X)\big| \geqslant 80\big) \leqslant \dfrac{290,78}{80^2}$

Comme $\dfrac{290,78}{80^2} \leqslant 0,05$ (car une valeur approchée au centième est 0,045) on a :

$P(230 < X < 390) = 1 - P\left(\left|X - \mathrm{E}(X)\right| \geqslant 80\right) \geqslant 1 - 0,05$, soit $P(230 < X < 390) \geqslant 0,95$.

Finalement, on a bien plus de 95 % de chance que le nombre de musiciens professionnels soit strictement compris entre 230 et 290.

4. **Affirmation 4 : Vraie.**

On ne précise pas de rôles spécifiques au sein de l'équipe, donc les membres d'une équipe sont interchangeables, et une équipe est donc assimilable à un ensemble (non ordonné) et pas à une liste (ordonnée).

Une équipe est donc constituée de la réunion de deux sous ensembles :

- deux joueurs musiciens professionnels, choisis dans un ensemble de cardinal 4 :
  il y a donc $\binom{4}{2} = 6$ façons de choisir les deux musiciens professionnels ;
- trois joueurs non musiciens professionnels, choisis dans un ensemble de cardinal 6 :
  il y a $\binom{6}{3} = 20$ façons de faire ce choix ;
- la constitution d'une équipe revient à associer n'importe quel ensemble de deux musiciens professionnels à n'importe quel ensemble de trois joueurs non professionnels, et donc par principe multiplicatif, on a : $6 \times 20 = 120$ équipes différentes possibles.

Remarque : Quand une équipe est constituée, les joueurs restants forment obligatoirement l'équipe opposée, par complémentaire.

L'équipe E sera donc forcément opposée à l'équipe $\overline{E}$, et le match E contre $\overline{E}$ est le même que le match $\overline{E}$ contre E, il y a donc $\dfrac{120}{2}$ matchs différents, mais la question portait bien sur le nombre d'équipes différentes, ce nombre est bien égal à 120.

Exercice 8.

Une école de surf travaille avec des planches en mousse pour les cours débutants, et d'autres en résine pour les cours de perfectionnement. Les planches en mousse représentent 80 % du stock de l'école.
La gérante observe qu'après chaque saison,

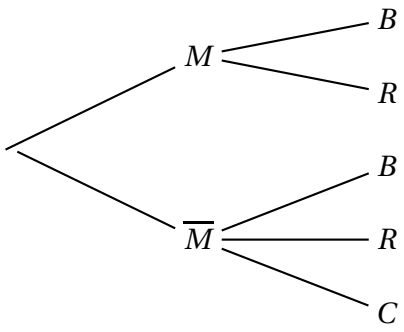
— 75 % des planches en mousse sont en bon état et réutilisables la saison suivante. Les autres sont recyclées (et donc non réutilisables) ;
— 60 % des planches en résine sont en bon état, les autres sont soit consolidées, soit recyclées.

Après une saison, on choisit une planche au hasard et on s'intéresse aux évènements suivants :

— M : « La planche est en mousse » ;
— B : « La planche est en bon état » ;
— R : « La planche sera recyclée » ;
— C : « La planche sera consolidée ».

Partie A

1. Recopier et compléter sur la copie l'arbre pondéré ci-dessous avec les données de l'énoncé. Il sera complété au fur et à mesure de l'exercice.



2. On sait que $P\left(\overline{M} \cap R\right) = 0,05$.
   a. Interpréter cette égalité dans le contexte de l'exercice.
   b. On a choisi une planche en résine. Démontrer que la probabilité que cette planche soit consolidée pour la saison suivante est 0,15.
3. La gérante affirme qu'après une saison, au moins $\frac{3}{4}$ des planches sont en bon état. A-t-elle raison ?

Partie B

La gérante du club de surf envisage de proposer à certains clients une remise pour la saison suivante.
Pour cela, elle imagine le jeu suivant qui sera proposé à chaque client :
Une urne contient 5 boules noires et un nombre n de boules rouges.
Les boules sont indiscernables au toucher.
Le client tire simultanément deux boules dans l'urne.
Si les deux boules sont de même couleur, le client gagne une remise, sinon, il perd le jeu et n'obtient pas de remise.

1. Justifier que la probabilité p de gagner une remise est :

$$p = \frac{\binom{5}{2} + \binom{n}{2}}{\binom{n+5}{2}}.$$

2. En déduire que la probabilité p peut s'écrire :

$$p = \frac{20 + n(n-1)}{(n+5)(n+4)}.$$

3. La gérante souhaite s'assurer que la probabilité de gagner est inférieure à $\frac{1}{2}$.
   Déterminer pour cela l'ensemble des valeurs possibles du nombre n de boules rouges qu'elle peut mettre dans l'urne.

Corrigé

Une école de surf travaille avec des planches en mousse pour les cours débutants, et d'autres en résine pour les cours de perfectionnement. Les planches en mousse représentent 80 % du stock de l'école.
La gérante observe qu'après chaque saison,

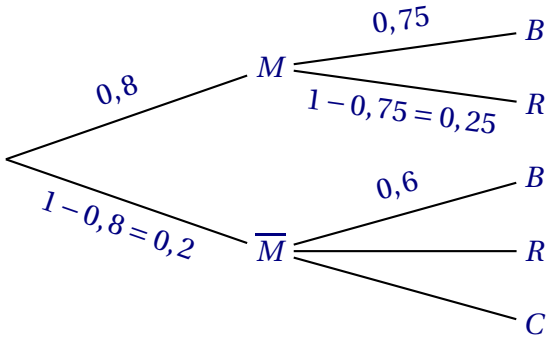
- 75 % des planches en mousse sont en bon état et réutilisables la saison suivante. Les autres sont recyclées (et donc non réutilisables) ;
- 60 % des planches en résine sont en bon état, les autres sont soit consolidées, soit recyclées.

Après une saison, on choisit une planche au hasard et on s'intéresse aux évènements suivants :

- M : « La planche est en mousse » ;
- B : « La planche est en bon état » ;
- R : « La planche sera recyclée » ;
- C : « La planche sera consolidée ».

Partie A

1. On complète l'arbre pondéré ci-dessous avec les données de l'énoncé.



2. On sait que $P\left(\overline{M} \cap R\right) = 0,05$.

a. Cela signifie que la probabilité que la planche choisie au hasard soit en résine et à recycler est égale à $0,05$.

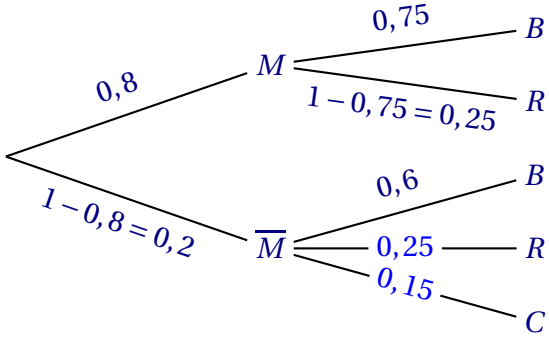
b. On a choisi une planche en résine. La probabilité que cette planche soit consolidée pour la saison suivante est : $P_{\overline{M}}(C)$.

On sait que $P\left(\overline{M} \cap R\right) = 0,05$. Mais $P\left(\overline{M} \cap R\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(R)$,

donc $P_{\overline{M}}(R) = \dfrac{P\left(\overline{M} \cap R\right)}{P\left(\overline{M}\right)} = \dfrac{0,05}{0,2} = 0,25$.

D'après les propriétés des probabilités, on a :
$P_{\overline{M}}(B) + P_{\overline{M}}(R) + P_{\overline{M}}(C) = 1$ donc $0,6 + 0,25 + P_{\overline{M}}(C) = 1$
et donc $P_{\overline{M}}(C) = 1 - 0,6 - 0,25 = 0,15$.

On peut donc compléter l'arbre pondéré.



3. La gérante affirme qu'après une saison, au moins $\frac{3}{4}$ des planches sont en bon état.

Il faut donc chercher $P(B)$. D'après la formule des probabilités totales :

$P(B) = P(M \cap B) + P\left(\overline{M} \cap B\right) = 0,8 \times 0,75 + 0,2 \times 0,6 = 0,72 < 0,75$

Donc la gérante a tort.

Partie B

La gérante du club de surf envisage de proposer à certains clients une remise pour la saison suivante.

Pour cela, elle imagine le jeu suivant qui sera proposé à chaque client :

Une urne contient 5 boules noires et un nombre n de boules rouges. Les boules sont indiscernables au toucher. Le client tire simultanément deux boules dans l'urne. Si les deux boules sont de même couleur, le client gagne une remise, sinon, il perd le jeu et n'obtient pas de remise.

1. Le client obtient une remise dans deux cas disjoints : il tire deux boules noires, ou il tire deux boules rouges (si $n \geqslant 2$).

- Il y a $n+5$ boules en tout : le nombre de façons de tirer simultanément 2 boules parmi $n+5$ est $\binom{n+5}{2}$.
- Il y a 5 boules noires : le nombre de façons de tirer simultanément 2 boules noires parmi 5 est $\binom{5}{2}$.

  Les boules sont indiscernables au toucher donc il y a équiprobabilité ; la probabilité de tirer 2 boules noires est donc $p_1 = \dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{n+5}{2}}$.
- Il y a n boules rouges : le nombre de façons de tirer simultanément 2 boules rouges parmi n est $\binom{n}{2}$.

  Les boules sont indiscernables au toucher donc il y a équiprobabilité ; la probabilité de tirer 2 boules rouges est donc $p_2 = \dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n+5}{2}}$.

Les évènements « tirer 2 boules noires » et « tirer 2 boules rouges » sont disjoints donc la probabilité de tirer 2 boules de même couleur est :

$p = p_1 + p_2 = \dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{n+5}{2}} + \dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n+5}{2}} = \dfrac{\binom{5}{2} + \binom{n}{2}}{\binom{n+5}{2}}$.

2. On sait que $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p! \times (n-p)!}$.

On en déduit que : $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{3! \times 2!} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$, que : $\binom{n}{2} = \dfrac{n!}{(n-2)! \times 2!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$,

et que : $\binom{n+5}{2} = \dfrac{(n+5)!}{(n+3)! \times 2!} = \dfrac{(n+5)(n+4)}{2}$.

Donc $p = \dfrac{10 + \frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+5)(n+4)}{2}} = \dfrac{\frac{20}{2} + \frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+5)(n+4)}{2}} = \dfrac{20 + n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

3. La gérante souhaite s'assurer que la probabilité de gagner est inférieure à $\frac{1}{2}$.

On cherche donc n tel que $p < \dfrac{1}{2}$; on résout cette inéquation.

$$p < \frac{1}{2} \iff \frac{20+n(n-1)}{(n+5)(n+4)} < \frac{1}{2} \iff \frac{20+n(n-1)}{(n+5)(n+4)} - \frac{1}{2} < 0$$
$$\iff \frac{2(20+n(n-1)) - (n+5)(n+4)}{2(n+5)(n+4)} < 0 \iff \frac{40+2n^2-2n-n^2-5n-4n-20}{2(n+5)(n+4)} < 0$$
$$\iff \frac{n^2-11n+20}{2(n+5)(n+4)} < 0 \iff n^2-11n+20 < 0 \text{ car } 2(n+5)(n+4) > 0$$

On étudie le signe du trinôme $x^2-11x+20$.

$\Delta = (-11)^2 - 4\times 1\times 20 = 121-80 = 41 > 0$; donc ce trinôme admet deux racines :

$x' = \dfrac{-(-11)-\sqrt{41}}{2\times 1} = \dfrac{11-\sqrt{41}}{2} \approx 2,3$ et $x'' = \dfrac{11+\sqrt{41}}{2} \approx 8,7$

On en déduit le signe du trinôme.

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a		0	signe de $-a$	0	signe de a	
$x^2-11x+20$	$+$		0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des valeurs possibles du nombre n de boules rouges qu'elle peut mettre dans l'urne pour que la probabilité de remise est donc l'ensemble des nombres entiers entre $x' \approx 2,3$ et $x'' \approx 8,7$; c'est donc l'ensemble $\{3:4:5:6:7:8\}$.

Exercice 9.

Partie A

L'agence de sûreté nucléaire ASNR contrôle les installations des centrales nucléaires afin de garantir leur sécurité et leur conformité. La fréquence des contrôles dépend de l'état du réacteur.
On considère que dans le parc nucléaire français :

- 20 % des réacteurs sont en arrêt pour maintenance ;
- 5 % des réacteurs fonctionnent au ralenti ;
- le reste des réacteurs du parc nucléaire est en état de fonctionnement normal.

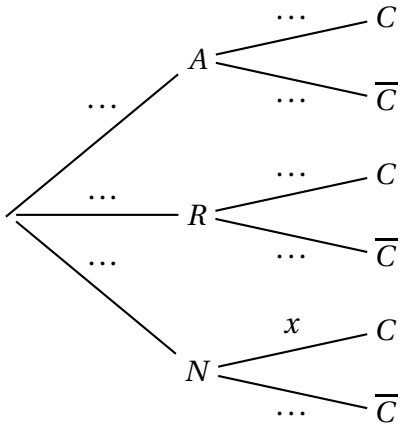
On considère également que parmi les réacteurs en arrêt, 85 % sont contrôlés et que parmi les réacteurs fonctionnant au ralenti, 60 % sont contrôlés.
On choisit au hasard un réacteur dans le parc nucléaire français, et on note :

- A l'évènement « Le réacteur est en arrêt » ;
- R l'évènement « Le réacteur fonctionne au ralenti » ;
- N l'évènement « Le réacteur fonctionne normalement » ;
- C l'évènement « Le réacteur subit un contrôle ».

Pour un évènement quelconque E, on désigne par $\overline{E}$ son évènement contraire et par $P(E)$ sa probabilité.
On note x la probabilité que le réacteur subisse un contrôle sachant qu'il fonctionne normalement, c'est–à–dire $x = P_N(C)$.

1. Recopier l'arbre des probabilités ci-contre en complétant les pointillés à l'aide des données de l'énoncé.

2. Calculer la probabilité que le réacteur soit en arrêt et qu'il subisse un contrôle.



On sait de plus que la probabilité qu'un réacteur du parc nucléaire soit contrôlé est égale à 0,35.

3. Montrer que la probabilité x est égale à 0,2.

4. Le réacteur choisi subit un contrôle. Déterminer la probabilité qu'il fonctionne normalement.

Partie B

Dans le Sud de la France, on compte 12 réacteurs nucléaires qu'on numérote de 1 à 12.
On sait que lorsque le réacteur fonctionne normalement, sa production journalière est égale à 16 GWh (gigawattheure), lorsque le réacteur fonctionne au ralenti, sa production journalière est réduite à 10 GWh et enfin lorsque le réacteur est à l'arrêt, sa production journalière est nulle.

On rappelle que $P(N) = 0,75$, $P(R) = 0,05$ et $P(A) = 0,20$.

1. On désigne par X la variable aléatoire qui modélise la production journalière en GWh d'un réacteur.

a. Recopier le tableau ci-dessous et compléter les pointillés donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X. On notera k les valeurs prises par la variable aléatoire X et p_k les probabilités égales à $P(X = k)$.

k	0	…	…
p_k	0,20	…	…

b. Montrer que l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à 12,5 et que sa variance $V(X)$ est égale à 40,75.

2. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et 12, on note X_i la variable aléatoire qui modélise la production journalière en GWh du i-ème réacteur.

Ainsi, par exemple, X_2 désigne la variable aléatoire qui modélise la production journalière en GWh du 2e réacteur.

On suppose que les variables $X_1, X_2, \ldots, X_{12}$ suivent la même loi de probabilité que la variable aléatoire X, et qu'elles sont indépendantes.

On considère la variable aléatoire S qui donne la production totale journalière des 12 réacteurs. On a ainsi $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{12}$.

On note $E(S)$ l'espérance de la variable aléatoire S et $V(S)$ sa variance.

a. Montrer que $E(S) = 150$ et $V(S) = 489$.

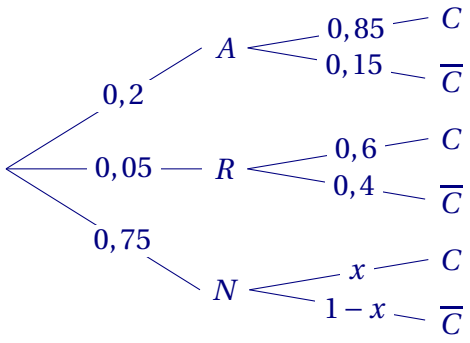
b. Afin d'éviter le risque de surcharge du réseau et de couvrir l'ensemble des besoins en électricité, la production totale journalière des 12 réacteurs doit être comprise strictement entre 100 GWh et 200 GWh.

Peut-on affirmer que la probabilité d'éviter le risque de surcharge et de couvrir l'ensemble des besoins en électricité est supérieure à 0,80 ? Justifier.

Corrigé

Partie A

1. L'arbre des probabilités représentant la situation est :



2. Le réacteur est en arrêt et il subit un contrôle correspond à l'évènement $A \cap C$.
$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0,2 \times 0,85 = 0,17$
La probabilité que le réacteur soit à l'arrêt et qu'il subisse un contrôle est égale à 0,17.

3. On sait de plus que la probabilité qu'un réacteur du parc nucléaire soit contrôlé est égale à 0,35 c'est-à-dire $P(C) = 0,35$.
Les évènements A, R et N forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(C) = P(A \cap C) + P(R \cap C) + P(N \cap C) &\iff P(C) = P(A) \times P_A(C) + P(R) \times P_R(C) + P(N) \times P_N(C) \\ &\iff 0,35 = 0,2 \times 0,85 + 0,05 \times 0,6 + 0,75 \times x \\ &\iff 0,35 - 0,17 - 0,03 = 0,75x \\ &\iff 0,15 = 0,75x \\ &\iff x = \frac{0,15}{0,75} = 0,2 \end{aligned}$$

On a bien : la probabilité x est égale à 0,2.

4. La probabilité qu'un réacteur fonctionne normalement sachant qu'il subit un contrôle correspond à $P_C(N)$. Par définition des probabilités conditionnelles :
$P_C(N) = \dfrac{P(N \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,75 \times 0,2}{0,35} = \dfrac{3}{7} \approx 0,4286$
La probabilité qu'un réacteur fonctionne normalement sachant qu'il subit un contrôle est égale à $\dfrac{3}{7}$ soit environ 0,43.

Partie B

1. a. La variable aléatoire prend trois valeurs : 0 (quand le réacteur est à l'arrêt, il produit 0 GWh), 10 et 16.
On a : $\{X = 0\} = A$; $\{X = 10\} = R$ et $\{X = 16\} = N$.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donc :

k	0	10	16
p_k	0,20	0,05	0,75

b. $\mathrm{E}(X) = 0 \times 0,2 + 10 \times 0,05 + 16 \times 0,75 = 12,5$.
$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = 0^2 \times 0,2 + 10^2 \times 0,05 + 16^2 \times 0,75 - 12,5^2 = 40,75$.
L'espérance $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X est égale à 12,5 et sa variance $\mathrm{V}(X)$ est égale à 40,75.

2. a. Ici, on va utiliser deux éléments pour justifier nos calculs :

- **(1)** les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_{12} suivent la même loi de probabilité que la variable aléatoire X ;
- **(2)** les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_{12} sont indépendantes.

Avec ceci :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(S) &= \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{12}) \\
&= \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots + \mathrm{E}(X_{12}) \quad \text{par linéarité de l'espérance ;} \\
&= 12 \times \mathrm{E}(X) \quad \textbf{(1)} \\
&= 12 \times 12,5 \\
&= 150
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(S) &= \mathrm{V}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{12}) \\
&= \mathrm{V}(X_1) + \mathrm{V}(X_2) + \cdots + \mathrm{V}(X_{12}) \quad \textbf{(2)} \\
&= 12 \times \mathrm{V}(X) \quad \textbf{(1)} \\
&= 12 \times 40,75 \\
&= 489
\end{aligned}$$

On a bien : $\mathrm{E}(S) = 150$ et $\mathrm{V}(S) = 489$.

b. Déterminons la probabilité d'éviter le risque de surcharge et de couvrir l'ensemble des besoins en électricité c'est-à-dire la probabilité que la production totale journalière des 12 réacteurs soit comprise strictement entre 100 GWh et 200 GWh.

On a : $P(100 < S < 200) = P(-50 < S - 150 < 50) = 1 - P\Big(\big|S - 150\big| \geqslant 50\Big)$

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}, \quad P\Big(\big|S - \mathrm{E}(S)\big| \geqslant t\Big) \leqslant \dfrac{\mathrm{V}(S)}{t^2}$.

Avec $t = 50$ on a : $P\Big(\big|S - 150\big| \geqslant 50\Big) \leqslant \dfrac{489}{50^2}$;

soit $P\Big(\big|S - 150\big| \geqslant 50\Big) \leqslant 0,1956$.

On a donc : $1 - P\Big(\big|S - 150\big| \geqslant 50\Big) \geqslant 1 - 0,1956$.

D'où : $P(100 < S < 200) \geqslant 0,8044$

La probabilité d'éviter le risque de surcharge et de couvrir l'ensemble des besoins en électricité est donc supérieure à $0,80$.

Exercice 10.

Un navire assure la liaison entre deux ports de la Méditerranée.
Lors d'une traversée, une famille a la possibilité de réserver une cabine ainsi qu'un emplacement pour un véhicule.

Partie A

Parmi l'ensemble des familles effectuant la traversée, on constate que 30 % réservent un emplacement pour un véhicule et, parmi ces dernières, 80 % réservent une cabine.
On sait par ailleurs que 75 % des familles effectuant la traversée réservent une cabine.

On choisit au hasard une famille effectuant la traversée, et on considère les évènements suivants :

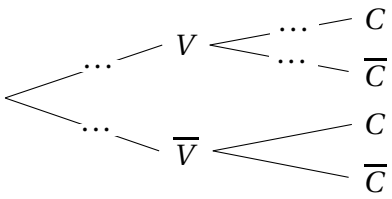
- V : « la famille réserve un emplacement pour un véhicule » ;
- C : « la famille réserve une cabine » .

Pour un évènement quelconque E, on désigne par $\overline{E}$ son évènement contraire et par $P(E)$ sa probabilité.

1.

a. Donner $P(C)$.

b. Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les quatre pointillés.



2. Calculer la probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine.

3. Une famille a réservé une cabine.
Déterminer la probabilité qu'elle réserve un emplacement pour un véhicule.

4. Déterminer $P_{\overline{V}}(C)$.
On arrondira le résultat à 10^{-2}.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Sur ce trajet, la réservation d'une cabine et d'un emplacement pour un véhicule sont facturés en supplément du coût de la traversée.
Ces suppléments sont d'un montant de :

- 100 € pour une cabine ;
- 70 € pour l'emplacement d'un véhicule.

On suppose qu'une famille peut réserver au maximum une cabine et au maximum un emplacement pour un véhicule.
À ces suppléments peuvent s'ajouter le prix payé pour des extras (repas, boissons, etc.).
On note X la variable aléatoire qui associe, à chaque famille effectuant la traversée, le prix qu'elle paie, en euro, pour les suppléments.
On donne ci-dessous la loi de probabilité de X.

x_i	0	70	100	170
$P(X = x_i)$	0,19	0,06	0,51	0,24

On note Y la variable aléatoire qui associe, à chaque famille effectuant la traversée, le prix qu'elle paie, en euro, pour les extras.

On admet que la variable aléatoire Y a pour espérance $\mathrm{E}(Y) = 104$ et pour variance $\mathrm{V}(Y) = 1\,686$.

On suppose que les variables X et Y sont indépendantes.

1. Justifier que $\mathrm{E}(X) = 96$ et que $\mathrm{V}(X) = 3\,114$.

2. À titre exceptionnel, la compagnie propose une remise de 40 % sur les suppléments et les extras.

On note Z la variable aléatoire qui, à chaque famille effectuant la traversée, associe le montant total pour les suppléments et les extras, en euro, payé par cette famille après réduction.

a. Justifier que $Z = 0,6(X + Y)$.

b. En déduire que $\mathrm{E}(Z) = 120$ et que $\mathrm{V}(Z) = 1\,728$,
où $\mathrm{E}(Z)$ est l'espérance de la variable aléatoire Z et $\mathrm{V}(Z)$ sa variance.

3. On note n un entier naturel non nul et on choisit au hasard un échantillon de n familles effectuant cette traversée bénéficiant de la réduction exceptionnelle définie en question **2.**

On admet que ce choix peut être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par Z_1 la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la première famille, Z_2 la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la deuxième famille et ainsi de suite, Z_n la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la n-ième famille.

On considère la variable aléatoire $M_n = \dfrac{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n}{n}$ donnant le prix total moyen pour les suppléments et les extras, payé par ces familles.

On admet que les variables Z_1, Z_2, …, Z_n sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité que la variable aléatoire Z.

a. Montrer que l'espérance $\mathrm{E}\big(M_n\big)$ de la variable M_n est égale à 120, et que sa variance $\mathrm{V}\big(M_n\big)$ est égale à $\dfrac{1\,728}{n}$.

b. Déterminer le plus petit entier n pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que

$$\mathrm{P}\big(114 < M_n < 126\big) \geqslant 0,85.$$

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

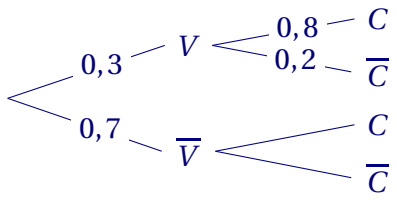
Corrigé

Partie A

1. **a.** Comme on choisit au hasard une famille, on est en situation d'équiprobabilité, et les proportions sont assimilables à des probabilités.

Comme 75 % des familles réservent une cabine, cela se traduit par : $P(C) = 0,75$.

b. Voici l'arbre complété avec les valeurs disponibles dans l'énoncé, et les probabilité des événements contraires donnés dans l'énoncé :



2. La probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine est :
$P(V \cap C) = P(V) \times P_V(C) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$.

3. La probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule, sachant qu'elle a réservé une cabine est : $P_C(V)$.
$P_C(V) = \dfrac{P(C \cap V)}{P(C)} = \dfrac{0,24}{0,75} = \dfrac{24}{75} = 0,32$.

4. Les évènements V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers.
D'après la loi des probabilités totales, on en déduit :
$P\big(C\big) = P\big(C \cap V\big) + P\big(C \cap \overline{V}\big) \iff P\big(C \cap \overline{V}\big) = P\big(C\big) - P\big(C \cap V\big)$.
En remplaçant par les valeurs connues : $P\big(C \cap \overline{V}\big) = 0,75 - 0,24 = 0,51$.
Finalement, en revenant à la question posée : $P_{\overline{V}}(C) = \dfrac{P\big(\overline{V} \cap C\big)}{P\big(\overline{V}\big)} = \dfrac{0,51}{0,7} = \dfrac{51}{70} \approx 0,729$
$P_{\overline{V}}(C) \approx 0,73$ à 10^{-2} près.
Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'environ 73 % des familles n'ayant pas réservé d'emplacement pour un véhicule ont réservé une cabine.

Partie B

1. On va donner les calculs pour l'espérance et la variance de X :
$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + x_3 \times P(X = x_3) + x_4 \times P(X = x_4)\\ &= 0 \times 0,19 + 70 \times 0,06 + 100 \times 0,51 + 170 \times 0,24\\ &= 0 + 4,2 + 51 + 40,8 = 96.\end{aligned}$
$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \big(x_1 - \mathrm{E}(X)\big)^2 \times P(X = x_1) + \big(x_2 - \mathrm{E}(X)\big)^2 \times P(X = x_2) + \cdots + \big(x_4 - \mathrm{E}(X)\big)^2 \times P(X = x_4)\\ &= (0-96)^2 \times 0,19 + (70-96)^2 \times 0,06 + (100-96)^2 \times 0,51 + (170-96)^2 \times 0,24\\ &= 1\,751,04 + 40,56 + 8,16 + 1\,314,24 = 3\,114\end{aligned}$
On trouve bien les deux valeurs annoncées dans l'énoncé.

2. **a.** $X + Y$ est la variable aléatoire qui donne la somme du prix des suppléments et du prix des extras, sans réduction.
Comme la compagnie propose une remise de 40 % sur ces extras et suppléments, cela signifie que les familles vont payer un prix qui aura été multiplié par : $1 - \dfrac{40}{100} = 0,6$
Ainsi, la variable aléatoire donnant le montant total des suppléments et extras, après réduction est bien : $Z = 0,6(X + Y)$.

b. Par linéarité de l'espérance : $\mathrm{E}(Z) = 0,6\big(\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)\big) = 0,6\big(96 + 104\big) = 0,6 \times 200 = 120$
Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a : $\mathrm{V}(X + Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$.
Par propriété de la variance :
$\mathrm{V}(Z) = 0,6^2 \times \mathrm{V}(X + Y) = 0,36\big(\mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)\big) = 0,36 \times (3\,114 + 1\,686) = 0,36 \times 4\,800 = 1\,728$.

3. **a.** M_n est la moyenne empirique de l'échantillon de taille n.
Par linéarité de l'espérance, on a :
$\mathrm{E}\big(M_n\big) = \dfrac{1}{n}\big(\mathrm{E}(Z_1) + \mathrm{E}(Z_2) + \cdots + \mathrm{E}(Z_n)\big) = \dfrac{1}{n}\big(120 + 120 + \cdots + 120\big) = \dfrac{120n}{n} = 120$.
Comme les variables aléatoires sont indépendantes :

$$\mathrm{V}(M_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times \big(\mathrm{V}(Z_1) + \mathrm{V}(Z_2) + \cdots + \mathrm{V}(Z_n)\big) = \frac{1}{n^2}\big(1\,728 + 1\,728 + \cdots + 1\,728\big) = \frac{1\,728n}{n^2} = \frac{1\,728}{n}.$$

Remarque : en disant explicitement que M_n est la moyenne empirique d'un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de probabilité de Z, on peut aussi dire, par propriété que : $\mathrm{E}\big(M_n\big) = \mathrm{E}(Z) = 120$ et $\mathrm{V}\big(M_n\big) = \dfrac{\mathrm{V}(Z)}{n} = \dfrac{1\,728}{n}$.

b. On a : $P\big(114 < M_n < 126\big) = P\big(114 - 120 < M_n - 120 < 126 - 120\big)$

$= P\big(-6 < M_n - \mathrm{E}(M_n) < 6\big)$ car $\mathrm{E}(M_n) = 120$

$= P\big(\big|M_n - \mathrm{E}(M_n)\big| < 6\big)$

$= 1 - P\big(\big|M_n - \mathrm{E}(M_n)\big| \geqslant 6\big)$ via l'évènement contraire

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel t strictement positif :

$P\big(\big|M_n - \mathrm{E}(M_n)\big| \geqslant t\big) \leqslant \dfrac{\mathrm{V}(M_n)}{t^2}$.

Notamment, pour $t = 6$:

$P\big(\big|M_n - \mathrm{E}(M_n)\big| \geqslant 6\big) \leqslant \dfrac{\dfrac{1\,728}{n}}{6^2}$.

Or : $\dfrac{\dfrac{1\,728}{n}}{6^2} = \dfrac{1\,728}{36n} = \dfrac{48}{n}$.

On a donc : $P\big(\big|M_n - \mathrm{E}(M_n)\big| \geqslant 6\big) \leqslant \dfrac{48}{n} \iff 1 - P\big(\big|M_n - \mathrm{E}(M_n)\big| \geqslant 6\big) \geqslant 1 - \dfrac{48}{n}$

$\iff P\big(114 < M_n < 126\big) \geqslant 1 - \dfrac{48}{n}$

Ainsi, $1 - \dfrac{48}{n} \geqslant 0{,}85 \implies \mathrm{P}\big(114 < M_n < 126\big) \geqslant 0{,}85$.

Résolvons : $1 - \dfrac{48}{n} \geqslant 0{,}85 \iff 0{,}15 \geqslant \dfrac{48}{n}$

$\iff 0{,}15n \geqslant 48$ car $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n > 0$

$\iff n \geqslant \dfrac{48}{0{,}15}$ car $0{,}15 > 0$

$\iff n \geqslant 320$

Les solutions de cette inéquation sont les entiers supérieurs ou égaux à 320.

Le plus petit entier permettant d'affirmer $\mathrm{P}\big(114 < M_n < 126\big) \geqslant 0{,}85$ est donc 320.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que l'affirmation « le coût moyen payé par les familles pour les suppléments et extras, après réduction de 40 % est strictement compris entre 114 et 126 euros » est vraie au risque de 15 % (ou avec une confiance de 85 %) à partir de 320 familles à bord du bateau.

Exercice 11.

Parmi les habitants âgés d'au moins 15 ans vivant en France, on compte :

- 21 % de personnes de 15 à 29 ans ;
- 46 % de personnes de 30 à 59 ans ;
- 33 % de personnes d'au moins 60 ans.

On s'intéresse à l'utilisation d'un réseau social par les habitants âgés d'au moins 15 ans vivant en France. On a ainsi pu observer que :

- 70 % des personnes de 15 à 29 ans ont déjà publié sur ce réseau social ;
- 46 % des personnes de 30 à 59 ans ont déjà publié sur ce réseau social ;
- 15 % des personnes d'au moins 60 ans ont déjà publié sur ce réseau social.

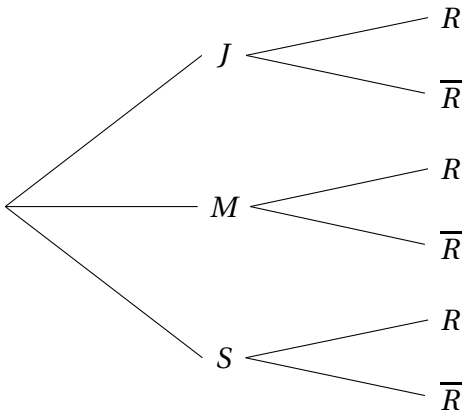
On interroge une personne âgée d'au moins 15 ans vivant en France et on lui demande si elle a déjà publié sur ce réseau social.
On note :

- J l'événement : « la personne interrogée a entre 15 et 29 ans » ;
- M l'événement : « la personne interrogée a entre 30 et 59 ans » ;
- S l'événement : « la personne interrogée a au moins 60 ans » ;
- R l'événement : « la personne interrogée a déjà publié sur ce réseau social ».

On note $\overline{R}$ l'événement contraire de l'événement R.
Dans tout l'exercice, les valeurs approchées seront arrondies au millième.

Partie A

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité.



2. Déterminer $P(M \cap R)$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. On interroge au hasard une personne âgée d'au moins 15 ans vivant en France.

a. Calculer la probabilité qu'elle ait déjà publié sur ce réseau social.

b. On sait que cette personne a déjà publié sur ce réseau social.
Déterminer la probabilité qu'elle ait au moins 60 ans.

Partie B

Au cours d'un sondage, on interroge successivement, au hasard et de manière indépendante, 100 personnes âgées d'au moins 15 ans vivant en France et on leur demande si elles ont déjà publié sur ce réseau social.

La population du pays est suffisamment grande pour qu'on assimile le choix des personnes sondées à des tirages successifs avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes ayant déjà publié sur ce réseau social parmi ces 100 personnes interrogées.

Dans cette partie, on admet que la probabilité qu'une personne âgée d'au moins 15 ans vivant en France ait déjà publié sur ce réseau social est 0,41.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
Donner ses paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'au moins la moitié des 100 personnes interrogées ait déjà publié sur ce réseau social.

3. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

On effectue le sondage décrit dans la **partie B** dans 150 villes françaises en respectant les mêmes conditions.

On note X_1, X_2, ... , X_{150} les variables aléatoires donnant le nombre de personnes ayant déjà publié sur ce réseau social parmi les 100 personnes interrogées dans chacune des 150 villes.

On considère Y la variable aléatoire définie par :

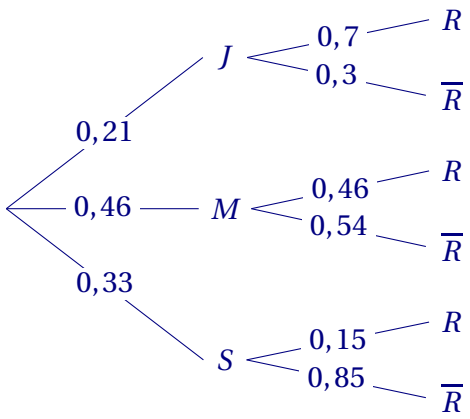
$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{150}}{150}$$

Démontrer que la probabilité que la variable aléatoire Y soit strictement comprise entre 37 et 45 est strictement supérieure à 98 %.

Corrigé

Partie A

1. L'arbre de probabilité représentant la situation est :



2. $P(M \cap R) = P(M) \times P_M(R) = 0,46 \times 0,46 = 0,2116$.
La probabilité que la personne interrogée ait entre 30 et 59 ans et ait déjà publié sur ce réseau social est égale à 0,2116 (valeur exacte).

3. a. Calculons la probabilité qu'une personne ait déjà publié sur ce réseau social, c'est à dire calculons $P(R)$.

Les événements J, M et S forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}P(R) &= P(J\cap R)+P(M\cap R)+P(S\cap R)\\ &= P(J)\times P_J(R)+P(M)\times P_M(R)+P(S)\times P_S(R)\\ &= 0,21\times 0,7+0,46\times 0,46+0,33\times 0,15\\ &= 0,4081\end{aligned}$$

La probabilité que la personne ait déjà publié sur ce réseau social est égale à 0,4081 (valeur exacte).

b. Déterminons la probabilité qu'une personne ait au moins 60 ans sachant qu'elle a déjà publié sur ce réseau social, c'est à dire calculons $P_R(S)$

$$P_R(S)=\frac{P(R\cap S)}{P(R)}=\frac{0,33\times 0,15}{0,4081}\approx 0,12129$$

La probabilité qu'une personne ait au moins 60 ans sachant qu'elle a déjà publié sur ce réseau social est égale à 0,121 arrondi au millième.

Partie B

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale, ses paramètres sont $n = 100$ et $p = 0,41$.

Remarque : ici, on a une rédaction plus légère, car l'énoncé demande d'admettre que X suit une loi binomiale. Sinon, il faudrait les trois arguments classiques :

- On a une épreuve à deux issues, succès de probabilité $p = 0,41$ et échec ;
- cette épreuve est répétée $n = 100$ fois, de façon identique et indépendante (car la constitution de l'échantillon est assimilé à un tirage au sort **avec** remise) ;
- X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès sur ces n répétitions.

2. À l'aide de la calculatrice : $P(X \geq 50) \approx 0,04279$

La probabilité qu'au moins la moitié des 100 personnes interrogées ait déjà publié sur ce réseau social est égale à 0,043 au millième près.

3. $E(X) = n \times p = 100 \times 0,41 = 41$

L'espérance de la variable aléatoire X est égale à 41.

Si on répète l'expérience un très grand nombre de fois, en moyenne 41 personnes sur les 100 auront déjà publié sur ce réseau social.

Partie C

La variable aléatoire Y est définie par : $Y=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_{150}}{150}$ est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille 150 de la variable aléatoire X on a donc :

$E(Y) = E(X) = 41$

et $V(Y)=\dfrac{1}{150}V(X)$

$=\dfrac{100\times 0,41\times(1-0,41)}{150}$ car X suit une loi binomiale de paramètres 100 et 0,41

$=\dfrac{24,19}{150}$

On a : $P(37<Y<45)=P(-4<Y-41<4)=1-P\Big(\big|Y-41\big|\geq 4\Big)$

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
$\forall t \in \mathbb{R}^{*+}, \quad P\left(\left|Y - E(Y)\right| \geq t\right) \leq \dfrac{V(Y)}{t^2}$.
Avec $t = 4$ on a : $P\left(\left|Y - 41\right| \geq 4\right) \leq \dfrac{24,19}{150 \times 4^2}$
soit $P\left(\left|Y - 41\right| \geq 4\right) \leq \dfrac{803}{80000}$
On a donc : $1 - P\left(\left|Y - 41\right| \geq 4\right) \geq 1 - \dfrac{803}{80000}$
D'où : $P(37 < Y < 45) \geq 0,98996$
La probabilité que la variable aléatoire Y soit strictement comprise entre 37 et 45 est donc strictement supérieure à 98 %.

Exercice 12.

La fédération internationale d'escrime établit des normes de fabrication sur les lames des armes des tireurs afin de garantir au maximum leur sécurité.
Pour tester la conformité de l'acier employé, la lame est pliée puis redressée toutes les secondes jusqu'à la rupture.
La lame est conforme si la rupture intervient après plus de cinq heures de test.

Un équipementier d'escrime se fournit auprès de trois fabricants de lames.
Son stock est composé de 60 % de lames du fournisseur A, de 12 % de lames du fournisseur B, le reste venant du fournisseur C.

Une étude qualité a montré que :

- 90 % des lames du fournisseur A étaient conformes ;
- 95 % des lames du fournisseur B étaient conformes ;
- 85 % des lames du fournisseur C étaient conformes.

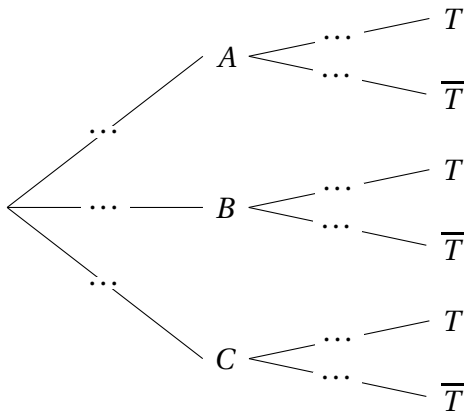
Partie A
Un contrôle est déclenché sur une des lames vendues par l'équipementier.

On considère les évènements suivants :

- A : « La lame testée provient du fournisseur A » ;
- B : « La lame testée provient du fournisseur B » ;
- C : « La lame testée provient du fournisseur C » ;
- T : « La lame testée est conforme ».

On note $\overline{T}$ l'évènement contraire de T.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous représentant la situation.



2. Déterminer $P\left(A \cap \overline{T}\right)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Démontrer que la probabilité que la lame testée soit conforme est de 0,892.

4. Sachant que la lame testée n'est pas conforme, déterminer la probabilité qu'elle provienne du fournisseur B. *On donnera la valeur arrondie au millième.*

Partie B

D'après la **partie A**, la probabilité qu'une lame de l'équipementier ne soit pas conforme est égale à 0,108.

Lors d'une compétition d'escrime, l'équipementier apporte un échantillon de 75 lames provenant de son stock.

On considère qu'il les a choisies au hasard et de manière indépendante.

De plus son stock de lames est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de lames non conformes dans cet échantillon.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

Préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité que 6 lames exactement soient non conformes dans cet échantillon. *On arrondira le résultat au millième.*

3. L'équipementier affirme que la probabilité qu'il y ait strictement plus de 8 lames non conformes dans cet échantillon est inférieure à 50 %.

A-t-il raison ?

Partie C

Soit n un entier strictement positif désignant le nombre de compétitions durant lesquelles l'équipementier est présent.

Il apporte à chaque fois un échantillon de 75 lames.

Les variables aléatoires X_1, ..., X_n, que l'on considère indépendantes, donnent pour chaque échantillon le nombre de lames non conformes.

On pose $\quad M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

1. Déterminer l'espérance $\mathrm{E}(M_n)$ et la variance $\mathrm{V}(M_n)$ de la variable aléatoire M_n.

2. Justifier l'inégalité suivante, pour tout entier naturel n non nul :

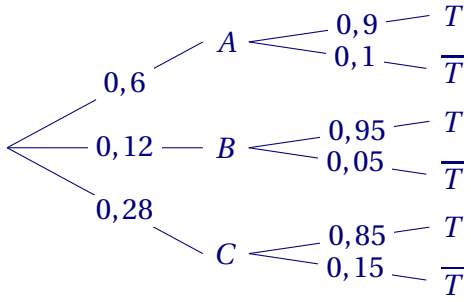
$$P\left(\left|M_n - 8,1\right| \geqslant 2\right) \leqslant \frac{1,8063}{n}.$$

3. Déterminer une valeur de l'entier n à partir de laquelle $P\left(\left|M_n - 8,1\right| < 2\right) \geqslant 0,95$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

Partie A

1. L'arbre de probabilité représentant la situation est :



2. $P(A \cap \overline{T}) = P(A) \times P_A(\overline{T}) = 0,6 \times 0,1 = 0,06$
Dans le contexte de l'exercice, la probabilité que la lame provienne du fournisseur A et ne soit pas conforme est égale à 0,06.

3. Les événements A, B et C forment une partition de l'univers, donc d'après la loi des probabilités totales on a :
$P(T) = P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T)$
$= 0,6 \times 0,9 + 0,12 \times 0,95 + 0,28 \times 0,85$
$= 0,892$
La probabilité que la lame testée soit conforme est donc bien égale à 0,892.

4. Déterminer la probabilité qu'une lame provienne du fournisseur B sachant qu'elle n'est pas con-forme revient à calculer $P_{\overline{T}}(B)$.
$P_{\overline{T}}(B) = \dfrac{P(B \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,12 \times 0,05}{1 - 0,892} = \dfrac{0,006}{0,108} \approx 0,055\,556$
La probabilité,arrondie au millième, que la lame provienne du fournisseur B sachant que la lame testée n'est pas conforme est égale à $0,056$.

Partie B

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale, de paramètres $n = 75$ et $p = 0,108$.
Remarque : ici, on a une rédaction plus légère, car l'énoncé demande d'admettre que X suit une loi binomiale. Sinon, il faudrait les trois arguments classiques :

- On a une épreuve à deux issues, succès de probabilité $p = 0,108$ et échec ;
- cette épreuve est répétée $n = 75$ fois, de façon identique et indépendante (car la constitution de l'échantillon est assimilé à un tirage au sort **avec** remise) ;
- X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès sur ces n répétitions.

2. $P(X = 6) = \binom{75}{6} \times 0,108^6 \times (1 - 0,108)^{75-6} = \binom{75}{6} \times 0,108^6 \times 0,892^{69} \approx 0,120\,140\,6$
La probabilité que 6 lames exactement soient non conformes dans cet échantillon est égale à $0,120$, résultat arrondi au millième.

3. $P(X > 8) = P(X \geqslant 9) \approx 0,422$

Or $0,42 < 0,5$ donc l'équipementier a raison : la probabilité qu'il y ait strictement plus de 8 lames non conformes dans cet échantillon est inférieure à 50%.

Partie C

1. M_n est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X on a donc :

$E(M_n) = E(X) = np$

$= 75 \times 0,108$ car X suit une loi binomiale de paramètres 75 et 0,108

$= 8,1$

et $V(M_n) = \dfrac{1}{n}V(X)$

$= \dfrac{75 \times 0,108 \times (1-0,108)}{n}$ car X suit une loi binomiale de paramètres 75 et 0,108

$= \dfrac{7,2252}{n}$

2. D'après l'inégalité de concentration, pour tout entier n non nul :

$\forall t \in \mathbb{R}^{*+}, \quad P\Big(\big|M_n - E(X)\big| \geqslant t\Big) \leqslant \dfrac{V(X)}{nt^2}.$

Avec $t = 2$ on a : $P\Big(\big|M_n - 8,1\big| \geqslant 2\Big) \leqslant \dfrac{7,2252}{n \times 2^2}.$

Soit : $P(|M_n - 8,1| \geqslant 2) \leqslant \dfrac{1,8063}{n}$ qui est l'inégalité demandée.

3. $P(|M_n - 8,1| < 2) \geqslant 0,95 \iff 1 - P(|M_n - 8,1| < 2) \leqslant 1 - 0,95.$

$\iff P(|M_n - 8,1| \geqslant 2) \leqslant 0,05$

Or $P(|M_n - 8,1| \geqslant 2) \leq \dfrac{1,8063}{n}$ donc nous recherchons des entiers n tels que $\dfrac{1,8063}{n} \leqslant 0,05$

$\dfrac{1,8063}{n} \leqslant 0,05 \iff \dfrac{1,8063}{0,05} \leqslant n$

$\implies 36,126 \leqslant n$.

$\implies 37 \leqslant n$

donc à partir de 37, on a $P(|M_n - 8,1| < 2) \geqslant 0,95$

Dans le contexte de l'exercice, si l'équipementier est présent à au moins 37 compétitions, on peut affirmer, au risque de 5%, que la moyenne observée des lames non conformes sera comprise entre 6,1 et 10,1.

Exercice 13.

On pourra traiter indépendamment les deux parties de l'exercice.
On arrondira, si nécessaire, les résultats à 10^{-3} *près.*

Dans cet exercice, on s'intéresse aux lancers-francs effectués par un joueur lors de compétitions de basketball.
Pour modéliser la situation, on considère dans chaque partie du problème que les conditions dans lesquelles s'effectuent ces lancers sont identiques et que ces lancers sont indépendants deux à deux.

Partie A

Les statistiques de réussite des lancers-francs d'un joueur sont de 49,2 % lors d'une saison.
Dans cette partie, on assimilera cette fréquence à sa probabilité de réussite d'un lancer-franc.
Au cours d'un match, ce joueur tente 16 lancers-francs.
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers-francs réussis par ce joueur lors de ce match.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et l'interpréter dans le contexte de cet exercice.
3. Calculer $P(X = 5)$.
4. Calculer la probabilité que le joueur réussisse au moins six lancers-francs.

Partie B

On note p la probabilité que le joueur réussisse un lancer-franc, où p est un réel tel que

$$0 \leqslant p \leqslant 1$$

On se place dans le cas où le joueur effectue 3 lancers-francs.
On désigne par Y la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers-francs réussis par ce joueur.

1. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.
2. Exprimer $P(Y = 2)$ en fonction de p.
3. Donner la loi de probabilité de Y.
   Présenter la réponse sous forme de tableau.
4. Montrer que
$$P(Y \geqslant 2) = -2p^3 + 3p^2$$
5. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par
$$f(x) = -2x^3 + 3x^2.$$
   a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$ et dresser son tableau de variation en y faisant figurer les valeurs aux bornes de l'intervalle $[0;1]$.
   b. En déduire l'existence d'une unique valeur α dans l'intervalle $[0;1]$ telle que $f(\alpha) = 0,9$.
   c. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette valeur α.
   d. Interpréter la valeur de α dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

Partie A

1. L'épreuve consiste en la répétition de $n = 16$ lancers francs identiques et indépendants. Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli avec deux issues : succès (probabilité $p = 0,492$) ou échec. La variable aléatoire X compte le nombre de succès. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 16$ et $p = 0,492$, notée $\mathscr{B}(16\ ;\ 0,492)$.

2. L'espérance est donnée par :

$$\begin{aligned} E(X) &= n \times p \\ &= 16 \times 0,492 \\ &= 7,872 \end{aligned}$$

En moyenne, sur 16 000 tirs, le joueur réussira environ 7 872 lancers francs .

3. Calcul de la probabilité d'avoir exactement 5 succès :

$$\begin{aligned} P(X=5) &= \binom{16}{5} \times (0,492)^5 \times (1-0,492)^{16-5} \\ P(X=5) &\approx 0,073 \end{aligned}$$

4. Probabilité de réussir au moins 6 lancers francs :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 6) &= 1 - P(X \leqslant 5) \\ &\approx 1 - 0,117 \\ P(X \geqslant 6) &\approx 0,883 \end{aligned}$$

Partie B

1. Le joueur effectue 3 lancers francs. La variable Y peut donc prendre les valeurs $0, 1, 2, 3$.

2. Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(3\ ;\ p)$.

$$\begin{aligned} P(Y=2) &= \binom{3}{2} p^2 (1-p)^1 \\ &= 3p^2(1-p) \\ &= 3p^2 - 3p^3 \end{aligned}$$

3. Loi de probabilité de Y :

y_i	0	1	2	3
$P(Y = y_i)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

4. Calcul de $P(Y \geqslant 2)$:

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 2) &= P(Y=2) + P(Y=3) \\ &= (3p^2 - 3p^3) + p^3 \\ &= -2p^3 + 3p^2 \end{aligned}$$

5. a. Étude de $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ sur $[0\ ;\ 1]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2 + 6x \\ &= 6x(1-x) \end{aligned}$$

Sur $[0\ ;\ 1]$, $6x \geqslant 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $1 - x$. Or

$$1 - x > 0 \iff 1 > x.$$

On a donc pour $x \in [0\ ;\ 1[$, $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$.

x	0		1
$f'(x)$		+	0
f	0	↗	1

b. Sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Puisque $0,9 \in [0\ ;\ 1]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,9$ admet une unique solution α sur $[0\ ;\ 1]$.

c. À l'aide de la calculatrice :

$$\begin{array}{rcl} f(0,80) & = & 0,896 \\ f(0,81) & = & 0,905 \end{array} \Longrightarrow f(0,80) < 0,9 < f(0,81)$$

L'encadrement est donc $0,80 \leqslant \alpha \leqslant 0,81$.

d. La valeur α représente la probabilité de réussite minimale qu'un joueur doit avoir sur un lancer franc pour que sa probabilité de réussir au moins 2 lancers sur 3 soit égale à 90 %.

Exercice 14.

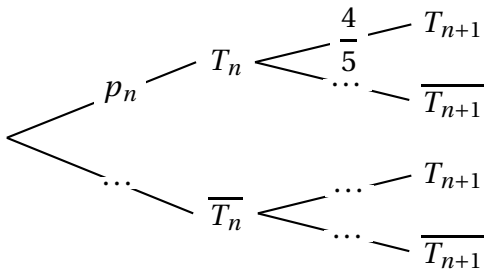
Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible dans le but d'atteindre son centre.
On modélise la situation de la façon suivante :

- au premier tir, il atteint le centre de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$;
- pour les tirs suivants :
  - lorsqu'il a atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne à nouveau le centre de la cible est $\frac{4}{5}$;
  - lorsqu'il n'a pas atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne le centre de la cible est $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement T_n : « Le tireur atteint le centre de la cible au n-ième tir ».
On note $p_n = P(T_n)$ la probabilité que l'évènement T_n se réalise.

1. Donner la valeur de p_1 et montrer que $p_2 = \frac{17}{30}$.

2. Recopier sur la copie l'arbre de probabilité suivant et compléter les pointillés avec les probabilités qui conviennent :



3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_{n+1} = \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}$$

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = p_n - \frac{5}{8}$$

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{15}$.

b. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

c. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

5. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

6. On considère ci-dessous une fonction `seuil`, incomplète, écrite en langage Python.
Recopier cette fonction sur la copie en complétant les pointillés afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de l'entier n telle que p_n soit supérieur ou égal à 0,6.

```
def seuil():
  n = 1
  p = 0.5
  while .........:
    n = .........
    p = .........
  return .........
```

7. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $p_n \geqslant 0{,}6$.

Corrigé

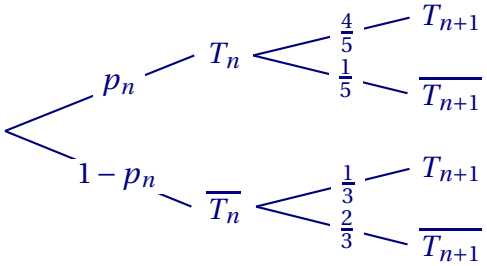
1. La valeur de p_1 est la probabilité d'atteindre le centre de la cible au premier tir.
D'après l'énoncé, cette probabilité est de $p_1 = \frac{1}{2}$.
Les deux phrases suivantes nous donnent, pour les tirs suivants :
$P_{T_n}(T_{n+1}) = \frac{4}{5}$ et $P_{\overline{T_n}}(T_{n+1}) = \frac{1}{3}$.
L'événement T_1 et son événement contraire $\overline{T_1}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :

$p_2 = P(T_2) = P(T_1 \cap T_2) + P(\overline{T_1} \cap T_2) = P(T_1) \times P_{T_1}(T_2) + P(\overline{T_1}) \times P_{\overline{T_1}}(T_2) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3}$

$p_2 = \frac{17}{30}$

On arrive bien à $p_2 = \frac{17}{30}$.

2. L'arbre complété est donc :



3. Soit n un entier naturel non nul.

Les événements T_n et $\overline{T_n}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :

$p_{n+1} = P(T_{n+1}) = P(T_n \cap T_{n+1}) + P(\overline{T_n} \cap T_{n+1}) = P(T_n) \times P_{T_n}(T_{n+1}) + P(\overline{T_n}) \times P_{\overline{T_n}}(T_{n+1})$

$p_{n+1} = p_n \times \frac{4}{5} + (1 - p_n) \times \frac{1}{3} = p_n \times \frac{4}{5} + \frac{1}{3} - p_n \times \frac{1}{3} = p_n \times \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3}$

On a bien établi la relation de récurrence de la suite (p_n).

4. **a.** On va montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{15}$, en établissant sa relation de récurrence. On sait que pour tout n, on a $u_n = p_n - \frac{5}{8}$ donc $p_n = u_n + \frac{5}{8}$.

Soit n un entier naturel non nul :

$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{5}{8}$ d'après la définition de la suite (u_n)

$= \left(\frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{8}$ d'après la relation de récurrence de la suite (p_n)

$= \frac{7}{15} p_n + \frac{8}{24} - \frac{15}{24} = \frac{7}{15} p_n - \frac{7}{24} = \frac{7}{15}\left(u_n + \frac{5}{8}\right) - \frac{7}{24}$

$= \frac{7}{15} u_n + \frac{7}{15} \times \frac{5}{8} - \frac{7}{24} = \frac{7}{15} u_n + \frac{7}{24} - \frac{7}{24}$

$= \frac{7}{15} \times u_n$

La relation de récurrence de la suite (u_n) est bien celle d'une suite géométrique de raison : $q = \frac{7}{15}$.

b. Le premier terme de la suite est : $u_1 = p_1 - \frac{5}{8} = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}$.

Puisque (u_n) est géométrique, par propriété, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}$$

c. En partant de la définition de la suite (u_n), pour un entier n naturel non nul, on a :

$$u_n = p_n - \frac{5}{8} \iff p_n = \frac{5}{8} + u_n$$
$$\iff p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}$$

5. Comme on a : $0 < \frac{7}{15} < 1$, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} = 0$.

Par limite du produit, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} = 0$

Enfin, par limite de la somme, on conclut : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{5}{8}$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'au bout d'un nombre de tir important, la probabilité pour le titreur d'atteindre le centre de la cible se stabilise autour de $\frac{5}{8}$.

6. Pour que la fonction renvoie la plus petite valeur de l'entier n telle que p_n soit supérieur ou égal à 0,6, il faut que la boucle `while` dans laquelle on va actualiser les valeurs de l'indice et du terme de la suite (p_n) tourne tant que p_n n'est pas supérieur ou égal à 0,6, c'est-à-dire tant que le terme de (p_n) est strictement inférieur à 0,6.

Cela donne donc :

```
def seuil():
  n = 1
  p = 0.5
  while p < 0.6 :
    n = n + 1
    p = p*7/15 +
1/3
  return n
```

7. Résolvons dans $\mathbb{N}$:

$$p_n \geqslant 0,6 \iff \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geqslant 0,6$$
$$\iff -\frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geqslant 0,6 - \frac{5}{8}$$
$$\iff \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \leqslant -8 \times \left(0,6 - \frac{5}{8}\right) \quad \text{car } -8 < 0$$
$$\iff \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \leqslant -4,8 + 5$$
$$\iff \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \leqslant 0,2$$
$$\iff \ln\left(\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}\right) \leqslant \ln(0,2) \quad \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}^{*+}$$
$$\iff (n-1)\ln\left(\frac{7}{15}\right) \leqslant \ln(0,2) \quad \text{par propriété de la fonction ln}$$

$$p_n \geqslant 0,6 \iff n-1 \geqslant \frac{\ln(0,2)}{\ln\left(\frac{7}{15}\right)} \quad \text{car } \ln\left(\frac{7}{15}\right) < 0$$
$$\iff n \geqslant 1 + \frac{\ln(0,2)}{\ln\left(\frac{7}{15}\right)}$$

Or $1 + \dfrac{\ln(0,2)}{\ln\left(\frac{7}{15}\right)} \approx 3,1$.

Comme on résout dans $\mathbb{N}$, les solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 4.

C'est donc à partir de quatre lancers que l'archer a une probabilité d'atteindre le centre de la cible supérieure ou égale à 0,6.

Remarque : si on exécute la fonction `seuil`, elle renvoie effectivement 4.

Exercice 15.

Un supermarché dispose d'un stock de tomates provenant de deux fournisseurs A et B.
II a été constaté que :

- 91 % du stock de tomates est commercialisable ;
- 60 % du stock de tomates provient du fournisseur A ;
- parmi les tomates provenant du fournisseur A , la proportion de tomates commercialisables est de 95 %.

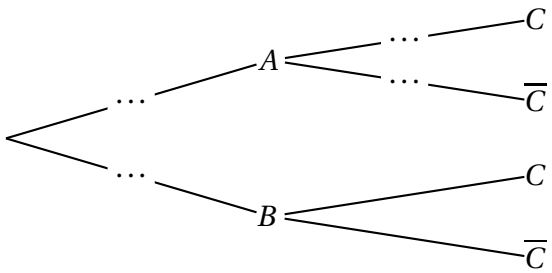
On choisit au hasard une tomate dans le stock.
On désigne par :

- A l'évènement « La tomate provient du fournisseur A » ;
- B l'évènement « La tomate provient du fournisseur B » ;
- C l'évènement « La tomate est commercialisable ».

Pour un évènement quelconque E, on note $P(E)$ la probabilité de E.

Partie A

1. Recopier l'arbre ci-dessous en complétant les pointillés.



2. a. Déterminer la probabilité que la tomate choisie soit commercialisable et provienne du fournisseur A

b. Démontrer que $P_B(C) = 0,85$.

c. La tomate choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il y a deux fois moins de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B. A-t-il raison ?

Partie B

On rappelle que 9 % des tomates du stock ne sont pas commercialisables.

1. On prend 15 tomates dans le stock au hasard et de manière indépendante. On considère que le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables dans cet échantillon de 15 tomates.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. En préciser les paramètres.

b. Déterminer la probabilité qu'exactement deux tomates soient non commercialisables.
On donnera la valeur arrondie au millième.

c. Déterminer la probabilité qu'au plus deux tomates soient non commercialisables.
On donnera la valeur arrondie au millième.

2. On constitue désormais un échantillon de n tomates, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel non nul.

On note X_n, la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables et F_n la variable aléatoire égale à la fréquence de tomates non commercialisables dans cet échantillon de n tomates.

On a donc $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

On admet que la variable aléatoire X_n, suit la loi binomiale de paramètres n et $0,09$.

a. Calculer l'espérance $E(F_n)$ et exprimer la variance $V(F_n)$ en fonction de n.

b. Démontrer que $P(0,04 < F_n < 0,14) \geqslant 1 - \dfrac{32,76}{n}$.

c. Le responsable des achats prélève dans le stock un échantillon de 500 tomates. Il s'aperçoit que 55 tomates ne sont pas commercialisables.

Est-ce conforme à ce qu'il pouvait attendre ? Justifier la réponse.

Corrigé

Un supermarché dispose d'un stock de tomates provenant de deux fournisseurs A et B.
II a été constaté que :

- 91 % du stock de tomates est commercialisable ;
- 60 % du stock de tomates provient du fournisseur A ;
- parmi les tomates provenant du fournisseur A, la proportion de tomates commercialisables est de 95 %.

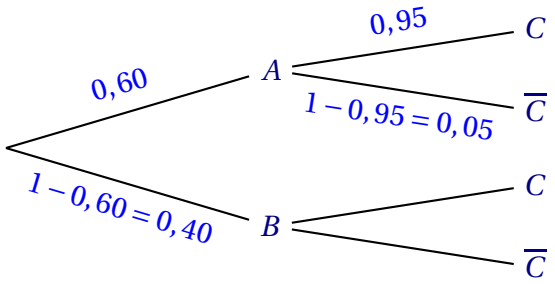
On choisit au hasard une tomate dans le stock.
On désigne par :

- A l'évènement « La tomate provient du fournisseur A » ;
- B l'évènement « La tomate provient du fournisseur B » ;
- C l'évènement « La tomate est commercialisable ».

Pour un évènement quelconque E, on note $P(E)$ la probabilité de E.

Partie A

1. On complète l'arbre ci-dessous.



2. a. La probabilité que la tomate choisie soit commercialisable et provienne du fournisseur A est $P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0,60 \times 0,95 = 0,57$.

b. On cherche $P_B(C)$. D'après le texte : $P(C) = 0,91$.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$ donc $P(C) = P(A \cap C) + P(B) \times P_B(C)$.

Donc : $0,91 = 0,57 + 0,40 \times P_B(C)$, soit $0,34 = 0,40 \times P_B(C)$, et donc : $P_B(C) = \dfrac{0,34}{0,40} = 0,85$.

c. La tomate choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il y a deux fois moins de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B.

Il faut donc comparer $P_{\overline{C}}(A)$ et $P_{\overline{C}}(B)$.

$$P_{\overline{C}}(A) = \frac{P\left(A \cap \overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)} = \frac{0,60 \times 0,05}{1 - 0,91} = \frac{0,03}{0,09} = \frac{1}{3}$$

$$P_{\overline{C}}(B) = \frac{P\left(B \cap \overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)} = \frac{0,40 \times (1 - 0,85)}{0,09} = \frac{0,06}{0,09} = \frac{2}{3}$$

$P_{\overline{C}}(A) = \dfrac{1}{2} \times P_{\overline{C}}(B)$ donc le responsable commercial a raison.

Partie B

On rappelle que 9 % des tomates du stock ne sont pas commercialisables.

1. On prend 15 tomates dans le stock au hasard et de manière indépendante. On considère que le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables dans cet échantillon de 15 tomates.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale ; ses paramètres sont $n = 15$ et $p = 0,09$.

b. La probabilité qu'exactement deux tomates soient non commercialisables est :

$P(X = 2) = \binom{15}{2} \times 0,09^2 \times (1 - 0,09)^{15-2}$ qui a pour arrondi au millième 0,250.

c. La probabilité qu'au plus deux tomates soient non commercialisables est :

$P(X \leqslant 2) \approx 0,853$ (à la calculatrice).

2. On constitue désormais un échantillon de n tomates, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel non nul.

On note X_n, la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables et F_n la variable aléatoire égale à la fréquence de tomates non commercialisables dans cet échantillon de n tomates.

On a donc $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

On admet que la variable aléatoire X_n, suit la loi binomiale de paramètres n et $0,09$.

a.

- Puisque X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $0,09$, alors l'espérance de X_n est, par propriété : $E(X_n) = np = 0,09n$.

  On a ensuite $F_n = \dfrac{1}{n} \times X_n$,

  donc, par linéarité de l'espérance : $E(F_n) = \dfrac{1}{n}E(X_n) = \dfrac{1}{n} \times 0,09n = 0,09$.
- Puisque X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $0,09$, alors la variance de X_n est, par propriété : $V(X_n) = np(1-p) = 0,09 \times (1-0,09) \times n = 0,0819n$.

  D'après la formule : $V(aX) = a^2V(X)$, on a : $V(F_n) = V\left(\dfrac{X_n}{n}\right) = V\left(\dfrac{1}{n}X_n\right) = \dfrac{V(X_n)}{n^2}$.

  Donc $V(F_n) = \dfrac{V(X_n)}{n^2} = \dfrac{0,0819n}{n^2} = \dfrac{0,0819}{n}$.

b. On veut démontrer que $P(0,04 < F_n < 0,14) \geqslant 1 - \dfrac{32,76}{n}$.

$0,04 < F_n < 0,14 \iff 0,09 - 0,05 < F_n < 0,09 + 0,05 \iff -0,05 < F_n - 0,09 < 0,05$

$\iff |F_n - 0,09| < 0,05$

donc $P(0,04 < F_n < 0,14) = P(|F_n - 0,09| < 0,05) = 1 - P(|F_n - 0,09| \geqslant 0,05)$

La variable aléatoire F_n a pour espérance $E(F_n)$ et pour variance $V(F_n)$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

pour tout $\delta \in]0\,;+\infty[$, $P\left(\left|F_n - E(F_n)\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V(F_n)}{\delta^2}$.

$E(F_n) = 0,09$ et $V(F_n) = \dfrac{0,0819}{n}$ donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev devient :

pour tout $\delta \in]0\,;+\infty[$, $P\left(\left|F_n - 0,09\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{\frac{0,0819}{n}}{\delta^2}$.

Pour $\delta = 0,05$, l'inégalité : $P\left(\left|F_n - 0,09\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \dfrac{\frac{0,0819}{n}}{0,05^2}$, soit $P\left(\left|F_n - 0,09\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \dfrac{32,76}{n}$

$P(0,04 < F_n < 0,14) = 1 - P(|F_n - 0,09| \geqslant 0,05)$

$P\left(\left|F_n - 0,09\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \dfrac{32,76}{n}$ donc $-P\left(\left|F_n - 0,09\right| \geqslant 0,05\right) \geqslant -\dfrac{32,76}{n}$

donc $1 - P\left(\left|F_n - 0,09\right| \geqslant 0,05\right) \geqslant 1 - \dfrac{32,76}{n}$ et donc $P(0,04 < F_n < 0,14) \geqslant 1 - \dfrac{32,76}{n}$

c. Le responsable des achats prélève dans le stock un échantillon de 500 tomates. Il s'aperçoit que 55 tomates ne sont pas commercialisables.

Pour $n = 500$:

- La fréquence de tomates non commercialisables est $F = \dfrac{55}{500} = 0,11$; on remarque que $0,04 \leqslant F \leqslant 0,14$
- $1 - \dfrac{32,76}{n} = 1 - \dfrac{32,76}{500} = 0,934\,48$

On a donc $P(0,04 \leqslant F_{500} \leqslant 0,14) \geqslant 0,934\,48$.

Il y a donc une probabilité supérieure à 93,448 % que la fréquence de tomates non commercialisables soit comprise entre 0,04 et 0,14.

Comme 0,11 est compris entre 0,04 et 0,14, le résultat est conforme à ce qu'attendait le responsable.

Exercice 16.

Une plateforme de diffusion musicale propose trois types d'abonnements : « Étudiant », « Classique » et « Famille ». Elle propose également une option « Écoute hors-ligne » qu'on peut activer pour chaque type d'abonnement et qui permet de télécharger de la musique.

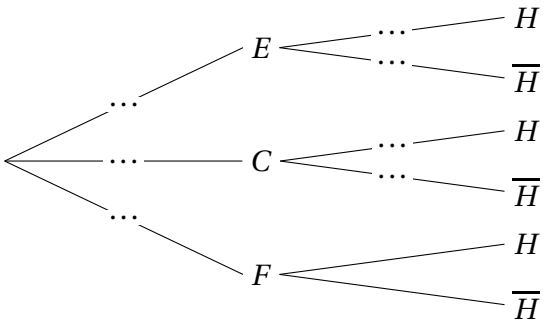
Une étude statistique menée sur les abonnés a permis d'établir que :

- 25 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Étudiant » et 15 % ont choisi l'abonnement « Famille » ;
- 45 % des abonnés « Étudiant » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 30 % des abonnés « Classique » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 12 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Famille » et ont activé l'option « Écoute hors-ligne ».

On prélève au hasard le profil d'un abonné et on considère les évènements suivants :

- E : l'abonné a choisi l'abonnement « Étudiant » ;
- C : l'abonné a choisi l'abonnement « Classique » ;
- F : l'abonné a choisi l'abonnement « Famille » ;
- H : l'abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ».

1. Recopier l'arbre de probabilités suivant, en complétant les pointillés :



2. Calculer la valeur exacte de $P(E \cap H)$.

3. Démontrer que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,412 5.

4. Un abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ». Déterminer la probabilité qu'il ait choisi l'abonnement « Étudiant ». *On arrondira le résultat au millième.*

On choisit huit abonnés de cette plateforme, au hasard et de manière indépendante. On considère qu'il y a suffisamment d'abonnés pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise.

On rappelle que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,4125.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'abonnés ayant activé l'option « Écoute hors-ligne ».

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne ». *On arrondira le résultat au millième.*

3. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.

On s'intéresse à un échantillon de n abonnés, qu'on assimile à un tirage avec remise.

On note q_n la probabilité qu'au moins un abonné de cet échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne ».

a. Démontrer que, pour tout n entier naturel non nul, $\quad q_n = 1 - 0{,}587\,5^n$.

b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à 99,9 %.

La plateforme propose les tarifs mensuels suivants :

— Abonnement « Étudiant » : 5 € par mois ;

— Abonnement « Classique » : 10 € par mois ;

— Abonnement « Famille » : 16 € par mois ;

— Option « Écoute hors-ligne » : 2 € de plus par mois, quel que soit l'abonnement choisi.

On note Y la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné.

1. Donner les six valeurs possibles prises par la variable aléatoire Y.

2. Dresser le tableau décrivant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

3. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y vaut 10,475 et interpréter ce résultat dans le contexte.

4. À l'aide de la calculatrice, donner la variance de la variable aléatoire Y, arrondie au centième.

5. Une plateforme vidéo propose les mêmes types d'abonnements. On note Z la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné à cette plateforme vidéo.

On admet que l'espérance de la variable aléatoire Z vaut 9 et son écart-type 2.

a. Calculer la variance de la variable aléatoire Z.

b. Un responsable affirme que, si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50 % de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.

Justifier cette affirmation.

Corrigé

1. Le complément de l'arbre : on a au premier niveau :

$P(E) = \dfrac{25}{100} = 0,25$, $\quad P(F) = \dfrac{15}{100} = 0,15$, donc par complément à 1 :

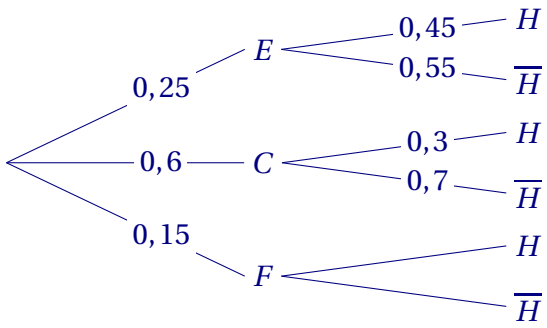
$P(C) = 1 - (0,25 + 0,15) = 1 - 0,4 = 0,6 = \dfrac{60}{100} = 60\,\%$.

Au second niveau :

— On sait que $P_E(H) = 0,45$, d'où $P_E\left(\overline{H}\right) = 1 - 0,45 = 0,55$;

— $P_C(H) = 0,30$ d'où $P_C(H) = 1 - 0,30 = 0,70$;

L'arbre de probabilités complété est :



2. Par définition des probabilités conditionnelles :

$P(E \cap H) = P(E) \times P_E(H) = 0,25 \times 0,45 = 0,112\,5$.

3. Les évènements E, C et F forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$P(H) = P\big(E \cap H\big) + P\big(C \cap H\big) + P\big(F \cap H\big)$

D'où : $\quad P(H) = 0,1125 + P(C) \times P_C(H) + P\big(F \cap H\big)$

$= 0,112\,5 + 0,6 \times 0,3 + 0,12$

$= 0,112\,5 + 0,18 + 0,12$

$= 0,412\,5$

La probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est bien de 0,412 5.

4. Trouver la probabilité qu'un abonné ayant activé l'option « Écoute hors-ligne » ait choisi l'abonnement « Étudiant » revient à calculer la probabilité $P_H(E)$.

$P_H(E) = \dfrac{P\big(H \cap E\big)}{P(H)} = \dfrac{0,112\,5}{0,412\,5} = \dfrac{3}{11} \approx 0,273$ $\quad$ à 10^{-3} près.

La probabilité qu'un abonné ayant activé l'option « Écoute hors-ligne » ait choisi l'abonnement « Étudiant » est égale à $0,273$ arrondi au millième.

1. On choisit huit abonnés de cette plateforme, au hasard et on considère qu'il y a suffisamment d'abonnés pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise, c'est-à-dire à huit répétitions identiques et indépendantes.

La probabilité du succès (un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne ») est égale à 0,412 5.

Donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,412\,5$.

Remarque : ici, on a une rédaction plus légère, car l'énoncé demande d'admettre que X suit une loi binomiale. Sinon, il faudrait les trois arguments classiques :

— On a une épreuve à deux issues, succès de probabilité $p = 0,412\,5$ et échec ;

— cette épreuve est répétée $n = 8$ fois, de façon identique et indépendante (car la constitution de l'échantillon est assimilé à un tirage au sort **avec** remise) ;

— X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès sur ces n répétitions.

2. Calculer la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne » revient à calculer la probabilité $P(X = 0)$.

$P(X = 0) = \binom{8}{0} \times 0{,}4125^0 \times (1 - 0{,}4125)^{8-0} = 0{,}5875^8 \approx 0{,}014$ à 10^{-3} près.

La probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,014 arrondi au millième.

3. a. Pour tout entier naturel non nul n, soit X_n la variable aléatoire donnant le nombre d'abonnés ayant activé l'option « Écoute hors-ligne ».

La variable aléatoire X_n suit donc une loi binomiale de paramètres n et 0,4125.

$q_n = P(X_n \geqslant 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}4125^0 \times (1 - 0{,}4125)^{n-0} = 1 - 0{,}5875^n$.

Pour tout n entier naturel non nul, on a bien $q_n = 1 - 0{,}5875^n$.

b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à 99,9 % revient à déterminer le plus petit entier naturel n tel que $q_n \geqslant 0{,}999$.

$q_n \geqslant 0{,}999 \iff 1 - 0{,}5875^n \geqslant 0{,}999$

$\iff 0{,}001 \geqslant 0{,}5875^n$

$\iff \ln(0{,}001) \geqslant \ln(0{,}5875^n)$ car la fonction logarithme népérien est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

$\iff \ln(0{,}001) \geqslant n\ln(0{,}5875)$ par propriété de la fonction ln

$\iff \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}5875)} \leqslant n$ car $\ln(0{,}5875) < 0$

Or $\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}5875)} \approx 12{,}9875$

La plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à 99,9 % est donc égale à 13.

1. La variable aléatoire Y peut prendre les valeurs :

— 5 € (uniquement l'abonnement « Étudiant »)

— 7 € (uniquement l'abonnement « Étudiant » avec l'option « Écoute hors-ligne »)

— 10 € (uniquement l'abonnement « Classique »)

— 12 € (uniquement l'abonnement « Classique » avec l'option « Écoute hors-ligne »)

— 16 € (uniquement l'abonnement « Famille »)

— 18 € (uniquement l'abonnement « Famille » avec l'option « Écoute hors-ligne »)

2. Il reste à calculer $P\left(F \cap \overline{H}\right)$.

On a $P(F) = P(F \cap H) + P\left(F \cap \overline{H}\right) \iff 0{,}15 = 0{,}12 + P\left(F \cap \overline{H}\right) \iff$

$P\left(F \cap \overline{H}\right) = 0{,}15 - 0{,}12 = 0{,}03$.

Le tableau décrivant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y est donc :

y_i	5	7	10	12	16	18
évènement $\{Y = y_i\}$	$E \cap \overline{H}$	$E \cap H$	$C \cap \overline{H}$	$C \cap H$	$F \cap \overline{H}$	$F \cap H$
$P(Y = y_i)$	0,137 5	0,112 5	0,42	0,18	0,03	0,12

3. $E(Y) = \sum_{i=1}^{6} P(Y = y_i)\, y_i$

$= 5 \times 0{,}137\,5 + 7 \times 0{,}112\,5 + 10 \times 0{,}42 + 12 \times 0{,}18 + 16 \times 0{,}03 + 18 \times 0{,}12$

$= 10{,}475$

Ce qui est le résultat donné.

Sur un très grand nombre d'abonnés, le tarif moyen mensuel sera de 10,475 €.

4. À l'aide de la calculatrice, on trouve : $V(Y) \approx 13{,}70$ arrondi au centième.

5. a. $V(Z) = \big(\sigma(Z)\big)^2 = 2^2 = 4$

La variance de la variable aléatoire Z vaut 4.

b. On cherche la probabilité que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros soit $P(6 < Z < 12)$

On remarque que l'espérance de Z est 9 €, c'est la valeur au milieu de l'intervalle $]6\ ;\ 12[$.

On a donc : $P(6 < Z < 12) = P(9 - 3 < Z < 9 + 3)$

$= P(-3 < Z - 9 < 3)$

$= P\Big(\big|Z - 9\big| < 3\Big)$

$= 1 - P(|Z - 9| \geqslant 3)$

Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$P\Big(\big|Z - E(Z)\big| \geqslant t\Big) \leqslant \dfrac{V(Z)}{t^2}$

Pour $t = 3$ on obtient : $P\Big(\big|Z - 9\big| \geqslant 3\Big) \leqslant \dfrac{4}{3^2}$.

D'où : $1 - P\Big(\big|Z - 9\big| \geqslant 3\Big) \geqslant 1 - \dfrac{4}{9}$.

Soit : $P(6 < Z < 12) \geqslant \dfrac{5}{9} > \dfrac{4{,}5}{9} = 0{,}5$.

Donc le responsable a raison, si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50 % de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.

Exercice 17.

Dans le repère orthonormé (O ; I, J) ci-contre, on a représenté :

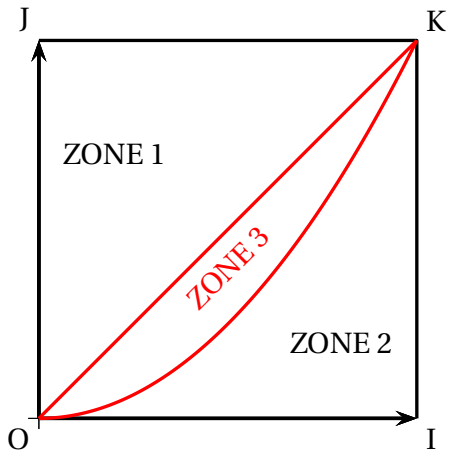
— la droite d'équation $y = x$;

— la droite d'équation $y = 1$;

— la droite d'équation $x = 1$;

— la parabole d'équation $y = x^2$.

On peut ainsi partager le carré OIKJ en trois zones.



Les parties B *et* C *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre*

Partie A

Démontrer les résultats figurant dans le tableau ci-dessous.

ZONE	ZONE 1	ZONE 2	ZONE 3
AIRE	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Partie B : un premier jeu

Un joueur lance une fléchette sur le carré ci-dessus. On admet que la probabilité qu'elle tombe sur une zone est égale à l'aire de cette zone. Ainsi, la probabilité que la fléchette tombe sur la ZONE 3 est égale à $\frac{1}{6}$.

- Si la fléchette tombe sur la ZONE 3, alors le joueur lance une pièce équilibrée.
  Si la pièce tombe sur PILE, alors le joueur gagne, sinon il perd.
- Si la fléchette tombe sur une autre zone que la ZONE 3, alors le joueur lance un dé équilibré à six faces. Si le dé tombe sur la FACE 6, alors le joueur gagne, sinon il perd.

On note les évènements suivants :

T : « la fléchette tombe sur la ZONE 3 » ;

G : « le joueur gagne ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{2}{9}$.
3. On sait que le joueur a gagné. Quelle est la probabilité que la fléchette soit tombée sur la ZONE 3 ?

Partie C : un second jeu

Un joueur, appelé joueur n° 1, lance une fléchette sur le carré précédent. Comme dans la partie B, on admet que la probabilité que la fléchette tombe sur chacune des zones est égale à l'aire de cette zone.

Le joueur gagne une somme égale, en euros, au numéro de la zone. Par exemple, si la fléchette tombe sur la ZONE 3, le joueur gagne 3 euros.

On note X_1 la variable aléatoire donnant le gain du joueur n° 1.

On note respectivement $E(X_1)$ et $V(X_1)$ l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_1.

1. **a.** Calculer $E(X_1)$.

   b. Montrer que $V(X_1) = \dfrac{5}{9}$.

2. Un joueur n° 2 et un joueur n° 3 jouent à leur tour, dans les mêmes conditions que le joueur n° 1. On admet que les parties de ces trois joueurs sont indépendantes les unes des autres.

   On note X_2 et X_3 les variables aléatoires donnant les gains des joueurs n° 2 et n° 3. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

   a. Déterminer la probabilité que l'on ait $Y = 9$.

   b. Calculer $E(Y)$.

   c. Justifier que $V(Y) = \dfrac{5}{3}$.

Corrigé

Partie A

L'aire de la ZONE 1 est l'aire du triangle OKJ. C'est un triangle rectangle isocèle en J on a donc :

$$\text{aire (ZONE 1)} = \text{aire (OKJ)} = \frac{\text{OJ} \times \text{JK}}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

L'aire de ZONE 2 est l'aire sous la courbe de la fonction carré entre 0 et 1 :

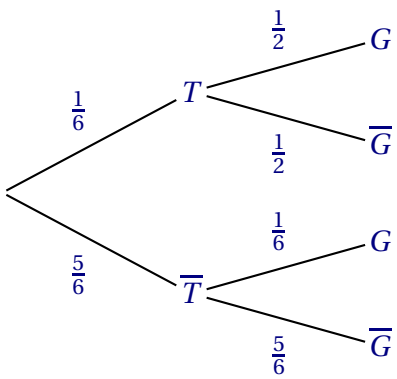
$$\text{aire (ZONE 2)} = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

• L'aire de la ZONE 3 est la différence entre l'aire du carré OIJK et la somme des aires de la ZONE 1 et de la ZONE 2 :

$$\text{aire (ZONE 3)} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 1 - \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) = \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

Partie B

1. On représente la situation par un arbre pondéré.



2. Les évènements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(G) &= P(T \cap G) + P\left(\overline{T} \cap G\right) = P(T) \times P_T(G) + P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}(G) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} = \frac{3}{36} + \frac{5}{36} \\ &= \frac{8}{36} = \frac{4 \times 2}{4 \times 9} = \boxed{\frac{2}{9}}. \end{aligned}$$

3. On veut déterminer la probabilité $P_G(T)$:

$$P_G(T) = \frac{P(T \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{\cancel{12}_{4}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{2} = \boxed{\frac{3}{8}}.$$

Partie C

1. **a.** La loi de probabilité de X_1 est :

x_i	1	2	3
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

On a donc :

$$E(X_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + \cancel{3}^{1} \times \frac{1}{\cancel{6}_{2}} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}.$$

b. On calcule la variance en utilisant la formule de König :

$$\begin{aligned} V(X_1) &= E\left(X_1^2\right) - [E(X_1)]^2 \\ &= 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{6} - \frac{25}{9} = \frac{9}{18} + \frac{24}{18} + \frac{27}{18} - \frac{50}{18} = \frac{10}{18} \\ &= \boxed{\frac{5}{9}} \end{aligned}$$

2. **a.** L'évènement $\{Y = 9\}$ correspond à $\{X_1 = 3\} \cap \{X_2 = 3\} \cap \{X_3 = 3\}$.
Donc, comme les variables X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes :

$$P(Y = 9) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{216}}.$$

b. D'après la linéarité de l'espérance :

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \boxed{5}$$

c. Puisque les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes, on peut utiliser l'additivité de la variance :

$$V(Y) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = \frac{5}{9} + \frac{5}{9} + \frac{5}{9} = \frac{15}{9} = \frac{3\times 5}{3\times 3} = \boxed{\frac{5}{3}}.$$

Exercice 18.

On dispose d'un sac et de deux urnes A et B.

— Le sac contient 4 boules : 1 boule avec la lettre A et 3 boules avec la lettre B.

— L'urne A contient 5 billets : 3 billets de 50 euros et 2 billets de 10 euros.

— L'urne B contient 4 billets : 1 billet de 50 euros et 3 billets de 10 euros.

Un joueur prend au hasard une boule dans le sac :

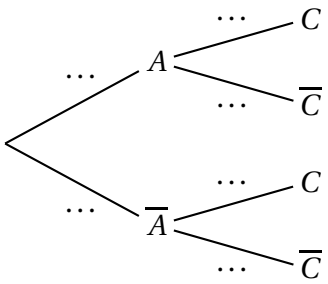
— si c'est une boule avec la lettre A, il prend au hasard un billet dans l'urne A.

— si c'est une boule avec la lettre B, il prend au hasard un billet dans l'urne B.

On note les évènements suivants :

- A : le joueur obtient une boule avec la lettre A.
- C : le joueur obtient un billet de 50 euros.

1. Recopier et compléter l'arbre ci-contre représentant la situation.



2. Quelle est la probabilité de l'évènement « *le joueur obtient une boule avec la lettre* A *et un billet de* 50 € ?

3. Démontrer que la probabilité $P(C)$ est égale à 0,337 5.

4. Le joueur a obtenu un billet de 10 euros.

L'affirmation « *Il y a plus de* 80 % *de chances qu'il ait au préalable obtenu une boule avec la lettre* B » est-elle vraie ? Justifier.

5. On note X_1 la variable aléatoire qui donne la somme, en euros, obtenue par le joueur.

Exemple : si le joueur obtient un billet de 50 €, on a $X_1 = 50$.

Montrer que l'espérance $E(X_1)$ est égale à 23,50 et que la variance $V(X_1)$ est égale à 357,75.

6. Après avoir remis la boule dans le sac et le billet dans l'urne où il a été pris, le joueur joue une deuxième partie. On note X_2 la variable aléatoire qui donne la somme obtenue par le joueur lors de cette deuxième partie.

On note Y la variable aléatoire ainsi définie : $Y = X_1 + X_2$.

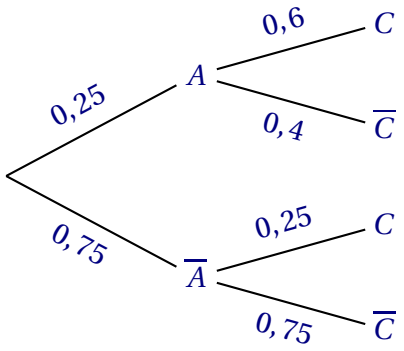
a. Montrer que $E(Y) = 47$.

b. Expliquer pourquoi on a $V(Y) = V(X_1) + V(X_2)$

7. Le joueur joue de même une troisième, une quatrième,..., une centième partie.
On définit donc de la même façon les variables aléatoires X_3, X_4, ..., X_{100}.
On note Z la variable aléatoire définie par $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$.
Démontrer que la probabilité que Z appartienne à l'intervalle $]1\,950\ ;\ 2\,750[$ est supérieure ou égale à 0,75.

Corrigé

1. On complète l'arbre représentant la situation.



2. L'évènement « Le joueur obtient une boule avec la lettre A et un billet de 50 euros » est $\{A \cap C\}$.

$$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0,25 \times 0,6 = \boxed{0,15}$$

3. Les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cap C) + P\left(\overline{A} \cap C\right) = P(A) \times P_A(C) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(C) \\ &= 0,15 + 0,75 \times 0,25 = 0,15 + 0,1875 \\ &= \boxed{0,3375} \end{aligned}$$

4. On doit calculer la probabilité $P_{\overline{C}}\left(\overline{A}\right)$:

$$P_{\overline{C}}\left(\overline{A}\right) = \frac{P\left(\overline{A} \cap \overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)} = \frac{P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}\left(\overline{C}\right)}{1 - P(C)} = \frac{0,75 \times 0,75}{1 - 0,3375} = \frac{0,5625}{0,6625} = \frac{45}{53} \approx 0,85.$$

La probabilité que le joueur ait pris une boule avec la lettre B sachant qu'il a obtenu un billet de 10 euros est environ 85 %. L'affirmation est donc vraie.

5. La loi de probabilité de X_1 est donnée par le tableau suivant :

k_i	10	50
$P(X_1 = k_i)$	0,6625	0,3375

L'espérance de X_1 est donc :

$$E(X_1) = 10 \times 0{,}662\,5 + 50 \times 0{,}337\,5 = 6{,}625 + 16{,}875 = \boxed{23{,}5}.$$

La variance de X_1 est donc :

$$\begin{aligned} V(X_1) &= E\left(X_1^2\right) - [E(X_1)]^2 = (100 \times 0{,}662\,5 + 2\,500 \times 0{,}337\,5) - 23{,}5^2 \\ &= 66{,}25 + 843{,}75 - 552{,}25 = \boxed{357{,}75}. \end{aligned}$$

6. **a.** On sait que l'espérance d'une somme de variables aléatoires est égale à la somme des espérances ; or X_1 et X_2 suivent la même loi, donc :

$$E(Y) = 2 \times E(X_1) = 2 \times 23{,}5 = \boxed{47}.$$

b. Puisque la boule et le billet ont été remis, les deux tirages sont indépendants, donc les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes. Or on sait que la variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est égale à la somme de leurs variances (propriété de l'additivité). On a donc :

$$\boxed{V(Y) = V(X_1) + V(X_2)} \text{ et donc } \boxed{V(Y) = 2 \times 357{,}75 = 715{,}5}$$

7. Le joueur joue de même une troisième, une quatrième,..., une centième partie.
On définit donc de la même façon les variables aléatoires X_3, X_4,..., X_{100}.
On note Z la variable aléatoire définie par $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$.
Pour les mêmes raisons que dans la question précédente, on a :

- $E(Z) = E\left(\sum_{k=1}^{100} X_k\right) = \sum_{k=1}^{100} (E(X_k)) = 100 \times 23{,}5 = 2\,350$
- $V(Z) = V\left(\sum_{k=1}^{100} X_k\right) = \sum_{k=1}^{100} (V(X_k)) = 100 \times 357{,}75 = 35\,775$

Pour tout réel t strictement positif, on a : $P\left(\left|Z - E(Z)\right| \geqslant t\right) \leqslant \dfrac{V(Z)}{t^2}$.
C'est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
On en déduit que : $P\left(\left|Z - E(Z)\right| < t\right) \geqslant 1 - \dfrac{V(Z)}{t^2}$. Donc : $P\left(\left|Z - 2\,350\right| < t\right) \geqslant 1 - \dfrac{35\,775}{t^2}$
$\left|Z - 2\,350\right| < t \iff 2\,350 - t < Z < 2\,350 + t$
Or on cherche $P\left(Z \in \left]1\,950\,;\,2\,750\right[\right)$ donc on prendra $t = 400$.
On aura donc : $P\left(Z \in \left]1\,950\,;\,2\,750\right[\right) \geqslant 1 - \dfrac{35\,775}{400^2}$.
$1 - \dfrac{35\,775}{400^2} \approx 0{,}776 \geqslant 0{,}75$. Donc la probabilité que Z appartienne à l'intervalle $]1\,950\,;\,2\,750[$ est supérieure ou égale à $0{,}75$.

Exercice 19.

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près en cas de besoin.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie A

Au tennis, le joueur qui est au service peut, en cas d'échec lors du premier service, servir une deuxième balle.
En match, Abel réussit son premier service dans 70 % des cas. Lorsque le premier service est réussi, il gagne le point dans 80 % des cas.
En revanche, après un échec à son premier service, Abel gagne le point dans 45 % des cas.

Abel est au service.
On considère les évènements suivants :

- S : « Abel réussit son premier service »
- G : « Abel gagne le point ».

1. Décrire l'évènement S puis traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(S \cap G)$.
3. Justifier que la probabilité de l'évènement G est égale à $0,695$.
4. Abel a gagné le point. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi son premier service ?
5. Les évènements S et G sont-ils indépendants ? Justifier.

Partie B

À la sortie d'une usine de fabrication de balles de tennis, une balle est jugée conforme dans 85 % des cas.

1. On teste successivement 20 balles. On considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées.
   a. Quelle est la loi suivie par X et quels sont ses paramètres ? Justifier.
   b. Calculer $P(X \leqslant 18)$.
   c. Quelle est la probabilité qu'au moins deux balles ne soient pas conformes parmi les 20 balles testées ?
   d. Déterminer l'espérance de X.
2. On teste maintenant n balles successivement. On considère les n tests comme un échantillon de n variables aléatoires X indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $0,85$.
   On considère la variable aléatoire

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \frac{X_3}{n} + \ldots + \frac{X_n}{n}$$

   a. Déterminer l'espérance et la variance de M_n.
   b. Après avoir rappelé l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour tout entier naturel n, $P(0,75 < M_n < 0,95) \geqslant 1 - \dfrac{12,75}{n}$.

c. En déduire un entier n tel que la moyenne du nombre de balles conformes pour un échantillon de taille n appartienne à l'intervalle $]0{,}75\,;\,0{,}95\,[$ avec une probabilité supérieure à $0{,}9$.

Corrigé

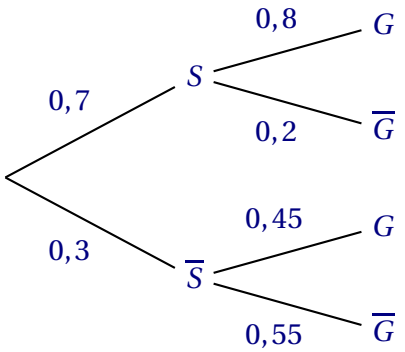
Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près en cas de besoin.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie A

Au tennis, le joueur qui est au service peut, en cas d'échec lors du premier service, servir une deuxième balle.
En match, Abel réussit son premier service dans 70 % des cas. Lorsque le premier service est réussi, il gagne le point dans 80 % des cas.
En revanche, après un échec à son premier service, Abel gagne le point dans 45 % des cas.
Abel est au service.
On considère les évènements suivants :

- S : « Abel réussit son premier service » ;
- G : « Abel gagne le point ».

1. $\overline{S}$ est l'événement : « Abel ne réussit pas son premier service. ».
On traduit la situation par un arbre pondéré.



2. $P(S \cap G) = P(S) \times P_S(G) = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$

3. $\left\{S\,,\,\overline{S}\right\}$ forme une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales, on a : $P(G) = P(S \cap G) + P\left(\overline{S} \cap G\right) = 0{,}56 + 0{,}3 \times 0{,}45 = 0{,}695$

4. Abel a gagné le point. La probabilité qu'il ait réussi son premier service est :
$P_G(S) = \dfrac{P(S \cap G)}{P(G)} = \dfrac{0{,}56}{0{,}695} \approx 0{,}806$

5. On a :

- $P(S \cap G) = 0{,}56$
- $P(S) \times P(G) = 0{,}7 \times 0{,}695 = 0{,}486\,5$

$P(S \cap G) \neq P(S) \times P(G)$ donc les événements S et G ne sont pas indépendants.

Partie B

À la sortie d'une usine de fabrication de balles de tennis, une balle est jugée conforme dans 85 % des cas.

1. On teste successivement 20 balles. On considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées.

a. L'épreuve élémentaire consiste à voir si une balle est conforme, avec une probabilité de 0,85, ou si elle ne l'est pas.

On exécute cette épreuve élémentaire 20 fois et on considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise.

Donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées, suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,85$.

b. À la calculatrice, $P(X \leqslant 18) \approx 0,824$.

c. La probabilité qu'au moins deux balles ne soient pas conformes parmi les 20 balles testées est égale à la probabilité qu'au plus 18 balles soient conformes, c'est-à-dire $P(X \leqslant 18)$ soit environ 0,824.

d. L'espérance de X est $E(X) = np = 20 \times 0,85 = 17$.

2. On teste maintenant n balles successivement. On considère les n tests comme un échantillon de n variables aléatoires X indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,85.

On considère la variable aléatoire $M_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \frac{X_3}{n} + \ldots + \frac{X_n}{n}$

a. D'après le cours, on peut dire que les n variables aléatoires X indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,85$ ont pour espérance $p = 0,85$ et pour variance $p(1-p) = 0,85 \times 0,15 = 0,1275$.

Soit S_n la loi somme définie par $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- D'après la linéarité de l'espérance, on a :

  $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} 0,85 = 0,85n$
- Les variables X_i étant indépendantes, on utilise l'additivité de la variance :

  $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} 0,1275 = 0,1275n$

M_n est la loi moyenne définie par $M_n = \frac{S_n}{n}$.

- On sait que $E(aX) = aE(X)$, donc :

  $E(M_n) = E\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{0,85n}{n} = 0,85$.
- On sait que $V(aX) = a^2V(X)$ donc :

  $V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{0,1275n}{n^2} = \frac{0,1275}{n}$.

b. Si X est une variable aléatoire et t un réel strictement positif, on a :

$P\left(\left|X - E(X)\right| \geqslant t\right) \leqslant \frac{V(X)}{t^2}$. C'est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

On en déduit que : $P\left(\left|X - E(X)\right| < t\right) \geqslant 1 - \frac{V(X)}{t^2}$. Donc :

$$P\left(\left|X - E(X)\right| < t\right) \geqslant 1 - \frac{V(X)}{t^2} \iff P\left(\left|M_n - E(M_n)\right| < t\right) \geqslant 1 - \frac{V(M_n)}{t^2}$$
$$\iff P\left(\left|M_n - 0,85\right| < t\right) \geqslant 1 - \frac{0,1275}{nt^2}$$

On prend $t = 0,1$. On a donc :

- $\left|M_n - 0,85\right| < t \iff \left|M_n - 0,85\right| < 0,1 \iff -0,1 < M_n - 0,85 < 0,1$
  $\iff 0,75 < M_n < 0,95$
- $1 - \dfrac{0,127\,5}{nt^2} = 1 - \dfrac{0,127\,5}{n \times 0,1^2} = 1 - \dfrac{12,75}{n}$

On déduit donc : $P(0,75 < M_n < 0,95) \geqslant 1 - \dfrac{12,75}{n}$.

c. Pour trouver un entier n tel que la moyenne du nombre de balles conformes pour un échantillon de taille n appartienne à l'intervalle $]0,75\,;\,0,95\,[$ avec une probabilité supérieure à $0,9$, il suffit que : $1 - \dfrac{12,75}{n} \geqslant 0,9$. On résout cette inéquation.

$1 - \dfrac{12,75}{n} \geqslant 0,9 \iff 0,1 \geqslant \dfrac{12,75}{n} \iff 0,1n \geqslant 12,75 \iff n \geqslant 127,5$

Donc il faut un échantillon de taille supérieure à $n = 128$ pour que la moyenne du nombre de balles conformes appartenant à l'intervalle $]0,75\,;\,0,95[$ ait une probabilité supérieure à $0,9$

Exercice 20.

Un étudiant mange tous les jours au restaurant universitaire. Ce restaurant propose des plats végétariens et des plats non végétariens.

- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est $0,9$.
- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat non végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est $0,7$.

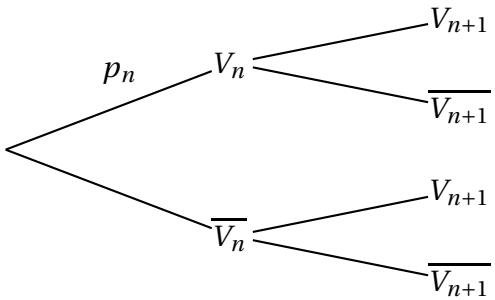
Pour tout entier naturel n, on note V_n l'évènement « l'étudiant a choisi un plat végétarien le n^{e} jour » et p_n la probabilité de V_n.
Le jour de la rentrée, l'étudiant a choisi le plat végétarien. On a donc $p_1 = 1$.

1. **a.** Indiquer la valeur de p_2.

b. Montrer que $p_3 = 0,88$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

c. Sachant que le 3e jour l'étudiant a choisi un plat végétarien, quelle est la probabilité qu'il ait choisi un plat non végétarien le jour précédent ?
On arrondira le résultat à 10^{-2}.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,7$.

4. On souhaite disposer de la liste des premiers termes de la suite (p_n) pour $n \geqslant 1$.
Pour cela, on utilise une fonction appelée `repas` programmée en langage Python dont on propose trois versions, indiquées ci-dessous.

Programme 1
```
1 def repas(n):
2   p=1
3   L=[p]
4   for k in range(1,n):
5     p = 0.2*p+0.7
6     L. append(p)
7    return(L)
```

Programme 2
```
1 def repas(n):
2   p=1
3   L=[p]
4   for k in range(1,n+1):
5     p = 0.2*p+0.7
6     L. append(p)
7   return(L)
```

Programme 3
```
1 def repas(n):
2   p=1
3   L=[p]
4   for k in range(1,n):
5     p = 0.2*p+0.7
6     L.append(p+1)
7   return(L)
```

4. **a.** Lequel de ces programmes permet d'afficher les n premiers termes de la suite (p_n) ? Aucune justification n'est attendue.

b. Avec le programme choisi à la question **a.** donner le résultat affiché pour $n = 5$.

5. Démontrer par récurrence que, pour tout naturel $n \geqslant 1$, $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$.

6. En déduire la limite de la suite (p_n).

Corrigé

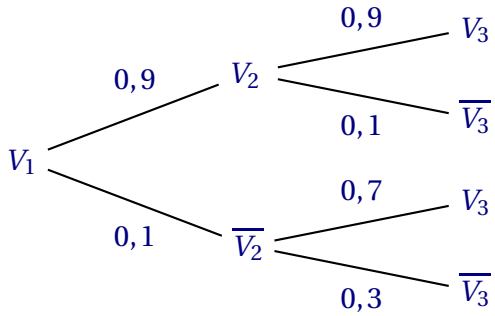
Un étudiant mange tous les jours au restaurant universitaire. Ce restaurant propose des plats végétariens et des plats non végétariens.

- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,9.
- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat non végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,7.

Pour tout entier naturel n, on note V_n, l'évènement « l'étudiant a choisi un plat végétarien le n-ième jour » et p_n la probabilité de V_n.
Le jour de la rentrée, l'étudiant a choisi le plat végétarien. On a donc $p_1 = 1$.

1. **a.** Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,9. Or $p_1 = 1$ donc $p_2 = 0,9$.

b. $p_3 = P(V_3)$. On représente la situation par un arbre pondéré.



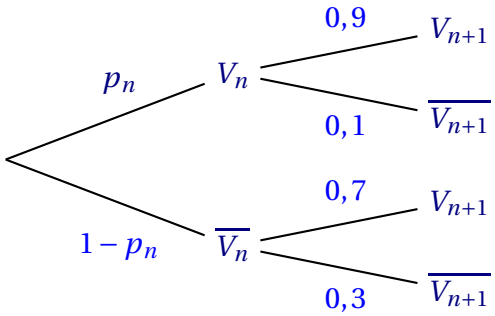
$\left\{V_2\,,\,\overline{V_2}\right\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$p_3 = P(V_3) = P(V_2 \cap V_3) + P\left(\overline{V_2} \cap V_3\right) = P(V_2) \times P_{V_2}(V_3) + P\left(\overline{V_2}\right) \times P_{\overline{V_2}}(V_3)$$
$$= 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,7 = 0,88$$

c. Sachant que le 3e jour l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il ait choisi un plat non végétarien le jour précédent est :

$$P_{V_3}\left(\overline{V_2}\right) = \frac{P\left(\overline{V_2} \cap V_3\right)}{P(V_3)} = \frac{0,1 \times 0,7}{0,88} = \frac{7}{88} \approx 0,08 \text{ au centième près.}$$

2. On complète l'arbre pondéré ci-dessous :



3. $\left\{V_n\,,\,\overline{V_n}\right\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(V_{n+1}) = P(V_n \cap V_{n+1}) + P\left(\overline{V_n} \cap V_{n+1}\right) = P(V_n) \times P_{V_n}(V_{n+1}) + P\left(\overline{V_n}\right) \times P_{\overline{V_n}}(V_{n+1})$$
$$= p_n \times 0,9 + \left(1-p_n\right) \times 0,7 = 0,9p_n + 0,7 - 0,7p_n = 0,2p_n + 0,7$$

4. On souhaite disposer de la liste des premiers termes de la suite (p_n) pour $n \geqslant 1$.

Pour cela, on utilise une fonction appelée `repas` programmée en langage Python dont on propose trois versions, indiquées ci-dessous.

Programme 1

```
1  def repas(n):
2    p=1
3    L=[p]
4    for k in range(1,n):
5      p = 0.2*p+0.7
6      L.append(p)
7    return(L)
```

Programme 2

```
1  def repas(n):
2    p=1
3    L=[p]
4    for k in range(1,n+1):
5      p = 0.2*p+0.7
6      L.append(p)
7    return(L)
```

Programme 3

```
1  def repas(n):
2    p=1
3    L=[p]
4    for k in range(1,n):
5      p=0.2*p+0.7
6      L.append(p+1)
7    return(L)
```

a. Le programme qui permet d'afficher les n premiers termes de la suite (p_n) est le n° 1.

En effet, le n° 2 donne $n+1$ termes, et le n° 3 donne des valeurs supérieures à 1.

b. Avec le programme n° 1, le résultat affiché pour $n = 5$ sera la liste $\left[p_1\,,\,p_2\,,\,p_3\,,\,p_4\,,\,p_5\right]$.

$p_1 = 1$; $p_2 = 0,9$; $p_3 = 0,88$; $p_4 = 0,2p_3 + 0,7 = 0,2 \times 0,88 + 0,7 = 0,876$ et
$p_5 = 0,2p_4 + 0,7 = 0,2 \times 0,876 + 0,7 = 0,8752$

Le résultat affiché par `repas(5)` sera donc $\left[1\,;\,0,9\,;\,0,88\,;\,0,876\,;\,0,8752\right]$.

5. On va démontrer par récurrence que $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$, pour tout naturel $n \geqslant 1$.

- **Initialisation**

  Pour $n = 1$, on a : $0,125 \times 0,2^{1-1} + 0,875 = 0,125 + 0,875 = 1$.

  Or $p_1 = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang n c'est-à-dire que $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  $$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,7 = 0,2\left(0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875\right) + 0,7$$
  $$= 0,125 \times 0,2^n + 0,2 \times 0,875 + 0,7 = 0,125 \times 0,2^n + 0,175 + 0,7$$
  $$= 0,125 \times 0,2^n + 0,875$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n non nul.

On a donc démontré par récurrence que $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$ pour tout $n \geqslant 1$.

6. $-1 < 0,2 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,2^{n-1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875 = 0,875$

La limite de la suite (p_n) est donc $0,875$.

Exercice 21.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Deux équipes de footballeurs de 22 et 25 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match. Chaque joueur d'une équipe serre une seule fois la main de chaque joueur de l'autre équipe.

Affirmation 1

47 poignées de mains ont été échangées.

2. Une course oppose 18 concurrents. On récompense indistinctement les trois premiers en offrant le même prix à chacun.

Affirmation 2

Il y a 4 896 possibilités de distribuer ces prix.

3. Une association organise une compétition de course de haies qui permettra d'établir un podium (le podium est constitué des trois meilleurs sportifs classés dans leur ordre d'arrivée). Sept sportifs participent au tournoi. Jacques est l'un d'entre eux.

Affirmation 3

Il y a 90 podiums différents dont Jacques fait partie.

4. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires de même loi donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-2	-1	2	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,4	0,3	0,2

On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et on considère Y la variable aléatoire somme de ces deux variables aléatoires.

Affirmation 4

$P(Y = 4) = 0,25$.

5. Un nageur s'entraîne dans l'objectif de parcourir le 50 mètres nage libre en moins de 25 secondes. Au fil des entraînements, il s'avère que la probabilité qu'il y parvienne s'établit à 0,85.

Il effectue, sur une journée, 20 parcours chronométrés sur 50 mètres. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où il nage cette distance en moins de 25 secondes lors de cette journée.

On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,85$.

Affirmation 5

Sachant qu'il a atteint au moins 15 fois son objectif, une valeur approchée à 10^{-3} de la probabilité qu'il l'ait atteint au moins 18 fois est $0,434$.

Corrigé

1. Deux équipes de footballeurs de 22 et 25 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match. Chaque joueur d'une équipe serre une seule fois la main de chaque joueur de l'autre équipe.

Affirmation 1

47 poignées de mains ont été échangées.

> Chaque joueur de l'équipe de 22 joueurs serre 25 mains ; cela fait donc en tout 22×25 soit 550 poignées de main.
>
> **Affirmation 1 fausse**

2. Une course oppose 18 concurrents. On récompense indistinctement les trois premiers en offrant le même prix à chacun.

Affirmation 2

Il y a 4 896 possibilités de distribuer ces prix.

> Comme on récompense indistinctement les trois premiers en offrant le même prix à chacun, il faut chercher le nombre d'ensembles à 3 éléments parmi 18 soit : $\binom{18}{3} = 816$.
>
> **Affirmation 2 fausse**

3. Une association organise une compétition de course de haies qui permettra d'établir un podium (le podium est constitué des trois meilleurs sportifs classés dans leur ordre d'arrivée). Sept sportifs participent au tournoi. Jacques est l'un d'entre eux.

Affirmation 3

Il y a 90 podiums différents dont Jacques fait partie.

> Jacques est sur le podium donc il a décroché une des 3 premières places.
> Si Jacques finit 1er, il y a 6 possibilités pour le 2e et 5 possibilités pour le 3e ; cela fait 30 podiums.
> Si Jacques finit 2e, il y a 6 possibilités pour le 1er et 5 possibilités pour le 3e ; cela fait 30 podiums.
> Si Jacques finit 3e, il y a 6 possibilités pour le 1er et 5 possibilités pour le 2e ; cela fait 30 podiums.
> Il y a 90 podiums différents dont Jacques fait partie.
>
> **Affirmation 3 vraie**

4. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires de même loi donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-2	-1	2	5
$P(X = x_i)$	$0,1$	$0,4$	$0,3$	$0,2$

On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et on considère Y la variable aléatoire somme de ces deux variables aléatoires.

Affirmation 4

$P(Y=4)=0,25$.

Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes donc
$P\left((X_1=x_i)\cap\left(X_2=x_j\right)\right)=P\left(X_1=x_i\right)\times P\left(X_2=x_j\right)$.
L'événement $(Y=4)$ est réalisé dans 3 cas disjoints :
$(X_1=-1$ et $X_2=5)$, $(X_1=2$ et $X_2=2)$, $(X_1=5$ et $X_2=-1)$.

$$\begin{aligned}P(Y=4)&=P((X_1=-1)\cap(X_2=5))+P((X_1=2)\cap(X_2=2))+P((X_1=5)\cap(X_2=-1))\\&=P(X_1=-1)\times P(X_2=5)+P(X_1=2)\times P(X_2=2)+P(X_1=5)\times P(X_2=-1)\\&=0,4\times0,2+0,3\times0,3+0,2\times0,4=0,25.\end{aligned}$$

Affirmation 4 vraie

5. Un nageur s'entraîne dans l'objectif de parcourir le 50 mètres nage libre en moins de 25 secondes. Au fil des entraînements, il s'avère que la probabilité qu'il y parvienne s'établit à $0,85$. Il effectue, sur une journée, 20 parcours chronométrés sur 50 mètres. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où il nage cette distance en moins de 25 secondes lors de cette journée.

On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0,85$.

Affirmation 5

Sachant qu'il a atteint au moins 15 fois son objectif, une valeur approchée à 10^{-3} de la probabilité qu'il l'ait atteint au moins 18 fois est $0,434$.

La probabilité cherchée est : $P_{(X\geqslant15)}(X\geqslant18)=\dfrac{P((X\geqslant15)\cap(X\geqslant18))}{P(X\geqslant15)}=\dfrac{P(X\geqslant18)}{P(X\geqslant15)}$

À la calculatrice, on trouve :

$P(X\geqslant15)\approx0,9327$ et $P(X\geqslant18)\approx0,4049$ donc $\dfrac{P(X\geqslant18)}{P(X\geqslant15)}\approx0,434$.

Affirmation 5 vraie

Exercice 22.

El Niño est un phénomène océanique à grande échelle du Pacifique équatorial qui affecte le régime des vents, la température de la mer et les précipitations sur l'ensemble du globe. Certaines années, ce phénomène est dit « dominant ». Les scientifiques cherchent à modéliser l'apparition de ce phénomène.

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes

Partie A - Premier modèle

À partir d'un échantillon de données, on considère une première modélisation :

— chaque année, la probabilité que le phénomène El Niño soit dominant est égale à $0,4$;

— la survenue du phénomène El Niño se fait de façon indépendante d'une année sur l'autre.

On note X la variable aléatoire qui, sur une période de 10 ans, associe le nombre d'années où El Niño est dominant.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

2. **a.** Calculer la probabilité que, sur une période de 10 ans, le phénomène El Niño soit dominant exactement 2 années.

b. Calculer $P(X \leqslant 2)$. Que signifie ce résultat dans le contexte de l'exercice ?

3. Calculer $E(X)$. Interpréter ce résultat.

Partie B - Second modèle

Après une étude d'un recueil de données plus important sur les 50 dernières années, une autre modélisation apparait plus pertinente :

— si le phénomène El Niño est dominant une année, alors la probabilité qu'il le soit encore l'année suivante est $0,5$

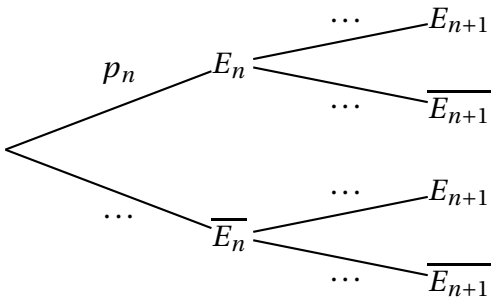
— par contre, si le phénomène El Niño n'est pas dominant une année, alors la probabilité qu'il soit dominant l'année suivante est $0,3$.

On considère que l'année de référence est 2023.
On note pour tout entier naturel n :

- E_n l'évènement « le phénomène El Niño est dominant l'année $2023+n$ » ;
- p_n la probabilité de l'évènement E_n.

En 2023, El Niño n'était pas dominant. On a ainsi $p_0 = 0$.

1. Soit n un entier naturel. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Justifier que $p_1 = 0,3$.

3. En vous aidant de l'arbre, montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,3$$

On cherche à prévoir l'évolution de l'apparition du phénomène El Niño.

4. **a.** Conjecturer les variations et la limite éventuelle de la suite (p_n).

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $p_n \leqslant \dfrac{3}{8}$.

c. Déterminer le sens de variation de la suite (p_n).

d. En déduire la convergence de la suite (p_n).

On cherche à déterminer la limite de la suite (p_n).

5. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = p_n - \dfrac{3}{8}$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,2 et préciser son premier terme.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_n = \frac{3}{8}\left(1 - 0,2^n\right).$$

c. Calculer la limite de la suite (p_n).

d. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

Partie A

1. La variable aléatoire X compte le nombre de succès d'une répétition de 10 épreuves de Bernoulli. Les épreuves sont indépendantes deux à deux. La probabilité du succès est $p = 0,4$. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $10\,;\,0,4$: $X \sim \mathscr{B}(10\,;\,0,4)$.

2. **a.** $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times p^2 \times (1-p)^{10-2} = \binom{10}{2} \times 0,4^2 \times 0,6^8 \approx 0,120\,9$

b. Comme les évènements $\{X = i\}$ et $\{X = j\}$ sont disjoints pour $i \neq j$:

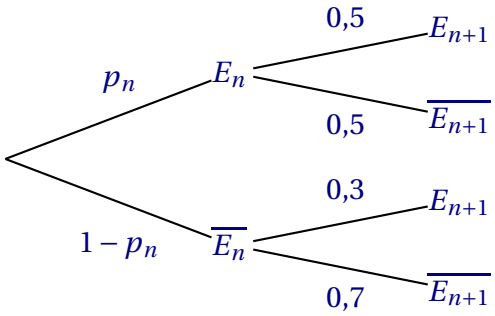
$$\begin{aligned} P(X \leqslant 2) &= P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X = 2\}) \\ &= \sum_{i=0}^{2} P(X = i) \\ &= \sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} p^i (1-p)^{10-i} \\ &\approx 0,167\,3 \end{aligned}$$

La probabilité que le phénomène El Niño soit dominant au plus deux années sur une période de 10 ans est d'environ 0,167 3.

3. Comme X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;\,0,4)$: $E(X) = n \times p = 10 \times 0,4 = 4$. En moyenne le phénomène El Nino est dominant quatre années sur une période de 10 ans.

Partie B

1.



2. $p_0 = 0$
$1 - p_0 = 1$
$p_1 = P(E_1) = P(E_0) \times P_{E_0}(E_1) + P\left(\overline{E_0}\right) \times P_{\overline{E_0}}(E_1) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 = 0{,}3$

3. $p_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P\left(\overline{E_n}\right) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$
$= p_n \times 0{,}5 + (1 - p_n) \times 0{,}3 = 0{,}2 \times p_n + 0{,}3$

4. **a.** En utilisant la calculatrice la suite (p_n) semble être croissante et avoir pour limite 0,375.

n	p_n
0	0
1	0,3
2	0,36
3	0,372
⋮	⋮
13	0,374 999 999 692 8
14	0,374 999 999 938 56

b. On formule l'hypothèse de récurrence $\mathscr{H}(n)$: $p_n \leqslant 0{,}375$.
On vérifie que $\mathscr{H}(0)$ est vraie (initialisation).
Comme $p_0 = 0 \leqslant 0{,}375$, $\mathscr{H}(0)$ est vraie.
Montrons que $\mathscr{H}(n) \Rightarrow \mathscr{H}(n+1)$ (hérédité).
On suppose que $\mathscr{H}(n)$ est vraie, avec $n \in \mathbb{N}$.
$p_{n+1} = 0{,}2 \times p_n + 0{,}3$
D'après $\mathscr{H}(n)$, $p_n \leqslant 0{,}375$, en multipliant par 0,2 on obtient :
$0{,}2 \times p_n \leqslant 0{,}075$, en ajoutant 0,3 on obtient :
$0{,}2 \times p_n + 0{,}3 \leqslant 0{,}375$, ainsi on obtient :
$p_{n+1} \leqslant 0{,}375$ ($\mathscr{H}(n+1)$ est vérifiée)
D'après le principe de récurrence,
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 0, p_n \leqslant 0{,}375$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n désignant une probabilité est un nombre positif.
Soit $n \in \mathbb{N}$

$p_{n+1} - p_n = -0{,}8 \times p_n + 0{,}3$

$p_{n+1} - p_n \geqslant -0{,}8 \times 0{,}375 + 0{,}3$

$p_{n+1} - p_n \geqslant 0$

Ceci étant valable quelque soit le choix de n, $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} - p_n \geqslant 0$, donc (p_n) est croissante.

d. (p_n) est croissante et majorée donc (p_n) est convergente vers l. De plus $l \leqslant 0{,}375$.

5. **a.**

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{3}{8} \\ &= 0{,}2 \times p_n + 0{,}3 - \frac{3}{8} \\ &= 0{,}2 \times p_n + 0{,}2 \times \frac{3}{2} - 0{,}2 \times \frac{15}{8} \\ &= 0{,}2 \times p_n + 0{,}2 \times \left(\frac{3}{2} - \frac{15}{8}\right) \\ &= 0{,}2 \times p_n + 0{,}2 \times \left(-\frac{3}{8}\right) \\ &= 0{,}2 \times \left(p_n - \frac{3}{8}\right) \end{aligned}$$

Finalement quel que soit n naturel, $u_{n+1} = 0{,}2 \times u_n$: ceci prouve que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

$u_0 = p_0 - \frac{3}{8} = 0 - \frac{3}{8} = -\frac{3}{8}$

Le premier terme est donné par : $u_0 = -\frac{3}{8}$

b. Comme (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2 de premier terme $u_0 = -\frac{3}{8}$:

$\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n = -\frac{3}{8} \times 0{,}2^n$

Comme $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n = p_n - \frac{3}{8}$,

$\forall n \in \mathbb{N} :\ p_n = -u_n + \frac{3}{8} = (-0{,}2^n + 1) \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}(1 - 0{,}2^n)$

c. Comme $0{,}2 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{3}{8}$

d. La probabilité d'observer un phénomène El Niño dominant tend vers $\frac{3}{8}$ quand le nombre d'années d'observation augmente.

Exercice 23.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Un musée propose des visites avec ou sans audioguide. Les billets peuvent être achetés en ligne ou directement au guichet.

1. Lorsqu'une personne achète son billet en ligne, un code de validation lui est envoyé par SMS afin qu'elle confirme son achat.

   Ce code est généré de façon aléatoire et est constitué de 4 chiffres deux à deux distincts, le premier chiffre étant différent de 0.

   Affirmation 1 : Le nombre de codes différents pouvant être générés est 5 040.

2. Une étude a permis de considérer que :
   - la probabilité qu'une personne choisisse l'audioguide sachant qu'elle a acheté son billet en ligne est égale à 0,8 ;
   - la probabilité qu'une personne achète son billet en ligne est égale à 0,7 ;
   - la probabilité qu'une personne opte pour une visite sans audioguide est égale à 0,32.

   Affirmation 2 : La probabilité qu'un visiteur ne prenne pas l'audioguide sachant qu'il a acheté son billet au guichet est supérieure à deux tiers.

3. On choisit au hasard 12 visiteurs de ce musée.

   On suppose que le choix de l'option « audioguide » est indépendant d'un visiteur à l'autre.

   Affirmation 3 : La probabilité qu'exactement la moitié de ces visiteurs opte pour l'audioguide est égale à $924 \times 0{,}217\,6^6$.

4. Lorsqu'une personne dispose d'un audioguide, elle peut choisir parmi trois parcours :
   - un premier d'une durée de cinquante minutes,
   - un deuxième d'une durée d'une heure et vingt minutes,
   - un troisième d'une durée d'une heure et quarante minutes.

   Le temps de parcours peut être modélisé par une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	50 min	1 h 20 min	1 h 40 min
$P(X = x_i)$	0,1	0,6	0,3

   Affirmation 4 : L'espérance de X est 77 minutes.

Corrigé

1. **Affirmation 1 : Fausse.**
   Un code de validation tel que décrit sera assimilable à un quadruplet d'entiers : en effet, dans un code, l'ordre des chiffres est important, et donc on cherche bien un quadruplet, et non pas un ensemble de cardinal 4. On va noter $(c_1\ ;\ c_2\ ;\ c_3\ ;\ c_4)$ le quadruplet en question.
   On note : $C = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 8\ ;\ 9\}$ l'ensemble des 10 chiffres de 0 à 9.

— c_1 sera choisi dans l'ensemble $C^* = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9\}$, qui a un cardinal de 9, en effet, le premier chiffre doit être différent de 0, d'après l'énoncé ;

— Les trois chiffres suivants forment un triplet d'entiers distincts choisis dans $C \setminus \{c_1\}$, qui a aussi comme cardinal 9 : c'est un arrangement de 3 éléments choisis parmi 9, il y a donc : $\dfrac{9!}{(9-3)!} = 504$ façons de choisir les trois chiffres suivants.

— Par principe multiplicatif, il existe donc : $9 \times 504 = 4\,536$ codes différents.

Remarque : On peut aussi rédiger de la façon suivante :

— Pour le premier chiffre, on a 9 choix possible (n'importe quel chiffre, sauf 0) ;

— Pour le deuxième chiffre, on a 9 choix possibles (n'importe quel chiffre, sauf le premier) ;

— Pour le troisième chiffre, on a 8 choix possibles (n'importe quel chiffre, sauf les deux premiers) ;

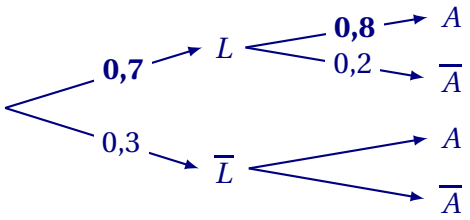
— Et pour le quatrième chiffre, on a 7 choix possibles (n'importe quel chiffre, sauf les trois premiers) ;

— Ainsi, par principe multiplicatif, il existe : $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4\,536$ codes différents.

2. Affirmation 2 : Fausse.

Notons A l'évènement « la personne a choisi l'audioguide » et L l'évènement « la personne a acheté son billet en ligne ».

Visualisons la situation décrite dans l'énoncé au moyen d'un arbre de probabilité. En gras, les probabilités données dans l'énoncé, en plus fin, celles qui s'en déduisent simplement. Les branches sans probabilités mériteront un calcul détaillé.



L'énoncé donne aussi $P(\overline{A}) = 0,32$.

La question porte sur $P_{\overline{L}}(\overline{A})$. Par définition, on a : $P_{\overline{L}}(\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{L} \cap \overline{A})}{P(\overline{L})}$.

L et $\overline{L}$ formant une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales, on a :
$P(\overline{A}) = P(L \cap \overline{A}) + P(\overline{L} \cap \overline{A})$.

D'après notre arbre : $P(L \cap \overline{A}) = P(L) \times P_{\overline{A}}(L) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$.

On a donc : $P(\overline{A}) = P(L \cap \overline{A}) + P(\overline{L} \cap \overline{A}) \iff 0,32 = 0,14 + P(\overline{L} \cap \overline{A})$.

$\iff P(\overline{L} \cap \overline{A}) = 0,32 - 0,14$

$\iff P(\overline{L} \cap \overline{A}) = 0,18$

On calcule finalement : $P_{\overline{L}}(\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{L} \cap \overline{A})}{P(\overline{L})} = \dfrac{0,18}{0,3} = 0,6 < \dfrac{2}{3}$.

La probabilité qu'un visiteur ne prenne pas l'audioguide sachant qu'il a acheté son billet au guichet est de 0,6, qui est strictement inférieur à deux tiers.

3. **Affirmation 3 : Vraie.**

On a choisi nos 12 visiteurs au hasard. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de visiteurs n'ayant pas choisi l'audioguide.

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,32$.

- En effet, chaque choix de visiteur du groupe de 12 est une expérience aléatoire à deux issues : le succès (le visiteur n'a pas choisi d'utiliser un audioguide) de probabilité $p = 0,32$ et l'échec ;
- cette expérience est répétée $n = 12$ fois, de façon indépendante (d'après l'énoncé) et identique (les probabilités étant les mêmes) ;
- X compte le nombre de succès sur ces 12 répétitions.

L'événement « exactement la moitié des 12 visiteurs opte pour l'audioguide » est donc l'événement $\{X = 6\}$: la moitié (6 visiteurs) opte pour l'audioguide, et donc l'autre moitié (les 6 autres visiteurs) refusent l'audioguide.

Par propriété, on a : $P(X = 6) = \binom{12}{6} \times 0,32^6 \times (1-0,32)^6$.

Or : $\binom{12}{6} = \dfrac{12!}{6! \times 6!} = 924$

et : $0,32^6 \times (1-0,32)^6 = 0,32^6 \times 0,68^6 = (0,32 \times 0,68)^6 = 0,2176^6$.

On a donc bien : $P(X = 6) = \binom{12}{6} \times 0,32^6 \times (1-0,32)^6 = 924 \times 0,2176^6$.

4. **Affirmation 4 : Fausse.**

Dans cette question, X est donc la variable aléatoire qui donne la durée du parcours, exprimée en minutes.

On rappelle que 1 h 20 min correspondent à 80 minutes et 1 h 40 minutes à 100 minutes.

Par définition, on a :
$$\begin{aligned} E(X) &= P(X = 50) \times 50 + P(X = 80) \times 80 + P(X = 100) \times 100 \\ &= 0,1 \times 50 + 0,6 \times 80 + 0,3 \times 100 \\ &= 5 + 48 + 30 \\ &= 83 \end{aligned}$$

L'espérance de X est donc de 83 minutes, ce qui veut dire que la durée moyenne d'une visite avec l'audioguide est de 83 minutes, soit 1 h 23 min.

Exercice 24.

Dominique répond à un QCM comportant 10 questions.
Pour chaque question, il est proposé 4 réponses dont une seule est exacte.
Dominique répond au hasard à chacune des 10 questions en cochant, pour chaque question, exactement une case parmi les 4.

Pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est donc $\frac{1}{4}$.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses à ce QCM.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X et donner les paramètres de cette loi.
2. Quelle est la probabilité que Dominique obtienne exactement 5 bonnes réponses ? Arrondir le résultat à 10^{-4} près.
3. Donner l'espérance de X et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On suppose dans cette question qu'une bonne réponse rapporte un point et qu'une mauvaise réponse fait perdre 0,5 point. La note finale peut donc être négative.
   On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.
   a. Calculer $P(Y = 10)$, on donnera la valeur exacte du résultat.
   b. À partir de combien de bonnes réponses la note finale de Dominique est-elle positive ? Justifier.
   c. Calculer $P(Y \leqslant 0)$, on donnera une valeur approchée au centième.
   d. Montrer que $Y = 1,5X - 5$.
   e. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.

Corrigé

Dominique répond à un QCM comportant 10 questions. Pour chaque question, il est proposé 4 réponses dont une seule est exacte. Dominique répond au hasard à chacune des 10 questions en cochant, pour chaque question, exactement une case parmi les 4. Pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est donc $\frac{1}{4}$.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses à ce QCM.

1. Pour chaque question, il y a deux issues possibles : Dominique donne la bonne réponse, avec une probabilité $p = \frac{1}{4}$, ou Dominique donne une mauvaise réponse.
   On effectue cette expérience élémentaire 10 fois et de façon indépendante.
   La variable aléatoire X qui compte le nombre de bonnes réponses à ce QCM suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{4}$.
2. La probabilité que Dominique obtienne exactement 5 bonnes réponses est :
   $P(X = 5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-5} \approx 0,0584$
3. L'espérance de X est $E(X) = np = 10 \times \frac{1}{4} = 2,5$.
   En procédant comme Dominique, un élève aura en moyenne 2,5 bonnes réponses.
4. On suppose dans cette question qu'une bonne réponse rapporte un point et qu'une mauvaise réponse fait perdre 0,5 point. La note finale peut donc être négative.
   On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.
   a. Pour réaliser l'évènement $(Y = 10)$, il faut que toutes les réponses soient justes donc : $P(Y = 10) = P(X = 10) = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$.
   b. On peut calculer la valeur de Y en fonction de celle de X

- On a vu que $(Y = 10)$ équivalait à $(X = 10)$.
- Si $X = 9$, il y a 9 bonnes réponses qui rapportent 9 points, et une mauvaise réponse qui en retire un demi ; donc $Y = 8,5$.
- Si $X = 8$, il y a 8 bonnes réponses qui rapportent 8 points, et deux mauvaises réponses qui retirent deux demi-points ; donc $Y = 7$.
- Etc.

On regroupe tous les résultats possibles dans un tableau.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	-5	$-3,5$	-2	$-0,5$	1	2,5	4	5,5	7	8,5	10

Donc la note finale de Dominique est positive à partir de 4 bonnes réponses.

c. D'après le tableau précédent, $P(Y \leqslant 0) = P(X \leqslant 3)$.

Donc $P(Y \leqslant 0) \approx 0,78$.

d. X prend toutes les valeurs entières entre 0 et 10.

Pour X bonnes réponses qui rapportent X points, il y en a $10 - X$ mauvaises qui retirent $0,5(10 - X)$ points.

Donc $Y = X - 0,5(10 - X) = X - 5 + 0,5X = 1,5X - 5$.

e. D'après la linéarité de l'espérance mathématique, on a :

$E(Y) = E(1,5X - 5) = 1,5 \times E(X) - 5 = 1,5 \times 2,5 - 5 = -1,25$.

Exercice 25.

Soit n un entier naturel non nul.
Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on considère une suite d'évènements A_n et on note p_n la probabilité de l'évènement A_n.
Pour les parties **A** et **B** de l'exercice, on considère que :

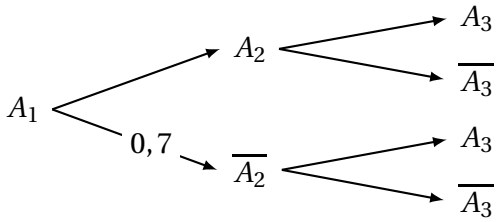
— Si l'évènement A_n est réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,3.

— Si l'évènement A_n n'est pas réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,7.

On suppose que $p_1 = 1$.

Partie A :

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :

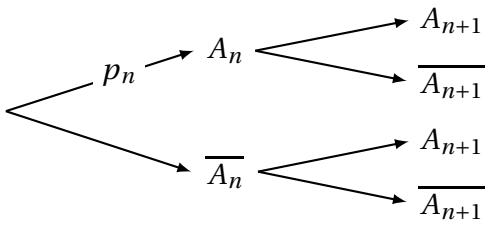


2. Montrer que $p_3 = 0,58$.

3. Calculer la probabilité conditionnelle $P_{A_3}(A_2)$, arrondir le résultat à 10^{-2} près.

Partie B :
Dans cette partie, on étudie la suite (p_n) avec $n \geqslant 1$.

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :



2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = -0,4p_n + 0,7$.
On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n non nul par :
$u_n = p_n - 0,5$.

b. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c. En déduire l'expression de u_n, puis de p_n en fonction de n.

d. Déterminer la limite de la suite (p_n).

Partie C :
Soit $x \in]0\,;\,1[$, on suppose que $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P_{A_n}\left(\overline{A_{n+1}}\right) = x$. On rappelle que $p_1 = 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = (1-2x)p_n + x$.

2. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

3. Montrer que la suite (p_n) est convergente et donner sa limite.

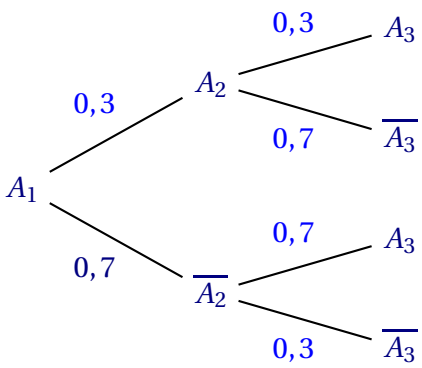
Corrigé
Soit n un entier naturel non nul.
Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on considère une suite d'évènements A_n et on note p_n la probabilité de l'évènement A_n.
Pour les parties **A** et **B** de l'exercice, on considère que :

- Si l'évènement A_n est réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,3.
- Si l'évènement A_n n'est pas réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,7.

On suppose que $p_1 = 1$.

Partie A :

1. On complète l'arbre des probabilités ci-dessous :



2. $\left\{A_2\,,\,\overline{A_2}\right\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

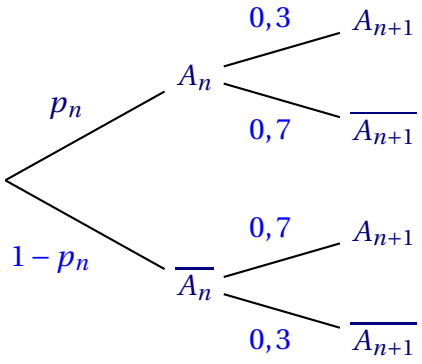
$$P(A_3) = P(A_2 \cap A_3) + P\left(\overline{A_2} \cap A_3\right) = P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P\left(\overline{A_2}\right) \times P_{\overline{A_2}}(A_3)$$
$$= 0,3 \times 0,3 + 0,7 \times 0,7 = 0,58$$

3. $P_{A_3}(A_2) = \dfrac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \dfrac{0,3 \times 0,3}{0,58} \approx 0,16$

Partie B :

Dans cette partie, on étudie la suite (p_n) avec $n \geqslant 1$.

1. On complète l'arbre des probabilités ci-dessous :



2. **a.** $\left\{A_n\,,\,\overline{A_n}\right\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right)$$
$$= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n}\right) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$$
$$= p_n \times 0,3 + \left(1 - p_n\right) \times 0,7 = 0,3p_n + 0,7 - 0,7p_n = -0,4p_n + 0,7$$

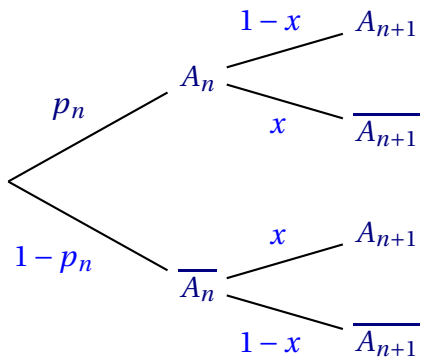
On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,5$. Donc $p_n = u_n + 0,5$.

b. $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,5 = -0,4p_n + 0,7 - 0,5 = -0,4(u_n + 0,5) + 0,2 = -0,4u_n - 0,2 + 0,2$
$= -0,4u_n$
$u_1 = p_1 - 0,5 = 1 - 0,5 = 0,5$
Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = -0,4$ et de premier terme $u_1 = 0,5$.

c. On en déduit que, pour tout n, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,5 \times (-0,4)^{n-1}$.
Et donc $p_n = u_n + 0,5 = 0,5 \times (-0,4)^{n-1} + 0,5$.

d. On a : $-1 < -0,4 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0,4)^{n-1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0,5$.

Partie C :
Soit $x \in]0\,;\,1[$, on suppose que $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P_{A_n}\left(\overline{A_{n+1}}\right) = x$. On rappelle que $p_1 = 1$.
On représente cette situation par un arbre de probabilités.



1. $\left\{A_n\,,\,\overline{A_n}\right\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :
$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right)$
$= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n}\right) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$
$= p_n \times (1-x) + \left(1 - p_n\right) \times x = p_n - xp_n + x - xp_n = (1-2x)\,p_n + x$

2. On va démontrer par récurrence que $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$, on a $\frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
  Or $p_1 = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie au rang n c'est-à-dire que $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$; c'est l'hypothèse de récurrence.
  $$p_{n+1} = (1-2x)\,p_n + x = (1-2x)\left(\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}\right) + x$$
  $$= (1-2x) \times \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + (1-2x) \times \frac{1}{2} + x = \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2} - x + x$$
  $$= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2}$$
  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n non nul.

On a donc démontré par récurrence sur n que $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

3. $0 < x < 1$ donc $-2 < -2x < 0$ et donc $-1 < 1-2x < 1$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-2x)^{n-1} = 0$ donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 26.

En France il y a deux formules pour obtenir le permis de conduire :

- Suivre à partir de 15 ans une formation de conduite accompagnée pendant 2 ans ;
- Suivre la formation classique (sans conduite accompagnée) à partir de 17 ans.

En France actuellement, parmi les jeunes qui suivent une formation au permis de con-duire, 16 % choisissent la formation de conduite accompagnée, et parmi eux, 74,7 % réussissent l'examen de conduite dès leur première tentative.
En suivant la formation classique, le taux de réussite dès la première tentative est seulement de 56,8 %.

On choisit au hasard un jeune français qui a déjà passé l'examen de conduite et on considère les évènements A et R suivants :

- A : « le jeune a suivi la formation de conduite accompagnée » ;
- R : « le jeune a eu le permis dès sa première tentative ».

On arrondira les résultats à 10^{-3} près, si nécessaire.

Partie A

1. Dresser un arbre de probabilités modélisant cette situation.

2. **a.** Démontrer que $P(R) = 0{,}596\,64$.
Dans la suite, on gardera la valeur 0,597 arrondie à 10^{-3} près.

b. Donner ce résultat en pourcentage et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. On choisit un jeune ayant eu son permis dès sa première tentative. Quelle est la probabilité qu'il ait suivi la formation de conduite accompagnée ?

4. Quelle devrait être la proportion de jeunes suivant la formation de conduite accompagnée si on voulait que le taux de réussite global (quelle que soit la formation choisie) dès la première tentative à l'examen de conduite dépasse 70 % ?

Partie B

Une auto-école présente pour la première fois à l'examen de conduite 10 candidats qui ont suivi la formation de conduite accompagnée. On modélise le fait de passer les examens de conduite par des épreuves aléatoires indépendantes.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces 10 candidats qui auront leur permis dès la première tentative.

1. Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,747$.
2. Calculer $P(X \geqslant 6)$. Interpréter ce résultat.
3. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
4. Il y a aussi 40 candidats qui n'ont pas suivi la formation de conduite accompagnée et qui se présentent pour la première fois à l'examen de conduite. De la même manière, on note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de ces candidats qui auront le permis à la première tentative. On admet que Y est indépendante de la variable X et qu'en fait $E(Y) = 22,53$ et $V(Y) = 9,81$.

   On note alors Z la variable aléatoire comptant le nombre total de candidats (parmi les 50) qui auront le permis de conduire dès la première tentative dans cette auto-école.

   a. Exprimer Z en fonction de X et Y. En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.
   b. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité qu'il y ait au plus 20 ou au moins 40 candidats qui aient leur permis dès la première tentative est inférieure à 0,12.

Corrigé

En France il y a deux formules pour obtenir le permis de conduire :

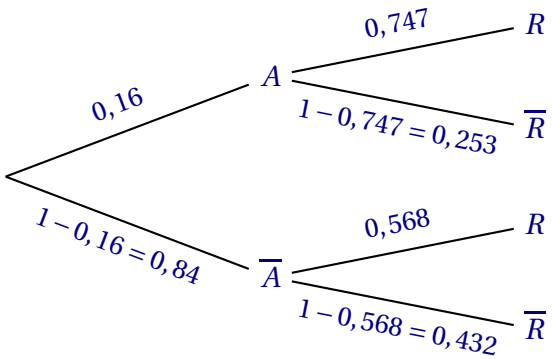
- Suivre à partir de 15 ans une formation de conduite accompagnée pendant 2 ans ;
- Suivre la formation classique (sans conduite accompagnée) à partir de 17 ans.

En France actuellement, parmi les jeunes qui suivent une formation au permis de con-duire, 16 % choisissent la formation de conduite accompagnée, et parmi eux, 74,7 % réussissent l'examen de conduite dès leur première tentative. En suivant la formation classique, le taux de réussite dès la première tentative est seulement de 56,8 %. On choisit au hasard un jeune français qui a déjà passé l'examen de conduite et on considère les évènements A et R suivants :

- A : « le jeune a suivi la formation de conduite accompagnée » ;
- R : « le jeune a eu le permis dès sa première tentative ».

Partie A

1. On dresse un arbre de probabilités modélisant cette situation.



2. **a.** D'après la loi des probabilités totales :

$$P(R) = P(A \cap R) + P\left(\overline{A} \cap R\right) = P(A) \times P_A(R) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(R)$$
$$= 0,16 \times 0,747 + 0,84 \times 0,568 = 0,119\,52 + 0,477\,12$$
$$= 0,596\,64$$

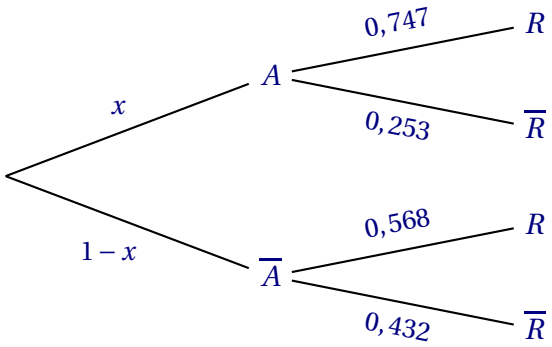
Dans la suite, on gardera la valeur $0,597$ arrondie à 10^{-3} près.

b. Une probabilité de $0,597$ correspond à un pourcentage de $59,7\,\%$.
Le pourcentage de réussite lors du premier passage du permis est de $59,7\,\%$, quel que soit le mode d'apprentissage.

3. On choisit un jeune ayant eu son permis dès sa première tentative.
La probabilité qu'il ait suivi la formation de conduite accompagnée est :

$$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} \approx \frac{0,16 \times 0,747}{0,597} \approx 0,200$$

4. On cherche la proportion x de jeunes suivant la formation de conduite accompagnée pour que le taux de réussite global (quelle que soit la formation choisie) dès la première tentative à l'examen de conduite dépasse $70\,\%$.
L'arbre précédent devient :



Le taux de réussite devient alors :

$$P(R) = x \times 0,747 + (1-x) \times 0,568 = 0,747x + 0,568 - 0,568x = 0,179x + 0,568$$

$$P(R) > 0,70 \iff 0,179x + 0,568 > 0,7 \iff 0,179x > 0,132 \iff x > \frac{0,132}{0,179}$$

Or $\dfrac{0,132}{0,179} \approx 0,737$.
Il faudrait donc qu'au moins $73,7\,\%$ des jeunes choisissent la conduite accompagnée pour dépasser un taux de réussite de $70\,\%$.

Partie B

Une auto-école présente pour la première fois à l'examen de conduite 10 candidats qui ont suivi la formation de conduite accompagnée. On modélise le fait de passer les examens de conduite par des épreuves aléatoires indépendantes.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces 10 candidats qui auront leur permis dès la première tentative.

1. L'expérience élémentaire consiste à choisir un candidat ; il y a deux possibilités : il est reçu, avec une probabilité $p = 0,747$, ou il ne l'est pas.

On réalise 10 fois cette expérience et on suppose que les épreuves aléatoires sont indépendantes.

Donc la variable aléatoire X donnant le nombre de ces 10 candidats qui auront leur permis dès la première tentative suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,747$.

2. $P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5)$

À la calculatrice on trouve $P(X \leqslant 5) \approx 0,082$ donc $P(X \geqslant 6) \approx 0,918$.

On peut donc estimer à 91,8 % le pourcentage de chances que sur 10 candidats, au moins 6 obtiennent le permis dès leur première tentative.

3. $E(X) = np = 10 \times 0,747 = 7,47$ et $V(X) = np\left(1-p\right) = 10 \times 0,747 \times 0,253 \approx 1,890$

4. Il y a aussi 40 candidats qui n'ont pas suivi la formation de conduite accompagnée et qui se présentent pour la première fois à l'examen de conduite. De la même manière, on note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de ces candidats qui auront le permis à la première tentative. On admet que Y est indépendante de la variable X et qu'en fait $E(Y) = 22,53$ et $V(Y) = 9,81$.

On note alors Z la variable aléatoire comptant le nombre total de candidats (parmi les 50) qui auront le permis de conduire dès la première tentative.

a. D'après le texte : $Z = X + Y$

D'après la linéarité de l'espérance : $E(Z) = E(X) + E(Y) = 7,47 + 22,53 = 30$.

Les variables X et Y sont indépendantes, donc on peut utiliser l'additivité de la variance : $V(Z) = V(X) + V(Y) \approx 1,89 + 9,81 = 11,7$.

b. La variable aléatoire Z a pour espérance $E(Z)$ et pour variance $V(Z)$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

pour tout $\delta \in \left]0\,;\,+\infty\right[$, $P\left(\left|Z - E(Z)\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V(Z)}{\delta^2}$.

$E(Z) = 30$ et $V(Z) = 11,7$ donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev devient :

pour tout $\delta \in \left]0\,;\,+\infty\right[$, $P\left(\left|Z - 30\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{11,7}{\delta^2}$.

On cherche la probabilité qu'il y ait moins de 20 ou plus de 40 candidats reçus.

$Z \leqslant 20 \iff Z - 30 \leqslant -10$ et $Z \geqslant 40 \iff Z - 30 \geqslant 10$

$\left((Z - 30 \leqslant -10) \text{ ou } (Z - 30 \geqslant 10)\right) \iff \left|Z - 30\right| \geqslant 10$

Pour $\delta = 10$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev devient :

$P\left(\left|Z - 30\right| \geqslant 10\right) \leqslant \dfrac{11,7}{10^2}$ donc $P\left(\left|Z - 30\right| \geqslant 10\right) \leqslant 0,117$

donc la probabilité qu'il y ait au plus 20 ou au moins 40 candidats qui aient leur permis dès la première tentative est inférieure à 0,12.

Exercice 27.

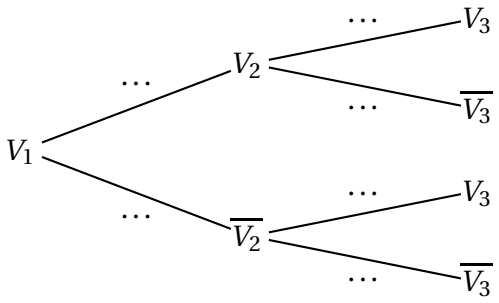
Dans tout l'exercice, les probabilités seront, si nécessaire, arrondies à 10^{-3} près.
Une donnée binaire est une donnée qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.
Une donnée de ce type est transmise successivement d'une machine à une autre.
Chaque machine transmet la donnée reçue soit de manière fidèle, c'est-à-dire en transmettant l'information telle qu'elle l'a reçue (1 devient 1 et 0 devient 0), soit de façon contraire (1 devient 0 et 0 et devient 1).
La transmission est fidèle dans 90 % des cas, et donc contraire dans 10 % des cas.
Dans tout l'exercice, la première machine reçoit toujours la valeur 1.

Partie A

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

- V_n l'évènement : « la n-ième machine détient la valeur 1 » ;
- $\overline{V_n}$ l'évènement : « la n-ième machine détient la valeur 0 ».

1. **a.** Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



b. Démontrer que $P(V_3) = 0,82$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Sachant que la troisième machine a reçu la valeur 1, calculer la probabilité que la deuxième machine ait aussi reçu la valeur 1.

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note $p_n = P(V_n)$.
La première machine a reçu la valeur 1, on a donc $p_1 = 1$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1.$$

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5.$$

c. Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Pour modéliser en langage Python la transmission de la donnée binaire décrite en début d'exercice, on considère la fonction `simulation` qui prend en paramètre un entier naturel n qui représente le nombre de transmissions réalisées d'une machine à une autre, et qui renvoie la liste des valeurs successives de la donnée binaire.
On donne ci-dessous le script incomplet de cette fonction.
On rappelle que l'instruction `rand()` renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle $[0 ; 1[$.

```
1   def simulation(n):
2       donnee = 1
3       liste = [donnee]
4       for k in range(n):
5           if rand() <0.1
6               donnee = 1 - donnee
7           liste.append(donnee)
9       return liste
```

Par exemple, `simulation(3)` peut renvoyer [1, 0, 0, 1].Cette liste traduit :

- qu'une donnée binaire a été successivement transmise trois fois entre quatre machines ;
- la première machine qui détient la valeur 1 a transmis de façon contraire cette donnée à la deuxième machine ;
- la deuxième machine a transmis la donnée qu'elle détient de façon fidèle à la troisième ;
- la troisième machine a transmis de façon contraire la donnée qu'elle détient à la quatrième.

1. Déterminer le rôle des instructions des lignes 5 et 6 de l'algorithme ci-dessus.

2. Calculer la probabilité que simulation(4) renvoie la liste [1, 1, 1, 1, 1] et la probabilité que `simulation(6)` renvoie la liste [1, 0, 1, 0, 0, 1, 1].

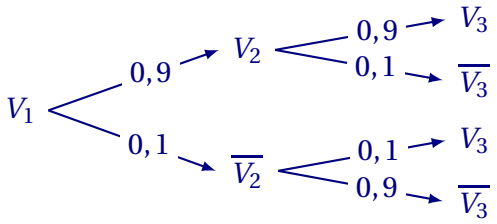
Corrigé

L'énoncé annonce des proportions, on va modéliser la situation de probabilité en assimilant les proportions à des probabilités.

Partie A

1. **a.** D'après l'énoncé, on a donc : $P(V_1) = 1$ et, pour tout n naturel supérieur ou égal à 2 : $P_{V_{n-1}}(V_n) = 0,9$ et aussi $P_{\overline{V_{n-1}}}\left(\overline{V_n}\right) = 0,9$. (une transmission fidèle, c'est quand les machines $n-1$ et n détiennent la même valeur).

On obtient l'arbre ci-contre :



b. Les évènements V_2 et $\overline{V_2}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :
$P(V_3) = P\left(V_3 \cap V_2\right) + P\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right) = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,1 = 0,81 + 0,01 = 0,82$.
On arrive bien à $P(V_3) = 0,82$.

c. On demande de calculer : $P_{V_3}(V_2)$.
D'après la définition, on a : $P_{V_3}(V_2) = \dfrac{P(V_3 \cap V_2)}{P(V_3)} = \dfrac{0,9 \times 0,9}{0,82} = \dfrac{81}{82} \approx 0,988$.
À 10^{-3} près, la probabilité que la machine 2 détienne 1, sachant que la machine 3 détient 1 est d'environ 0,988.

2. **a.** Soit n un entier naturel non nul.

Les évènements V_n et $\overline{V_n}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P(V_{n+1}) \\
&= P\left(V_{n+1} \cap V_n\right) + P\left(V_{n+1} \cap \overline{V_n}\right) \\
&= P_{V_n}\left(V_{n+1}\right) \times P\left(V_n\right) + P_{\overline{V_n}}\left(V_{n+1}\right) \times P\left(\overline{V_n}\right) \\
&= 0,9 \times P\left(V_n\right) + 0,1 \times P\left(\overline{V_n}\right) \\
&= 0,9 \times p_n + 0,1 \times (1 - p_n) \\
&= 0,9p_n + 0,1 - 0,1p_n \\
&= 0,8p_n + 0,1
\end{aligned}$$

On arrive donc bien à la relation de récurrence annoncée pour la suite (p_n).

b. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

P_n est l'affirmation : « $p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$ ».

Initialisation : on a, d'après l'énoncé : $p_1 = 1$,

et, par ailleurs, on a : $0,5 \times 0,8^{1-1} + 0,5 = 0,5 + 0,5 = 1$.

On constate donc que l'affirmation P_1 est vraie.

Hérédité : soit n naturel non nul tel que l'affirmation P_n est vraie, soit :

$$\begin{aligned}
p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5 &\Longrightarrow 0,8p_n = 0,8\left(0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5\right) \\
&\Longrightarrow 0,8p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} \times 0,8 + 0,4 \\
&\Longrightarrow 0,8p_n = 0,5 \times 0,8^{n} + 0,4 \\
&\Longrightarrow 0,8p_n + 0,1 = 0,5 \times 0,8^{n} + 0,4 + 0,1 \\
&\Longrightarrow 0,8p_n + 0,1 = 0,5 \times 0,8^{n} + 0,5 \\
&\Longrightarrow p_{n+1} = 0,5 \times 0,8^{n} + 0,5 \quad \text{c'est } P_{n+1}
\end{aligned}$$

Conclusion : on a prouvé que l'affirmation P_1 est vraie, et que, n étant un naturel non nul, la véracité de P_n entraîne celle de P_{n+1}. En vertu du principe de récurrence, on peut conclure que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5.$

Autrement dit, on a établi par récurrence une expression explicite du terme général p_n.

c. Pour tout n entier naturel non nul, on a : $\quad 0,5 \times 0,8^{n-1} = \dfrac{0,5}{0,8} \times 0,8^n$

$$= 0,625 \times 0,8^n.$$

Comme on a : $\quad -1 < 0,8 < 1 \quad$ la propriété des limites de suites géométriques donne : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,625 \times 0,8^n = 0$.

Puis, par limite de la somme, on a : $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0,625 \times 0,8^n + 0,5 = 0,5.$

Ainsi, quand le nombre de machines tend vers plus l'infini, la probabilité que la dernière machine détienne la valeur 1 tend vers 0,5.

Partie B

1. L'instruction de la ligne 5 est une instruction conditionnelle : elle indique l'instruction de la ligne suivante ne s'exécutera qu'à la condition que le test `rand() < 0.1` renvoie la valeur `True`.

Or, l'instruction `rand()` renvoie un nombre aléatoire dans [0 ; 1[, donc la probabilité que ce nombre soit strictement inférieur à 0,1, c'est-à-dire dans l'intervalle [0 ; 0,1[est proportionnelle à l'amplitude de cet intervalle, la probabilité que cela arrive est donc de $\dfrac{0,1-0}{1-0} = 0,1$.

La ligne 5 va rendre l'exécution de la ligne 6 aléatoire, avec une probabilité que la ligne 6 s'exécute égale à 0,1.

C'est-à-dire que la ligne 6 doit avoir pour effet de "mal transmettre" la dernière donnée détenue, qui est stockée dans la variable `donnee`. Cette variable contient 0 ou 1. Si elle contenait 0, après la ligne 6 elle contiendra $1-0=1$, soit la valeur contraire. Si elle contenait 1, après la ligne 6, elle contiendra $1-1=0$, là encore, la valeur contraire.

La ligne 6 a donc pour effet de modifier la donnée, pour simuler une transmission contraire.

2. Si l'appel `simulation(4)` renvoie `[1,1,1,1,1]`, cela signifie que l'on a eu 4 transmissions fidèles, entre 5 machines.

La probabilité que cela arrive est donc :

$0,9 \times 0,9 \times 0,9 \times 0,9 = 0,9^4 = 0,6561 \approx 0,656$.

De façon analogue l'appel `simulation(6)` renvoie une simulation de 6 transmissions entre 7 machines.

Si l'appel renvoie `[1,0,1,0,0,1,1]`, cela signifie que les trois premières transmissions sont contraires (de 1 à 0, puis de 0 à 1, puis de 1 à 0), la quatrième transmission est fidèle (de 0 à 0), la cinquième est contraire (de 0 à 1) et la sixième et dernière est fidèle (de 1 à 1).

La probabilité que cela arrive est donc :

$0,1 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,9 \times 0,1 \times 0,9 = 0,9^2 \times 0,1^4 = 8,1 \times 10^{-5} \approx 0,000$.

À 10^{-3} près, la probabilité d'obtenir `[1,1,1,1,1]` est d'environ 0,656, celle d'obtenir `[1,0,1,0,0,1,1]` est d'environ 0,000.

Exercice 28.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.
Dans cet exercice on s'intéresse à des personnes venues séjourner dans un centre multisports au cours du week-end.
Les résultats des probabilités demandées seront arrondis au millième si nécessaire.

Partie A

Le centre propose aux personnes venues pour un week-end une formule d'initiation au roller composée de deux séances de cours.
On choisit au hasard une personne parmi celles ayant souscrit à cette formule.

On désigne par A et B les évènements suivants :

- A : « La personne chute pendant la première séance » ;
- B : « La personne chute pendant la deuxième séance ».

Pour un évènement E quelconque, on note $P(E)$ sa probabilité et $\overline{E}$ son évènement contraire.
Des observations permettent d'admettre que $P(A) = 0,6$.
De plus on constate que :

- Si la personne chute pendant la première séance, la probabilité qu'elle chute pendant la deuxième est de $0,3$;
- Si la personne ne chute pas pendant la première séance, la probabilité qu'elle chute pendant la deuxième est de $0,4$.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$ et interpréter le résultat.

3. Montrer que $P(B) = 0,34$.

4. La personne ne chute pas pendant la deuxième séance de cours.
Calculer la probabilité qu'elle n'ait pas chuté lors de la première séance.

5. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 personnes ayant souscrit à la formule, associe le nombre d'entre elles n'ayant chuté ni lors de la première ni lors de la deuxième séance.
On assimile le choix d'un échantillon de 100 personnes à un tirage avec remise.
On admet que la probabilité qu'une personne ne chute ni lors de la première ni lors de la deuxième séance est de $0,24$.

a. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Quelle est la probabilité d'avoir, dans un échantillon de 100 personnes ayant souscrit à la formule, au moins 20 personnes qui ne chutent ni lors de la première ni lors de la deuxième séance ?

c. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On choisit au hasard une personne venue un week-end au centre multisport. On note T_1 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minute avant les accès aux activités sportives pendant la journée du samedi et T_2 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minutes avant les accès aux activités sportives pendant la journée du dimanche.
On admet que :

- T_1 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_1) = 40$ et d'écart-type $\sigma(T_1) = 10$;
- T_2 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_2) = 60$ et d'écart-type $\sigma(T_2) = 16$;
- les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes.

On note T la variable aléatoire donnant le temps total d'attente avant les accès au activités sportives lors des deux jours, exprimé en minute. Ainsi on a $T = T_1 + T_2$.

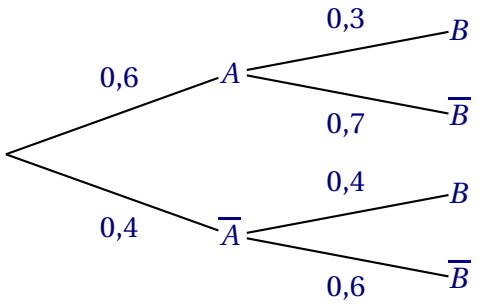
1. Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice,

2. Montrer que la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T est égale à 356.

3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour une personne choisie au hasard parmi celles venues un week-end au centre multisports, la probabilité que son temps total d'attente T soit strictement compris entre 60 et 140 minutes est supérieure à 0,77.

Corrigé

1. Voici l'arbre des probabilités pondéré par les éléments de l'énoncé :



2. On sait que $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$.
La probabilité qu'une personne ne chute pas lors des deux premières séances est égale à 0,24.

3. $\left\{A\,;\,\overline{A}\right\}$ est un système complet d'évènements, donc d'après la formule des probabilités totales :
$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)$, soit
$P(B) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,4 = 0,18 + 0,16 = 0,34$.

4. D'après la formule de la probabilité conditionnelle :
$P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \dfrac{P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \dfrac{P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)}{1 - P(B)} = \dfrac{0,24}{1 - 0,34} = \dfrac{0,24}{0,66} = \dfrac{24}{66} = \dfrac{4}{11}$ ou encore :
$P_{\overline{B}}\left(\overline{A}\right) \approx 0,3636$, soit 0,364 au millième près.

5. **a.** On répète 100 fois de façon identique et indépendante l'expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès (ne pas avoir chuté lors des deux premières séances) est égale à 0,24.

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,24$.

b. On a $P(X \geqslant 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - P(X \leqslant 19)$ soit d'après la calculatrice

$\approx 1 - 0,145$, d'où

$P(X \geqslant 20) \approx 0,855$ au millième près.

c. On sait qu'alors $E(X) = n \times p = 100 \times 0,24 = 24$.

Ceci signifie qu'en moyenne sur 100 personnes, 24 ne chuteront lors des deux premières séances.

Partie B

1. Puisque $T = T_1 + T_2$, par linéarité de l'espérance :

$E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = 40 + 60 = 100$.

Il faut donc attendre en moyenne 100 minutes sur les deux jours.

Les variables aléatoires T_1 et T_2 étant indépendantes on a de même :

$V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2)$

Comme $V(T_1) = \sigma(T_1)^2 = 10^2 = 100$ et que $V(T_2) = \sigma(T_2)^2 = 16^2 = 256$, on a donc

$V(T) = 100 + 256 = 356$.

2. Soit $60 < T < 140$ soit en centrant sur l'espérance :

$60 - 100 < T - 100 < 140 - 100 \iff -40 < T - 100 < 40 \iff |T - 100| < 40$ ou encore $|T - E(T)| < 40$.

D'après l'inégalité de Bienaimé-Tchebychev :

$P(|T - E(T)| \geqslant 40) \leqslant \dfrac{V(T)}{40^2} \iff P(|T - E(T)| \geqslant 40) \leqslant \dfrac{V(T)}{40^2} \iff$

$P(|T - E(T)| < 40) \geqslant 1 - \dfrac{356}{1\,600} \iff P(|T - E(T)| < 40) \geqslant \dfrac{1\,244}{1\,600}$.

Comme $\dfrac{1\,244}{1\,600} \approx 0,777\,5$ qui est supérieur à 0,77, on a finalement :

$$P(60 < T < 140) > 0,77.$$

Exercice 29.

Une équipe américaine a cartographié pour la première fois les allergies alimentaires chez l'enfant aux États-Unis en 2020. L'étude, publiée dans la revue *Clinical Pediatries*, révèle une différence nette entre les zones rurales et les zones urbaines.

On sait qu'en 2020, 17 % de la population des États-Unis habite en zone rurale et 83 % en zone urbaine.

L'étude menée montre que parmi les enfants des États-Unis vivant en zone rurale, il y en a 6,2 % qui sont atteints d'allergie alimentaire.
L'étude révèle aussi que 9 % des enfants des États-Unis sont atteints d'allergie alimentaire.

Pour un évènement E quelconque, on note $P(E)$ sa probabilité et $\overline{E}$ son évènement contraire.
Sauf mention contraire, les probabilités seront données sous forme exacte.

Partie A

On interroge au hasard un enfant dans la population des États-Unis et on note :

- R L'évènement : « l'enfant interrogé habite en zone rurale » ;
- A L'évènement : « l'enfant interrogé est atteint d'allergie alimentaire ».

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité. Cet arbre pourra être complété par la suite.
2. **a.** Calculer la probabilité que l'enfant interrogé habite en zone rurale et soit atteint d'allergie alimentaire,
   b. En déduire la probabilité que l'enfant interrogé habite en zone urbaine et soit atteint d'allergie alimentaire.
   c. L'enfant interrogé habite en zone urbaine. Quelle est la probabilité qu'il soit atteint d'allergie alimentaire ? Arrondir le résultat à 10^{-4}.

Partie B

On réalise une étude en interrogeant au hasard 100 enfants des États-Unis.
On admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'enfants atteints d'allergie alimentaire dans l'échantillon considéré.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 10 enfants parmi les 100 interrogés soient atteints d'allergie alimentaire ? Arrondir le résultat à 10^{-4}.

Partie C

On s'intéresse à un échantillon de 20 enfants atteints d'allergie alimentaire choisis au hasard.

L'âge d'apparition des premiers symptômes allergiques de ces 20 enfants est modélisé par les variables aléatoires A_1, $A_2, \ldots, , A_{20}$. On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi d'espérance 4 et de variance 2,25.
On considère la variable aléatoire :

$$M_{20} = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_{20}}{20}.$$

1. Que représente la variable aléatoire M_{20} dans le contexte de l'exercice ?
2. Déterminer l'espérance et la variance de M_{20}.
3. Justifier, à l'aide de l'inégalité de concentration, que

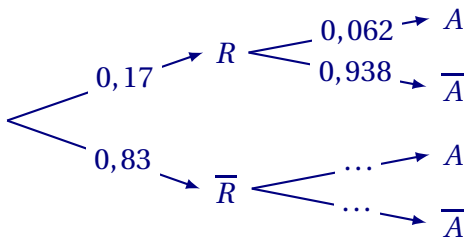
$$P(2 < M_{20} < 6) > 0,97.$$

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

Partie A.

1. Un arbre de probabilité représentant la situation est :



2. **a.** $P(R \cap A) = P(R) \times P_R(A) = 0,17 \times 0,062 = 0,010\,54$

La probabilité que l'enfant interrogé habite en zone rurale et soit atteint d'allergie alimentaire vaut 0,010 54.

b. Les évènements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P\left(R \cap A\right) + P\left(\overline{R} \cap A\right)$

On a donc : $0,09 = 0,01054 + P\left(\overline{R} \cap A\right)$

D'où $P\left(\overline{R} \cap A\right) = 0,09 - 0,010\,54 = 0,079\,46$

La probabilité que l'enfant interrogé habite en zone urbaine et soit atteint d'allergie alimentaire vaut 0,079 46.

c. $P_{\overline{R}}(A) = \dfrac{P\left(\overline{R} \cap A\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \dfrac{0,079\,46}{0,83} = \dfrac{3\,973}{41\,500} \approx 0,095\,73.$

La probabilité qu'un enfant soit atteint d'allergie alimentaire sachant qu'il habite en zone urbaine vaut 0,095 7 arrondi à 10^{-4}.

Partie B.

1. On répète 100 fois de manière identique et indépendante une expérience aléatoire à deux issues dont le succès « L'enfant est atteint d'une allergie alimentaire » a une probabilité $p = 0,09$.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès.

Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,09$.

2. À l'aide de la calculatrice : $P(X \geqslant 10) \approx 0,412\,49$

La probabilité qu'au moins 10 enfants parmi les 100 interrogés soient atteints d'allergie alimentaire vaut 0,412 5 arrondi à 10^{-4}.

Partie C.

1. Dans le contexte de l'exercice, la variable aléatoire M_{20} représente l'âge moyen d'apparition des premiers symptômes pour les 20 enfants.

2. M_{20} est la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire A telle que $E(A) = 4$ et $V(A) = 2,25$ d'où :

$E(M_{20}) = E(A) = 4$

$V(M_{20}) = \dfrac{V(A)}{20} = \dfrac{2,25}{20} = 0,1125$

3. L'évènement « $2 < M_{20} < 6$ » revient à

$|M_{20} - 4| < 2$ et $P\Big(|M_{20} - 4| < 2\Big) = 1 - P\Big(|M_{20} - 4| \geqslant 2\Big)$.

Or, d'après l'inégalité de concentration, pour tout réel $t > 0$:

$P\Big(|M_n - E(A)| \geqslant t\Big) \leqslant \dfrac{V(A)}{nt^2}$.

Soit ici, avec $n = 20$ et $t = 2$: $P\Big(|M_{20} - 4| \geqslant 2\Big) \leqslant \dfrac{2,25}{20 \times 2^2}$,

d'où $P\Big(|M_{20} - 4|P\Big(|M_{20} - 4| < 2\Big) \geqslant 1 - \dfrac{2,25}{80} P\Big(|M_{20} - 4| < 2\Big) \quad \geqslant \dfrac{311}{320}$

Or $\dfrac{311}{320} \approx 0,9719$,

donc : $P(2 < M_{20} < 6) > 0,97$.

Dans le contexte de l'exercice cela signifie que dans plus de 97 % des cas, les premiers symptômes apparaissent entre 2 et 6 ans.

Exercice 30.

On compte quatre groupes sanguins dans l'espèce humaine : A, B, AB et O.
Chaque groupe sanguin peut présenter un facteur rhésus. Lorsqu'il est présent, on dit que le rhésus est positif, sinon on dit qu'il est négatif.
Au sein de la population française, on sait que :

- 45 % des individus appartiennent au groupe A, et parmi eux 85 % sont de rhésus positif ;
- 10 % des individus appartiennent au groupe B, et parmi eux 84 % sont de rhésus positif ;
- 3 % des individus appartiennent au groupe AB, et parmi eux 82 % sont de rhésus positif.

On choisit au hasard une personne dans la population française.
On désigne par :

- A l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin A » ;
- B l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin B » ;
- AB l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin AB » ;
- O l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin O » ;
- R l'évènement « La personne choisie a un facteur rhésus positif ».

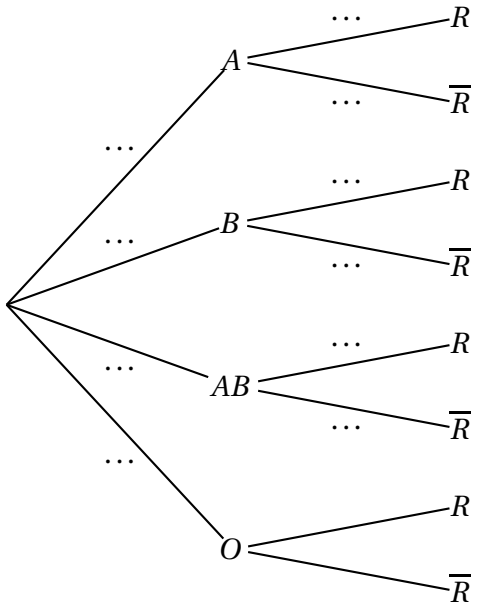
Pour un évènement quelconque E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E et $p(E)$ la probabilité de E.

1. Recopier l'arbre ci-contre en complétant les dix pointillés.

2. Montrer que $p(B \cap R) = 0,084$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. On précise que $p(R) = 0,839\,7$.
Montrer que $p_O(R) = 0,83$.

4. On dit qu'un individu est « donneur universel » lorsque son sang peut être transfusé à toute personne sans risque d'incompatibilité.
Le groupe O de rhésus négatif est le seul vérifiant cette caractéristique.
Montrer que la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel est de 0,071 4.



5. Lors d'une collecte de sang, on choisit un échantillon de 100 personnes dans la population d'une ville française. Cette population est suffisamment grande pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 personnes associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

- **a.** Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- **b.** Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon.
- **c.** Montrer que l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à $7,14$ et que sa variance $V(X)$ est égale à $6,63$ à 10^{-2} près.

6. Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées 1,2, 3, ... , N où N est un entier naturel non nul.
On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.
On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, ... , X_N pour la ville N.
On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à $7,14$ et la même variance égale à $6,63$.
On considère la variable aléatoire $M_N = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$.

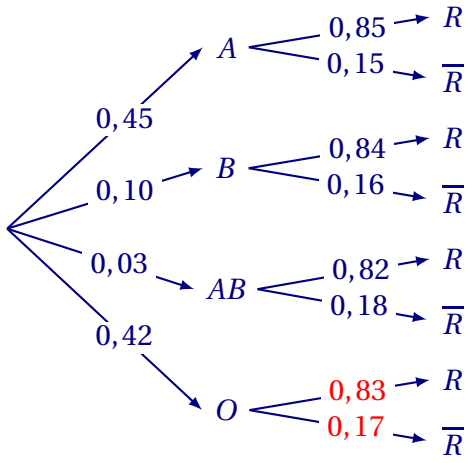
- **a.** Que représente la variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice ?
- **b.** Calculer l'espérance $E(M_N)$.
- **c.** On désigne par $V(M_N)$ la variance de la variable aléatoire M_N.
  Montrer que $V(M_N) = \dfrac{6,63}{N}$.
- **d.** Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé- Tchebychev permet d'affirmer que :

$$P(7 < M_N < 7,28) \geqslant 0,95.$$

Corrigé

Puisque l'on choisit une personne au hasard dans la population française, on est en situation d'équiprobabilité, et donc la loi uniforme permet d'assimiler les proportions à des probabilités.

1. L'arbre représentant la situation est :



Remarque : les deux probabilités en rouge n'étaient pas attendues ici. On peut compléter ces deux branches après avoir répondu à la question **3.**

2. $P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = 0,10 \times 0,84 = 0,084$.

Dans le contexte de l'exercice, 8,4% de la population est de groupe sanguin B et de rhésus positif.

3. Les évènements A, B, AB et O forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(AB \cap R) + P(O \cap R)$$

D'où : $P(O \cap R) = P(R) - P(A \cap R) - P(B \cap R) - P(AB \cap R)$

$= 0,8397 - 0,45 \times 0,85 - 0,084 - 0,03 \times 0,82$

$= 0,3486$

Or $P_O(R) = \dfrac{P(O \cap R)}{P(O)} = \dfrac{0,3486}{0,42} = 0,83$

Ce qui est le résultat donné.

4. Trouver la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel revient à calculer la probabilité $P\left(O \cap \overline{R}\right)$.

$P\left(O \cap \overline{R}\right) = P(O) \times P_O\left(\overline{R}\right)$

$= P(O) \times (1 - P_O(R))$

$= 0,42 \times (1 - 0,83)$

$= 0,0714$

La probabilité d'être un donneur universel est bien de 0,0714.

5. **a.** On répète 100 fois de manière identique et indépendante une expérience aléatoire à deux issues dont le succès « la personne est un donneur universel » a une probabilité $p = 0,0714$.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès.

Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0714$.

b. $P(X \leq 7) \approx 0{,}577\,14$.

À 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon vaut 0,577.

c. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}071\,4$ donc :

$E(X) = n \times p$
$= 100 \times 0{,}0714$
$= 7{,}14$

$V(X) = n \times p \times (1-p)$
$= 100 \times 0{,}0714 \times (1 - 0{,}714)$
$= 6{,}630\,204$
$\approx 6{,}63$ à 10^{-2} près.

6. **a.** La variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice représente le nombre moyen de donneurs universels sur les N collectes de sang organisées.

b. M_N est la moyenne empirique de la variable aléatoire X donc :

$E(M_N) = E(X) = 7{,}14$.

c. $V(M_N) = \dfrac{V(X)}{N} = \dfrac{6{,}63}{N}$.

d. L'évènement $\{7 < M_N < 7{,}28\}$ revient à $\{|M_N - 7{,}14| < 0{,}14\}$

et $P\left(|M_N - 7{,}14| < 0{,}14\right) = 1 - P\left(|M_N - 7{,}14| \geqslant 0{,}14\right)$.

On veut que $1 - P\left(|M_N - 7{,}14| \geqslant 0{,}14\right) \geqslant 0{,}95$

On veut donc que $P\left(|M_N - 7{,}14| \geqslant 0{,}14\right) \leqslant 0{,}05$

Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\left(|M_N - E(M_N)| \geqslant t\right) \leqslant \frac{V(M_N)}{t^2}$$

Pour $t = 0{,}14$ on obtient : $P\left(|M_N - 7{,}14| \geqslant 0{,}14\right) \leqslant \dfrac{6{,}63}{N \times 0{,}14^2}$.

On veut donc que : $\dfrac{16\,575}{49N} \leqslant 0{,}05 \iff \dfrac{331\,500}{49} \leqslant N$

$\iff 6\,765 + \dfrac{15}{49} \leqslant N$

L'inégalité est donc vraie pour tout entier $N \geqslant 6\,766$.

La plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P(7 < M_N < 7{,}28) \geqslant 0{,}95$ est 6 766.

Exercice 31.

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.
Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64. Par exemple, « gP3g » est une telle séquence. Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3. **a.** Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule
   b. En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
   c. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
   d. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

Partie B

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de 250 caractères d'un ordinateur à un autre. On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à 0,01 et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles. On note X la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis. *On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à* 10^{-3} *près.*
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « La probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable » ?

Partie C

On s'intéresse maintenant à la transmission de 4 séquences de 250 caractères.
On note X_1, X_2, X_3 et X_4 les variables aléatoires correspondant aux nombres de caractères mal transmis lors de la transmission de chacune des 4 séquences.
On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes entre elles et suivent la même loi que la variable aléatoire X définie en partie B.
On note $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.
Déterminer, en justifiant, l'espérance et la variance de la variable aléatoire S.

Corrigé
Partie A

1. Pour chaque caractère, il y a 64 possibilités, donc pour une séquences de 4 caractères, il y a 64^4 possibilités, soit 16 777 216 possibilités. On pourra noter
   $\text{card}(\Omega) = 16\,777\,216$.
2. Si les caractères sont différents deux à deux, il s'agit alors d'un arrangement de 4 caractères parmi 64 : $\dfrac{64\,!}{(64-4)\,!} = 64 \times 63 \times 62 \times 61 = 15\,249\,024$ possibilités.
3. **a.** On reprend la question **1.** avec seulement 63 caractères. cela donne donc $63^4 = 15\,752\,961$ possibilités.
   b. Soit X l'évènement : « la séquence ne comporte pas la lettre A ».
   Son événement contraire est donc : $\overline{X}$ « la séquence comporte au moins une fois la lettre A ».
   Ainsi $\text{card}(X) + \text{card}(\overline{X}) = \text{card}(\Omega)$ donc $\text{card}(\overline{X}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(X) = 64^4 - 63^4 = 1\,024\,255$.
   Il y a donc 1 024 255 séquences contenant au moins une fois la lettre A.
   c. La lettre A peut se situer dans l'une des quatre positions dans le code, les trois autres lettres étant différentes. Il y aura donc $4 \times 63^3 = 1\,000\,188$ possibilités.
   d. Il y a $\binom{4}{2}$ façons de placer les deux lettres A dans la séquence. Les deux autres lettres ne sont pas des A. Il y aura donc $\binom{4}{2} \times 63^2 = 23\,814$ possibilités.

Partie B

1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0,01$.
2. $P(X = 0) = \binom{250}{0} \times 0,01^0 \times (1-0,01)^{250-0} = 0,99^{250} \approx 0,081$.
3. On calcule $P(X > 16) = P(X \geqslant 17)$. Avec la calculatrice, $P(X \geqslant 17) \approx 1,04 \times 10^{-9}$, ce qui est négligeable.

Partie C

En utilisant les propriétés sur la linéarité de l'espérance et de la variance (les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 étant indépendantes), on peut affirmer que :
$E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 4 \times E(X) =$
$4 \times n \times p = 4 \times 250 \times 0,01 = 10$.
Il en est de même pour la variance :
$V(S) = V(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4) = 4 \times V(X) = 4 \times n \times p \times (1-p) =$
$4 \times 250 \times 0,01 \times 0,99 = 9,9$.

Exercice 32.

Cet exercice est constitué de trois parties indépendantes

Un magasin est équipé de caisses automatiques en libre-service où le client scanne lui- même ses articles. Le logiciel d'une caisse déclenche régulièrement des demandes de vérification. Un employé du magasin effectue alors un contrôle.

Partie A

Le contrôle peut être

- soit « total » : l'employé du magasin scanne alors à nouveau l'ensemble des articles du client ;
- soit « partiel » : l'employé choisit alors un ou plusieurs articles du client pour vérifier qu'ils ont bien été scannés.

Si un contrôle est déclenché, il s'agit une fois sur dix d'un contrôle total.
Lorsqu'un contrôle total est déclenché, une erreur du client est détectée dans 30 % des cas.
Lorsqu'un contrôle partiel est effectué, dans 85 % des cas, il n'y a pas d'erreur.

Un contrôle est déclenché à une caisse automatique.
On considère les évènements suivants :

- T : « Le contrôle est un contrôle total » ;
- E : « Une erreur est détectée lors du contrôle ».

On notera $\overline{T}$ et $\overline{E}$ les évènements contraires de T et E.

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation puis déterminer $P\left(\overline{T} \cap E\right)$.
2. Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle.
3. Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

Partie B

Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0,165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées. *On donnera la valeur arrondie au centième.*
3. Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*
4. On souhaite modifier le nombre de contrôles déclenchés par la caisse de manière à ce que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.

   Déterminer le nombre de contrôles que doit déclencher la caisse chaque jour pour que cette contrainte soit respectée.

Partie C

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0,165)$.

1. Déterminer les valeurs exactes de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X_1.
2. On définit la variable aléatoire S par $S = X_1 + X_2 + X_3$.

   Justifier que $E(S) = 9,9$ et que $V(S) = 8,2665$.

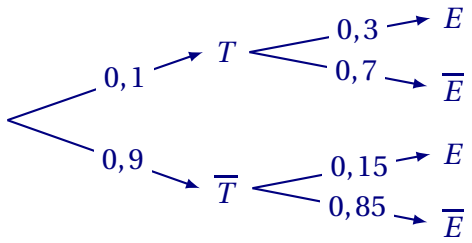
   Pour cette question, on utilisera 10 comme valeur de $E(S)$.

   À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est supérieure à $0,48$.

Corrigé

Partie A :

1. Un arbre pondéré représentant la situation est :



   $P\left(\overline{T} \cap E\right) = P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}(E) = 0,9 \times 0,15 = 0,135$.

2. Les évènements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(E) = P\left(T \cap E\right) + P\left(\overline{T} \cap E\right)$

   On a donc : $P(E) = 0,1 \times 0,3 + 0,135 = 0,165$.

   La probabilité qu'une erreur soit détectée lors du contrôle est égale à $0,165$.

3. $P_E(T) = \dfrac{P(T \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,1 \times 0,3}{0,165} \approx 0,1818$.

   La probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée vaut environ $0,18$, arrondie au centième.

Partie B : Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0,165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0,165$ donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,165$.

2. $P(X=5) = \binom{15}{5} \times 0,165^5 \times 0,835^{15-5}$.

$= 3\,003 \times 0,165^5 \times 0,835^{10}$

$\approx 0,060\,5$

Finalement, avec les consignes d'arrondi : $P(X=5) \approx 0,06$

La probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées vaut 0,06.

3. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,835^{15} \approx 0,933\,1$.

La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée vaut 0,93.

4. Soit n le nombre de contrôles effectués chaque jour.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$.

$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - 0,835^n$

On souhaite que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.

On veut donc que $1 - 0,835^n \geqslant 0,99$.

$1 - 0,835^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,835^n$

$\iff \ln(0,01) \geqslant \ln\left(0,835^n\right)$ car la fonction logarithme est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

$\iff \ln(0,01) \geqslant n\ln(0,835)$

$\iff \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \leqslant n$ car $\ln(0,835) < 0$ donc son inverse aussi

or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \approx 25,5$

Il faut déclencher 26 contrôles chaque jour.

Partie C :

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0,165)$.

1. X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,175$.

Donc $E(X_1) = n \times p = 20 \times 0,165 = 3,3$

et $V(X_1) = n \times p \times (1-p) = 20 \times 0,165 \times 0,835 = 2,755\,5$

2. $E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 3,3 = 9,9$

Les variables X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes donc :

$V(S) = V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3 \times V(X_1) = 3 \times 2,7555 = 8,266\,5$.

3. L'évènement « $6 < S < 14$ » revient à $\left|S - 10\right| < 4$ et

$P\left(\left|S-10\right| < 4\right) = 1 - P\left(\left|S-10\right| \geqslant 4\right)$.

Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$P\left(\left|S - E(S)\right| \geqslant t\right) \leqslant \dfrac{V(S)}{t^2}$

Pour $t = 4$ on obtient : $P\left(\left|S - 10\right| \geqslant 4\right) \leqslant \dfrac{8,2665}{4^2}$.

D'où $P\left(\left|S - 10\right| < 4\right) = 1 - P\left(\left|S - 10\right| \geqslant 4\right) \geqslant 1 - \dfrac{8,2665}{16}$.

Or $1 - \dfrac{8,2665}{16} \approx 0,4833$

donc la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est bien supérieure à 0,48.

Exercice 33.

Toutes les probabilités, sauf indication contraire, seront arrondies à 10^{-3} dans cet exercice.
« Le virus du chikungunya, transmis à l'homme par la piqûre du moustique tigre provoque chez les patients des douleurs articulaires aiguës qui peuvent être persistantes. En 2005, une importante épidémie de chikungunya a touché les îles de l'Océan Indien et notamment l'île de La Réunion, avec plusieurs centaines de milliers de cas déclarés. En 2007, la maladie a fait son apparition en Europe, puis fin 2013, aux Antilles et a atteint le continent américain en 2014 ».
(https://www.pasteur.fr/fr/centre-medical/fiches-maladies/chikungunya)
Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus.
Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

— la probabilité qu'un individu atteint par le virus ait un test positif est de 0,999 ;

— la probabilité qu'un individu non atteint par le virus ait un test positif est de 0,005.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population cible.
Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

— M l'évènement : « l'individu choisi est atteint du chikungunya ».

— T l'évènement : « le test de l'individu choisi est positif ».

On considère que le test est *fiable* lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus est supérieure à 0,95.

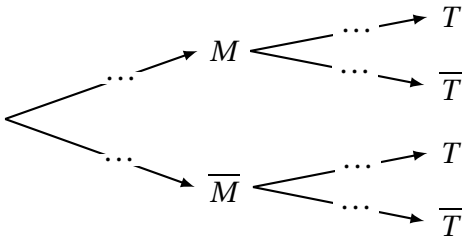
Partie A : Étude d'un exemple

1. Donner les probabilités $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$.

« En mars 2005, l'épidémie s'est propagée rapidement dans l'ile de La Réunion, avec une flambée importante entre fin avril et début juin puis une persistance de la transmission virale durant l'hiver austral. Au total, 270 000 personnes ont été infectées pour une population totale de 750 000 individus ».
(https://www.pasteur.fr/fr/centre-medical/fiches-maladies/chikungunya)
Fin 2005, le laboratoire a effectué un test de dépistage massif de la population de l'île de La Réunion.
Dans cette partie, la population cible est donc la population de l'ile de La Réunion.

2. Donner la valeur exacte de $P(M)$.

3. Recopier et compléter l'arbre pondéré donné ci-dessous.



4. Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par le virus et ait un test positif.
5. Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif.
6. Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus.
7. Peut-on estimer que ce test est fiable ? Argumenter.

Partie B : Dépistage sur une population cible

Dans cette partie, on note p la proportion de personnes atteintes par le virus du chikungunya dans une population cible.
On cherche ici à tester la fiabilité du test de ce laboratoire en fonction de p.

1. Recopier, en l'adaptant, l'arbre pondéré de la question A3 en tenant compte des nouvelles données.
2. Exprimer la probabilité $P(T)$ en fonction de p.
3. Montrer que $P_T(M) = \dfrac{999p}{994p+5}$.
4. Pour quelles valeurs de p peut-on considérer que ce test est fiable ?

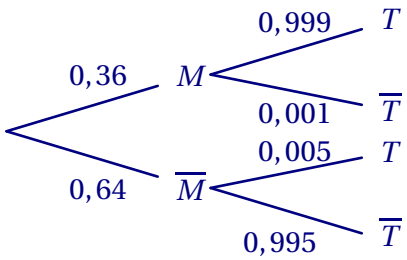
Partie C : Étude sur un échantillon

Pendant l'épidémie, on admet que la probabilité d'être atteint du chikungunya sur l'ile de La Réunion est de 0,36.
On considère un échantillon de n individus choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant le nombre d'individus infectés dans cet échantillon parmi les n tirés au sort.
On admet que X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,36$.
Déterminer à partir de combien d'individus n la probabilité de l'évènement « au moins un des n habitants de cet échantillon est atteint par le virus » est supérieure à 0,99. Expliquer la démarche.

Corrigé

Partie A : Étude d'un exemple

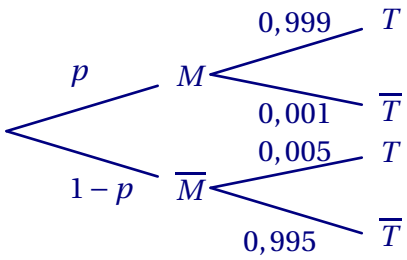
1. D'après l'énoncé : $P_M(T) = 0,999$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0,005$
2. 270 000 personnes ont été infectées sur 750 000 donc $P(M) = \dfrac{270\,000}{750\,000} = 0,36$
3. Voici l'arbre pondéré complété :



4. $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,36 \times 0,999 = 0,35964$
donc la probabilité que l'individu soit atteint et que le test soit positif est $0,36$ à 10^{-3} près.
5. M et $\overline{M}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,36 \times 0,999 + 0,64 \times 0,005 = 0,35964 + 0,0032 = 0,36284$
donc la probabilité que l'individu ait un test positif est $0,363$ à 10^{-3} près.
6. $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,35964}{0,36284} \approx 0,991$
7. Puisque $P_T(M) \approx 0,991 > 0,95$, le test est considéré comme fiable.

Partie B : Dépistage sur une population cible

1. Voici l'arbre pondéré complété :



2. M et $\overline{M}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = p \times 0,999 + (1-p) \times 0,005 = 0,999p + 0,005 - 0,005p = 0,994p + 0,005$
3. $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{p \times 0,999}{0,994p + 0,005} = \dfrac{999p}{994p + 6}$.
4. Le test est fiable si $P_T(M) > 0,95$:
$\dfrac{999p}{994p+5} > 0,95 \iff 999p > 0,95(994p+5) \iff$
$999p > 944,3p + 4,75 \iff 54,7p > 4,75 \iff p > \dfrac{4,75}{54,7} \approx 0,087$ donc, le test est fiable si $p > 0,087$ (soit 8,7 %).

Partie C : Étude sur un échantillon

X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,36$.
On cherche le plus petit n tel que $P(X \geqslant 1) > 0,99$
$P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 1 - P(X = 0) > 0,99 \iff -P(X = 0) > -0,01 \iff P(X = 0) < 0,01$
or $P(X = 0) = (1 - 0,36)^n = 0,64^n$ donc $P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 0,64^n < 0,01 \iff \ln(0,64^n) \leqslant \ln(0,01)$
car la fonction ln est croissante sur $]0, +\infty[$
$\iff n\ln(0,64) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,64)}$ car $\ln(0,64) < 0$ or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,64)} \approx 10,32$,
donc Il faut interroger au moins 11 individus pour que la probabilité qu'au moins l'un d'eux soit atteint dépasse 99 %.

Exercice 34.

Une entreprise qui fabrique des jouets doit effectuer des contrôles de conformité avant leur commercialisation. Dans cet exercice, on s'intéresse à deux tests effectués par l'entreprise de jouets : un test *de fabrication* et un test *de sécurité*.

À la suite d'un grand nombre de vérifications, l'entreprise affirme que :

- 95 % des jouets réussissent le test de fabrication ;
- Parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98 % réussissent le test de sécurité ;
- 1 % des jouets ne réussissent aucun des deux tests.

On choisit au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet réussit le test de fabrication » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de sécurité ».

Partie A

1. À partir des données de l'énoncé, donner les probabilités $P(F)$ et $P_F(S)$.
2. **a.** Construire un arbre pondéré qui illustre la situation avec les données disponibles dans l'énoncé.
   b. Montrer que $P_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right) = 0,2$.
3. Calculer la probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests.
4. Montrer que la probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut 0,97 arrondi au centième.
5. Lorsque le jouet a réussi le test de sécurité, quelle est la probabilité qu'il réussisse le test de fabrication ? Donner une valeur approchée du résultat au centième.

Partie B

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de n jouets, où n est un entier strictement positif. On suppose que ce prélèvement se fait sur une quantité suffisamment grande de jouets pour être assimilé à une succession de n tirages indépendants avec remise.
On rappelle que la probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication est égale à 0,95.
Soit S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de jouets ayant réussi le test de fabrication. On admet que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,95$.

1. Exprimer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n en fonction de n.
2. Dans cette question, on pose $n = 150$.
   a. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(S_{150} = 145)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   b. Déterminer la probabilité qu'au moins 94 % des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.
3. Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.

   Soit F_n la variable aléatoire définie par : $F_n = \dfrac{S_n}{n}$. La variable aléatoire F_n représente la proportion des jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets prélevés.
   On note $E(F_n)$ l'espérance et $V(F_n)$ la variance de la variable aléatoire F_n.
   a. Montrer que $E(F_n) = 0,95$ et que $V(F_n) = \dfrac{0,047\,5}{n}$.

b. On s'intéresse à l'évènement I suivant : « la proportion de jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets est strictement comprise entre 93 % et 97 % ».

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n de la taille du lot de jouets à prélever, à partir de laquelle la probabilité de l'évènement I est supérieure ou égale à 0,96.

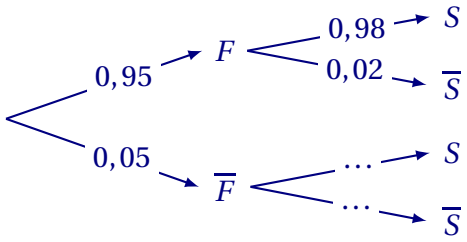
Corrigé

Puisqu'on choisit un jouet au hasard dans la production, on est en situation d'équiprobabilité, et donc les proportions sont assimilables à des probabilités.

Partie A

1. D'après l'énoncé 95 % des jouets réussissent le test de fabrication et, parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98 % réussissent le test de sécurité, donc $P(F) = 0,95$ et $P_F(S) = 0,98$.

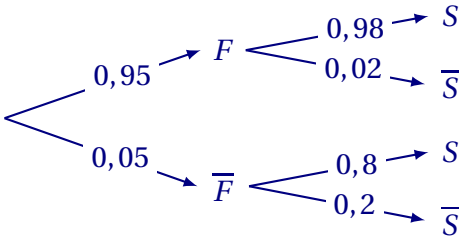
2. **a.** Un arbre pondéré qui illustre la situation avec les données disponibles dans l'énoncé (ainsi que les probabilités d'évènement contraire, triviales) est :



b. D'après l'énoncé 1 % des jouets ne réussissent aucun des deux tests donc $P\left(\overline{F} \cap \overline{S}\right) = 0,01$.

$P_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right) = \dfrac{P\left(\overline{F} \cap \overline{S}\right)}{P\left(\overline{F}\right)} = \dfrac{0,01}{0,05} = 0,2$

L'arbre complet est donc :



3. $P\left(F \cap S\right) = P(F) \times P_F(S) = 0,95 \times 0,98 = 0,931$

La probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests est égale à 0,93.

4. Les évènements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(S) = P\left(F \cap S\right) + P\left(\overline{F} \cap S\right)$

On a donc : $P(S) = 0,931 + 0,05 \times 0,8 = 0,971$.

La probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut, 0,97 arrondi au centième.

5. $P_S(F) = \dfrac{P(F \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,931}{0,971} \approx 0,9588$

La probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication sachant qu'il a réussi le test de sécurité vaut 0,96, arrondi au centième.

Partie B

1. S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,95$ donc :
$E(S_n) = n \times p = 0,95n$ et $V(X) = np(1-p) = n \times 0,95 \times 0,05 = 0,0475n$.

2. Dans cette question, on pose $n = 150$.

a. $P(S_{150} = 145) = \binom{150}{145} \times 0,95^{145} \times 0,05^{150-145}$.

$= 591\,600\,030 \times 0,95^{145} \times 0,05^5$

$\approx 0,108\,84$

Finalement, avec les consignes d'arrondi : $P(S_{150} = 145) \approx 0,109$

Dans le contexte de l'exercice, dans environ 10,9% des cas, 145 jouets sur les 150 du lot réussissent le test de fabrication.

b. 94% des jouets de ce lot correspond à 141 jouets.

À l'aide de la calculatrice : $P(S_{150} \geqslant 141) \approx 0,780\,88$

La probabilité qu'au moins 94% des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication vaut 0,781 à 10^{-3} près.

3. Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.

a. D'après les propriétés sur l'espérance d'une somme de variables aléatoires :

$E(F_n) = E\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{E(S_n)}{n} = \dfrac{0,95n}{n} = 0,95.$

D'après les propriétés sur la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes :

$V(F_n) = V\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{V(S_n)}{n^2} = \dfrac{0,0475n}{n^2} = \dfrac{0,0475}{n}.$

b. L'évènement « $0,93 < F_n < 0,97$ » revient à $|F_n - 0,95| < 0,02$ et

$P\left(|F_n - 0,95| < 0,02\right) = 1 - P\left(|F_n - 0,95| \geqslant 0,02\right).$

On veut que $P\left(|F_n - 0,95| \geqslant 0,02\right) \geqslant 0,96$

On veut donc que $P\left(|F_n - 0,95| < 0,02\right) \leqslant 0,04$

Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$P\left(|F_n - E(F_n)| \geqslant t\right) \leqslant \dfrac{V(F_n)}{t^2}$

Pour $t = 0,02$ on obtient : $P\left(|F_n - 0,95| \geqslant 0,02\right) \leqslant \dfrac{0,0475}{n \times 0,02^2}.$

Il faut résoudre l'inéquation suivante :

$1 - \dfrac{0,0475}{n \times 0,02^2} \geqslant 0,96 \iff \dfrac{0,0475}{n \times 0,02^2} \leqslant 0,04 \iff n \geqslant \dfrac{0,0475}{0,04 \times 0,02^2}$

$\iff n \geqslant 2\,969.$

Le lot devra contenir au moins 2 969 jouets.

L'inégalité est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 2\,969$.

À partir de 2 969 jouets prélevés, la probabilité de l'évènement I est supérieure ou égale à 0,96.

Exercice 35.

Dans cet exercice, les réponses seront arrondies à 10^{-4} près.

Durant la saison hivernale, la circulation d'un virus a entraîné la contamination de 2 % de la population d'un pays. Dans ce pays, 90 % de la population a été vaccinée contre ce virus.
On constate que 62 % des personnes contaminées avaient été vaccinées.

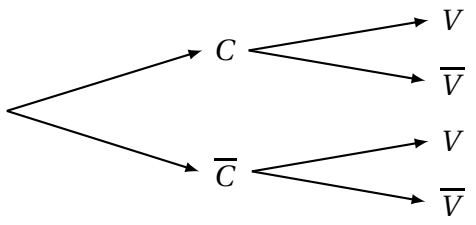
On interroge au hasard une personne, et on note les évènements suivants :

C : « la personne a été contaminée »

V : « la personne a été vaccinée ».

Les évènements contraires des évènements C et V sont notés respectivement $\overline{C}$ et $\overline{V}$.

1. À partir de l'énoncé, donner, sans calcul, les probabilités $P(C)$, $P(V)$ et la probabilité conditionnelle $P_C(V)$.
2. **a.** Calculer $P(C \cap V)$.
   b. En déduire $P\left(\overline{C} \cap V\right)$.
3. Recopier l'arbre des probabilités ci-dessous et le compléter.



4. Calculer $P_V(C)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.
   a. « Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées. »
   b. « Plus de 98 % de la population vaccinée n'a pas été contaminée. »
6. On s'intéresse à un échantillon de 20 personnes choisies au hasard dans la population.
   La population du pays est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de personnes contaminées.
   On rappelle que, pour une personne choisie au hasard, la probabilité d'être contaminée est $p = 0,02$.
   a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier et donner ses paramètres.
   b. Calculer, en rappelant la formule, la probabilité que 4 personnes exactement soient contaminées dans ce groupe de 20 personnes.

Corrigé

1. Ici, on interroge une personne au hasard, donc toutes les personnes qui constituent la population du pays ont la même probabilité d'être choisis : c'est une situation d'équiprobabilité et donc les proportions sont assimilables à des probabilités.

On a donc :

— $P(C) = 0,02$, car 2 % de la population du pays a été contaminée ;

— $P(V) = 0,9$, car 90 % de la population a été vaccinée ;

— $P_C(V) = 0,62$, car 62 % des personnes contaminées ont été vaccinées.

2. **a.** On a : $P(C \cap V) = P(C) \times P_C(V) = 0,02 \times 0,62 = 0,0124$.

b. Les évènements C et $\overline{C}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

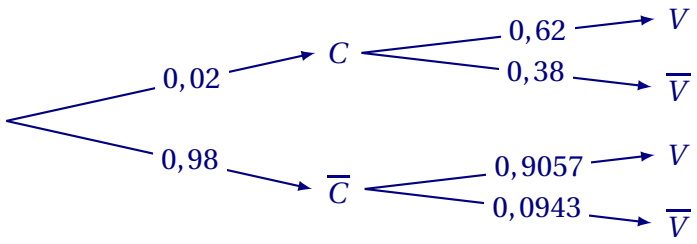
$P(V) = P(C \cap V) + P\left(\overline{C} \cap V\right) \iff P\left(\overline{C} \cap V\right) = P(V) - P(C \cap V)$

On a donc : $P\left(\overline{C} \cap V\right) = P(V) - P(C \cap V) = 0,9 - 0,0124 = 0,8876$

3. Pour compléter l'arbre de probabilité, il nous faut $P_{\overline{C}}(V)$.

Par définition : $P_{\overline{C}}(V) = \dfrac{P\left(\overline{C} \cap V\right)}{P\left(\overline{C}\right)} = \dfrac{0,8876}{1 - P(C)} = \dfrac{0,8876}{0,98} \approx 0,9057$ au dix-millième près.

Et donc :



4. Par définition : $P_V(C) = \dfrac{P(V \cap C)}{P(V)} = \dfrac{0,0124}{0,9} \approx 0,0138$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'environ 1,38 % des personnes vaccinées ont été contaminées par le virus.

5. **a.** « Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées. ».

Cette affirmation est **fausse**, car un peu exagérée, parmi les personnes non contaminées, environ 90,57 % d'entre elles sont vaccinées, quand 9,43 % d'entre elles ne le sont pas, mais le décuple de 9,43 % est 94,3 %, qui est donc supérieur à 90,57 %.

Il y a $\dfrac{90,57}{9,43} \approx 9,6$ fois plus de personnes vaccinées que non vaccinées parmi les personnes non contaminées.

b. « Plus de 98 % de la population vaccinée n'a pas été contaminée. »

Cette affirmation est **vraie**, car on a calculé qu'environ 1,38 % des personnes vaccinées ont été contaminées par le virus, donc, par complémentaire, cela implique qu'environ 98,62 % des personnes vaccinées n'ont pas été contaminées. Il est donc correct de dire que c'est plus de 98 %.

6. **a.** — On a une épreuve aléatoire à deux issues. On qualifie de succès l'évènement C, de probabilité $p = 0,02$;

— Cette épreuve est répétée $n = 20$ fois pour constituer l'échantillon de 20 personnes. La répétition étant assimilable à des tirages successifs avec remise, on peut dire que les répétitions sont identiques et indépendantes ;

— La variable aléatoire X compte le nombres de personnes contaminées, donc le nombre de succès, dans l'échantillon.

Ces trois éléments garantissent que X suit la loi binomiale, de paramètres $n = 20$ et $p = 0,02$.

b. La probabilité que 4 personnes exactement soient contaminées dans ce groupe de 20 personnes est :

$$P(X = 4) = \binom{20}{4} \times 0,02^4 \times 0,98^{20-4} = 4\,845 \times 0,02^4 \times 0,98^{16} \approx 5,6 \times 10^{-4}$$

Finalement, avec les consignes d'arrondi : $P(X = 4) \approx 0,0006$

Exercice 36.

Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points.
Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

L'entraineur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entrainement, lorsque Victor tente un panier à trois points, il le réussit avec une probabilité de 0,32.
Lors d'un entrainement, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points. On suppose que ces lancers sont indépendants.

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. On admet que la variable aléatoire N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série.

3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.

4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire N.

5. On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de **points** marqués après cette série de lancers.

a. Exprimer T en fonction de N.

b. En déduire l'espérance de la variable aléatoire T. Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.

c. Calculer $P(12 \leqslant T \leqslant 18)$.

Partie B

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un match.

On admet que l'espérance $E(X) = 22$ et la variance $V(X) = 65$.

Victor joue n matchs, où n est un nombre entier strictement positif.

On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours des 1er, 2e, …, n-ième matchs. On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n sont indépendantes et suivent la même loi que celle de X.

On pose $\quad M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$.

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.

a. Que représente la variable aléatoire M_{50} ?

b. Déterminer l'espérance et la variance de M_{50}.

c. Démontrer que $P(|M_{50} - 22| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{13}{90}$.

d. En déduire que la probabilité de l'évènement « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieure à 0,85.

2. Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
« Il n'existe aucun entier naturel n tel que $P\big(|M_n - 22| \geqslant 3\big) < 0,01$ ».

Corrigé

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. L'épreuve est effectuée 15 fois de façon indépendante et à chaque lancer la probabilité de marquer est égale à 0,32. N suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(15\ ;\ 0,32)$.

2. La probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers est :
$P(N = 4) = \binom{15}{4} \times 0,32^4 \times (1 - 0,32)^{15-4} \approx 0,206$ au millième près.

3. La probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers est :
$P(N \leqslant 6) = P(N = 0) + P(N = 1) + \ldots + P(N = 6) \approx 0,828$ (calculatrice).

4. On sait que : $E(N) = n \times p = 15 \times 0,32 = 4,8$.
Donc en moyenne sur 150 lancers, Victor marque 48 paniers.

5. **a.** Chaque lancer étant à 3 points, on a donc $T = 3N$.

b. On a $E(T) = E(3N) = 3E(N)$ d'après la linéarité de l'espérance, soit
$E(T) = 3 \times 4,8 = 14,4$, donc une moyenne de 144 points marqués sur 150 lancers.

c. On a $P(12 \leqslant T = 3N \leqslant 18) = P(4 \leqslant N \leqslant 6)$.
Cette probabilité est égale à :
$P(4 \leqslant N \leqslant 6) = P(N = 4) + P(N = 5) + P(N = 6) \approx 0,206 + 0,213 + 0,167$, soit

$$P(12 \leqslant T \leqslant 18) \approx 0,586.$$

Partie B

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.

a. M_{50} représente la moyenne empirique, sur 50 matchs, des points marqués par Victor

b. • Chaque variable $X_1, \ldots, X_{50}$ suit la même loi que X donc on a :
$E(M_{50}) = E(X) = 22$;

• Comme les variables X_1, X_2,... X_50 sont indépendantes, on en déduit : $V(M_{50}) = \frac{1}{50}V(X) = \frac{1}{50} \times 65 = \frac{65}{50} = \frac{130}{100} = 1,3$.

c. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, pour une variable aléatoire X d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, pour tout réel $a > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

donc ici : $P(|M_{50} - E(M_{50})| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(M_{50})}{3^2}$

Comme $\frac{V(M_{50})}{3^2} = \frac{1,3}{9} = \frac{13}{90}$, on a bien : $P(|M_{50} - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{13}{90}$.

d. L'événement « $19 < M_{50} < 25$ » revient à $|M_{50} - 22| < 3$ et
$P\big(|M_{50} - 22| < 3\big) = 1 - P\big(|M_{50} - 22| \geqslant 3\big)$.

Soit $P\big(|M_{50} - 22| \geqslant 3\big) \leqslant \frac{13}{90}$ entraîne $P\big(19 < M_{50} < 25\big) \geqslant 1 - \frac{13}{90} = \frac{77}{90} \approx 0,856$: cette probabilité est bien supérieure à 0,85.

2. D'après la loi faible des grands nombres, $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P\Big(\big|M_n - E(X)\big| \geqslant t\Big) = 0$, donc en particulier ici, $\lim\limits_{n \to +\infty} P\Big(\big|M_n - 22\big| \geqslant 3\Big) = 0$.

donc pour tout $r > 0$ il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $P\big(|M_n - 22| \geqslant 3\big) < r$ et c'est vrai en particulier pour $r = 0,01$.

L'affirmation est donc fausse.

Autre méthode :

Pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de concentration, on a :

$P\big(|M_n - E(X)| \geqslant t\big) \leqslant \frac{V(X)}{t^2 n}$

Pour $t = 3$ on obtient : $P\big(|M_n - 22| \geqslant 3\big) \leqslant \frac{65}{n \times 3^2}$.

On veut donc que : $\frac{65}{9n} \leqslant 0,01 \iff \frac{6500}{9} \leqslant n$

$\iff 722 + \frac{2}{9} \leqslant n$

L'inégalité est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 723$.

Exercice 37.

Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C. Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

— 25 % des connexions transitent via le serveur A ;

— 15 % des connexions transitent via le serveur B ;

— le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mises à jour de logiciels, etc.).

On dira qu'une connexion est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs. L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que, dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs :

— 90 % des connexions via le serveur A sont stables ;

— 80 % des connexions via le serveur B sont stables ;

— 85 % des connexions via le serveur C sont stables.

Les parties **A** et **B** sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées séparément.

Partie A

On s'intéresse au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entreprise. On considère les évènements suivants :

— A : « La connexion s'est effectuée via le serveur A » ;

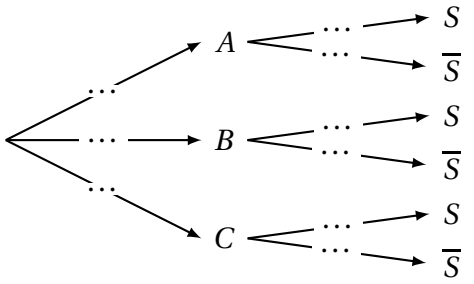
— B : « La connexion s'est effectuée via le serveur B » ;

— C : « La connexion s'est effectuée via le serveur C » ;

— S : « La connexion est stable ».

On note $\overline{S}$ l'évènement contraire de l'évènement S.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation de l'énoncé.



2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à 0,12.

3. Calculer la probabilité $P\left(C \cap \overline{S}\right)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0,855$.

5. On suppose désormais que la connexion est stable.

Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B.

On donnera la valeur arrondie au millième.

Partie B

D'après la **partie A**, la probabilité qu'une connexion soit **instable** est égale à 0,145.

1. Dans le but de détecter les dysfonctionnements de serveurs, on étudie un échantillon de 50 connexions au réseau, ces connexions étant choisies au hasard. On suppose que le nombre de connexions est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de connexions instables au réseau de l'entreprise, dans cet échantillon de 50 connexions.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b. Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables. *On donnera la valeur arrondie au millième.*

2. Dans cette question, on constitue désormais un échantillon de n connexions, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire égale aux nombres de connexions instables et on admet que X_n suit une loi binomiale de paramètres n et 0,145.

a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'au moins une connexion de cet échantillon soit instable.

b. Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que la probabilité p_n est supérieure ou égale à 0,99.

3. On s'intéresse à la variable aléatoire F_n égale à la fréquence de connexions instables dans un échantillon de n connexions, où n désigne un entier naturel strictement positif.

On a donc $F_n = \dfrac{X_n}{n}$, où X_n est la variable aléatoire définie à la question **2.**

a. Calculer l'espérance $E(F_n)$.

On admet que $V(F_n) = \dfrac{0,123975}{n}$.

b. Vérifier que : $P(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1) \leqslant \dfrac{12,5}{n}$

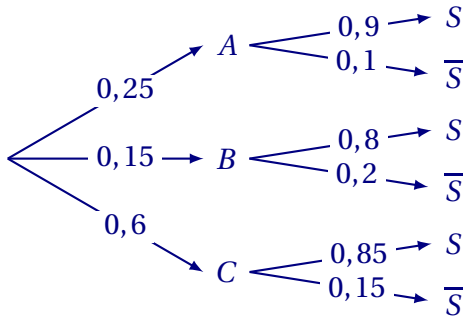
c. Un responsable de l'entreprise étudie un échantillon de 1 000 connexions et constate que pour cet échantillon $F_{1000} = 0,3$. Il soupçonne un dysfonctionnement des serveurs. A-t-il raison ?

Corrigé

Partie A

1. Puisqu'on s'intéresse à une connexion au hasard, on est en situation d'équiprobabilité, et les proportions annoncées dans l'énoncé sont assimilables à des probabilités.

Cela donne l'arbre pondéré ci-dessous :



-

2. La probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est $P(S \cap B)$.
$P(S \cap B) = P(B) \times P_B(S) = 0,15 \times 0,8 = 0,12$.

3. De même :
$P\left(C \cap \overline{S}\right) = P(C) \times P_C\left(\overline{S}\right) = 0,6 \times 0,15 = 0,09$.
Cela signifie que 9 % des connexions à distance de l'entreprise sont des connexions transitant via le serveur C et qui sont instables.

4. Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :
$P(S) = P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S) + P(C) \times P_C(S)$
$= 0,25 \times 0,9 + 0,15 \times 0,8 + 0,6 \times 0,85$
$= 0,225 + 0,12 + 0,51$
$= 0,855$
La probabilité de l'évènement S est donc bien $P(S) = 0,855$.

5. La probabilité demandée est $P_S(B)$. Par définition, on a :
$P_S(B) = \dfrac{P(S \cap B)}{P(S)} = \dfrac{0,12}{0,855} = \dfrac{8}{57} \approx 0,1403$.
La probabilité que la connexion ait transité par le serveur B, sachant qu'elle est stable est d'environ 0,140, au millième près.

Partie B

1. **a.** Les éléments suivants ne sont pas nécessaires, puisqu'on admet que X suit une loi binomiale :

— Chaque connexion est vue comme une expérience aléatoire à deux issues : le succès « la connexion est instable », de probabilité p
$p = P\left(\overline{S}\right) = 1 - 0,855 = 0,145$;
— cette épreuve est répétée $n = 50$ fois, de façon supposée identique et indépendante, puisque la constitution de l'échantillon est réputée assimilable à un tirage avec remise ;
— X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de connexions instables, sur ces 50 répétitions.

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,145$.

b. La probabilité qu'au plus huit connexions soient instables est $P(X \leqslant 8)$.
Avec la calculatrice, on a : $P(X \leqslant 8) \approx 0,7044$, donc la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables est 0,704 arrondie au millième.

2. **a.** Puisque X_n suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,145$, pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on aura :

$P(X_n = k) = \binom{n}{k} \times 0,145^k \times 0,855^{n-k}$.

L'évènement « au moins une connexion de cet échantillon est instable » est l'évènement contraire de « aucune connexion de cet échantillon n'est instable », autrement dit $\{X = 0\}$.

Ainsi : $p_n = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,145^0 \times 0,855^{n-0} = 1 - 0,855^n$.

b. Résolvons, pour n entier naturel :

$$\begin{aligned} p_n \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,855^n \geqslant 0,99 \\ &\iff -0,855^n \geqslant -0,01 \\ &\iff 0,855^n \leqslant 0,01 \quad \text{car } -1 < 0 \\ &\iff \ln\left(0,855^n\right) \leqslant \ln(0,01) \quad \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\ &\iff n\ln(0,855) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)} \quad \text{car } 0,855 < 1 \text{ donc } \ln(0,855) < 0 \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)} \approx 29,4$, donc c'est à partir de $n = 30$ que l'on a une probabilité p_n supérieure ou égale à 0,99.

3. **a.** Puisque X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $0,145$, alors l'espérance de X_n est, par propriété : $E(X_n) = np = 0,145n$.

On a ensuite $F_n = \dfrac{1}{n} \times X_n$,

donc, par linéarité de l'espérance : $E(F_n) = \dfrac{1}{n}E(X_n) = \dfrac{1}{n} \times 0,145n = 0,145$.

On admet que $V(F_n) = \dfrac{0,123\,975}{n}$.

b. Écrivons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la moyenne empirique F_n, avec une précision $t = 0,1$:

$$\begin{aligned} P(|F_n - E(F_n)| \geqslant t) \leqslant \frac{V(F_n)}{t^2} &\implies P(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1) \leqslant \frac{\dfrac{0,123\,975}{n}}{0,1^2} \\ &\implies P(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1) \leqslant \frac{0,123\,975}{n} \times \frac{1}{0,01} \\ &\implies P(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1) \leqslant \frac{12,3975}{n} \\ &\implies P(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1) \leqslant \frac{12,5}{n} \\ &\qquad \text{car } 12,3975 < 12,5 \end{aligned}$$

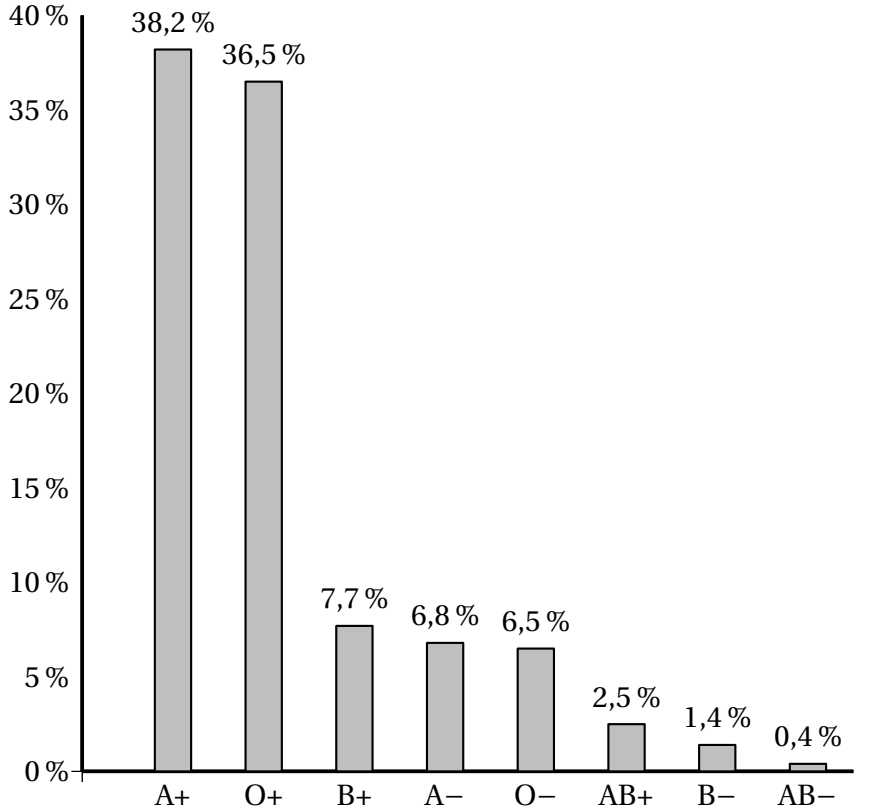
On a donc bien l'inégalité annoncée.

c. Si on étudie un échantillon de 1 000 connexions et que l'on constate que pour cet échantillon $F_{1\,000} = 0,3$, alors on a $0,3 - 0,145 = 0,155$: cette conduite de l'expérience réalise l'évènement $\left\{\left|F_{1\,000} - 0,145\right| \geqslant 0,1\right\}$.

D'après la question précédente, la probabilité de cet évènement est inférieure ou égale à $\dfrac{12,5}{1\,000} = 0,012\,5$, il est donc hautement probable que les serveurs dysfonctionnent, car si la modélisation (basée sur un fonctionnement normal des serveurs) est fiable, une telle fréquence est très peu probable.

Exercice 38.

Voici la répartition des principaux groupes sanguins des habitants de France :



Source : https ://fr.statista.com !statistiques/6 56036/ groupes-sanguins-repartition-rh- france/

A+, O+, B+, A−, O−, AB+, B− et AB− sont les différents groupes sanguins combinés aux rhésus.
Par exemple : A + est le groupe sanguin A de rhésus +.
Une expérience aléatoire consiste à choisir une personne au hasard dans la population française et à déterminer son groupe sanguin et son rhésus.
Dans l'exercice, on adopte les notations du type :
$A+$ est l'évènement « la personne est de groupe sanguin A et de rhésus + »
$A-$ est l'évènement « la personne est de groupe sanguin A et de rhésus − »
A est l'évènement « la personne est de groupe sanguin A »

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.
Partie 1

On note $Rh+$ l'évènement « La personne est de rhésus positif ».

1. Justifier que la probabilité que la personne choisie soit de rhésus positif est égale à 0,849.

2. Démontrer à l'aide des données de l'énoncé que $P_{Rh+}(A) = 0,450$ à 0,001 près.
3. Une personne se souvient que son groupe sanguin est AB mais a oublié son rhésus. Quelle est la probabilité que son rhésus soit négatif? Arrondir le résultat à 0,001 près.

Partie 2

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 0,001 près.

Un donneur universel de sang est une personne de groupe sanguin O et de rhésus négatif. On rappelle que 6,5 % de la population française est de groupe O−.

1. On considère 50 personnes choisies au hasard dans la population française et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de donneurs universels.
   a. Déterminer la probabilité que 8 personnes soient des donneurs universels. Justifier votre réponse.
   b. On considère la fonction ci-dessous nommée `proba` d'argument k écrite en langage Python.

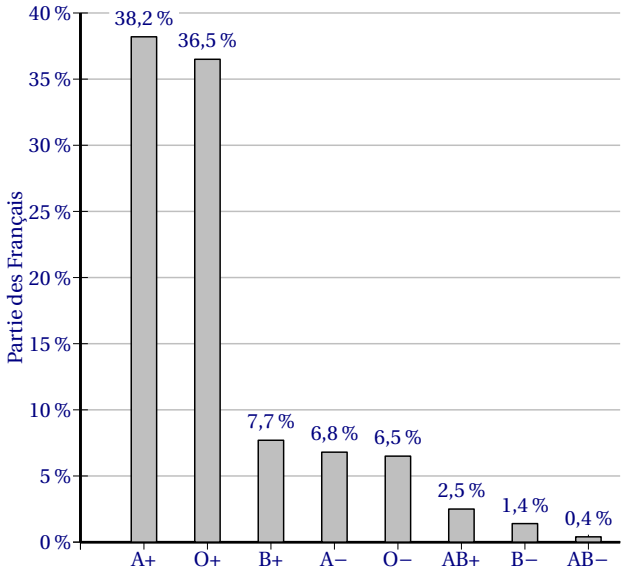
```
def proba(k) :
    p=0
    for i in range(k+1) :
        p = p + binomiale(i,50,0.065)
    return p
```

   Cette fonction utilise la fonction binomiale d'argument i, n et p, créée pour l'occasion, qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

   Déterminer la valeur numérique renvoyée par la fonction `proba` lorsqu'on saisit `proba(8)` dans la console Python. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Quel est le nombre minimal de personnes à choisir au hasard dans la population française pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel, soit supérieure à 0,999.

Corrigé

Voici la répartition des principaux groupes sanguins des habitants de France :



Une expérience aléatoire consiste à choisir une personne au hasard dans la population française et à déterminer son groupe sanguin et son rhésus.

Partie 1

1. Le pourcentage de personne ayant un rhésus positif est : $38,2+36,5+7,7+2,5$ soit $84,9\,\%$.
   Donc la probabilité $P(Rh+)$ que la personne choisie soit de rhésus positif est égale à $0,849$.
2. On cherche $P_{Rh+}(A)=\dfrac{P(Rh+\cap A)}{P(Rh+)}=\dfrac{P(A+)}{P(Rh+)}$
   Il y a $38,2\,\%$ de personnes A+ dans la population donc $P(A+)=0,382$.
   Donc $P_{Rh+}(A)==\dfrac{0,382}{0,849}\approx 0,450$.
3. Une personne se souvient que son groupe sanguin est AB mais a oublié son rhésus.
   La probabilité que son rhésus soit négatif est : $P_{AB}(Rh-)=\dfrac{P(Rh-\cap AB)}{P(AB)}=\dfrac{P(AB-)}{P(AB)}$.
   Il y a $0,4\,\%$ de personnes AB– dans la population donc $P(AB-)=0,004$.
   $2,5+0,4=2,9$ donc il y a $2,9\,\%$ de personnes AB dans la population donc $P(AB)=0,029$.
   $\dfrac{0,004}{0,029}\approx 0,138$ donc la probabilité que son rhésus soit négatif est $0,138$ à $0,001$ près.

Partie 2

Un donneur universel de sang est une personne de groupe sanguin O et de rhésus négatif. On rappelle que $6,5\,\%$ de la population française est de groupe O– donc $P(O-)=0,065$.

1. On considère 50 personnes choisies au hasard dans la population française et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de donneurs universels.
   a. Le choix au hasard de 50 personnes peut être assimilé à un tirage avec remise donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de donneurs universels suit la loi binomiale de paramètres $n=50$ et $p=0,065$.
   La probabilité que 8 personnes soient des donneurs universels est donc :
   $P(X=8)=\binom{50}{8}\times 0,065^8\times(1-0,065)^{50-8}\approx 0,010$.
   b. On considère la fonction ci-dessous nommée `proba` d'argument `k` écrite en langage Python.

```
def proba(k):
  p = 0
  for i in range(k+1):
    p = p + binomiale(i , 50 , 0.065)
  return p
```

   Cette fonction utilise la fonction `binomiale` d'argument i, n et p, créée pour l'occasion, qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X=i)$ dans le cas où X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
   La valeur numérique renvoyée par la fonction `proba` lorsqu'on saisit `proba(8)` dans la console Python correspond à $P(X\leqslant 8)$ et vaut environ $0,995$; cela veut dire qu'il y a une probabilité de $0,995$ que sur les 50 personnes, il y en ait au plus 8 de groupe O–..

2. On veut déterminer le nombre minimal de personnes à choisir au hasard dans la population française pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel, soit supérieure à 0,999.

Autrement dit on cherche n pour que $P(X \geqslant 1) > 0,999$, donc en passant par l'événement contraire : $1 - P(X = 0) > 0,999$.

Pour une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,065$, on a : $P(X = 0) = \binom{50}{0} \times 0,065^0 \times (1 - 0,06()^n = 0,935^n$.

On résout l'inéquation : $1 - 0,935^n > 0,999$.

$$\begin{aligned} 1 - 0,935^n > 0,999 &\iff 1 - 0,999 > 0,935^n \iff 0,001 > 0,935^n \\ &\iff \ln(0,001) > \ln\left(0,935^n\right) \quad \text{(croissance de la fonction ln)} \\ &\iff \ln(0,001) > n \times \ln(0,935) \\ &\iff \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,935)} < n \quad (\text{car } \ln(0,935) < 0) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,935)} \approx 102,8$ donc le nombre minimal de personnes à choisir au hasard dans la population française pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel, soit supérieure à 0,999 est $n = 103$.

Exercice 39.

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches.
L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2, puis on pioche au hasard une boule dans U_2.
On note :

- N_1 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
- N_2 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

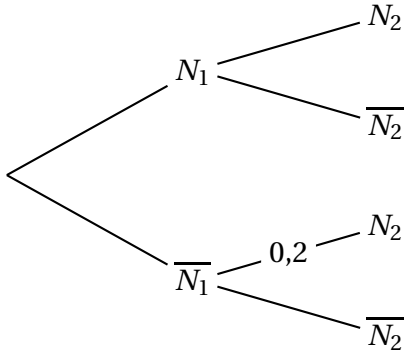
Pour tout évènement A, on note $\overline{A}$ son évènement contraire.

PARTIE A

1. On considère l'arbre de probabilités ci-contre.

a. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est 0,2.

b. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des évènements concernés, sous forme décimale.



2. Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2.

3. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28.

4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2

   Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 . On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2}.

PARTIE B

n désigne un entier naturel non nul.
L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2, entre chaque expérience.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2.
On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X. Justifier votre réponse.

2. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que :

$$1-0,72^n \geqslant 0,9.$$

3. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'expérience.

PARTIE C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2.

On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante :
On pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2, puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?

2. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?

3. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est-elle supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A ? Justifier votre réponse.

   On pourra s'aider d'un arbre pondéré modélisant cette expérience.

Corrigé

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches. L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.
On considère l'expérience aléatoire suivante : on pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2, puis on pioche au hasard une boule dans U_2.
On note :

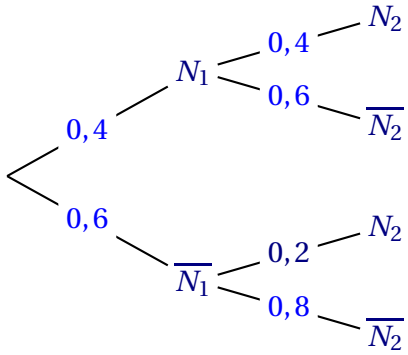
- N_1 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
- N_2 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

Pour tout évènement A, on note $\overline{A}$ son évènement contraire.

PARTIE A

1. **a.** Si on a pioché une boule blanche dans U_1 et qu'on l'a mise dans U_2, il y a dans l'urne U_2 1 boule noire et 4 boules blanches. La probabilité de piocher alors une boule noire dans l'urne U_2 est $P_{\overline{N_1}}(N_2) = \dfrac{1}{5} = 0,2$.

b. Dans U_1 il y a 4 boules noires et 6 boules blanches donc la probabilité de piocher une boule noire est $P(N_1) = \dfrac{4}{10} = 0,4$.
Si on a pioché une boule noire dans U_1 et qu'on l'a mise dans U_2, il y a dans l'urne U_2 2 boules noires et 3 boules blanches. La probabilité de piocher alors une boule noire dans l'urne U_2 est $P_{N_1}(N_2) = \dfrac{2}{5} = 0,4$.



2. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2 est : $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$.

3. On cherche la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(N_2) = P(N_1 \cap N_2) + P\left(\overline{N_1} \cap N_2\right) = 0,16 + 0,6 \times 0,2 = 0,28$.

4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2.
La probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est :
$P_{N_2}\left(\overline{N_1}\right) = \dfrac{P\left(N_2 \cap \overline{N_1}\right)}{P(N_2)} = \dfrac{0,12}{0,28} = \dfrac{3}{7} \approx 0,43$.

PARTIE B

n désigne un entier naturel non nul.

L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2, entre chaque expérience.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2.
On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à $0,28$ et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à $0,72$.

1. D'après le texte, on est dans le cas de n répétitions, de façon identique et indépendante, d'une expérience qui n'a que deux issues.
Donc la variable X qui donne le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2, suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,28$.

2. On résout l'inéquation $1 - 0,72^n \geqslant 0,9$.

$$\begin{aligned} 1 - 0,72^n \geqslant 0,9 &\iff 1 - 0,9 \geqslant 0,72^n \iff 0,1 \geqslant 0,7^n \\ &\iff \ln(0,1) \geqslant \ln\left(0,72^n\right) \quad \text{(fonction ln croissante sur } [0\,;+\infty[\text{)} \\ &\iff \ln(0,1) \geqslant n\ln(0,72) \\ &\iff \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,72)} \leqslant n \quad \left(\ln(0,72) < 0\right) \end{aligned}$$

$\dfrac{\ln(0,1)}{\ln(0,72)} \approx 7,01$ donc le plus petit entier naturel n tel que : $1 - 0,72^n \geqslant 0,9$ est 8.

3. $0,72$ est la probabilité de piocher une boule blanche dans l'urne U_2.
$0,72^n$ est la probabilité de piocher n boules blanches dans l'urne U_2 lors des n tirages.
$1 - 0,72^n$ est la probabilité de l'événement contraire, c'est-à-dire la probabilité de piocher au moins une boule noire lors des n tirages.
Il faut donc au moins 8 tirages pour que la probabilité de piocher au moins une boule noire soit supérieure à $0,9$.

PARTIE C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2.
On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante : on pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2, puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2.

1. Dans l'urne U_1 il y a 10 boules et on en prend 2 simultanément ; il y a donc $\binom{10}{2} = 45$ tirages possibles.

2. Il y a 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 ; le nombre de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire est donc $\binom{4}{1} \times \binom{6}{1} = 4 \times 6 = 24$.

3. On examine les différents cas.

- On a pioché 2 boules noires dans U_1 (événement noté NN).

▷ $P(NN) = \dfrac{\binom{4}{2}}{45} = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$

▷ On a mis les 2 boules noires piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 3 boules noires et 3 boules blanches.

La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est alors $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

- On a pioché 1 boule noire et 1 boule blanche dans U_1 (événement noté NB).

▷ $P(NB) = \dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15}$

▷ On a mis les 2 boules, une noire une blanche, piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 2 boules noires et 4 boules blanches.

La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est alors $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

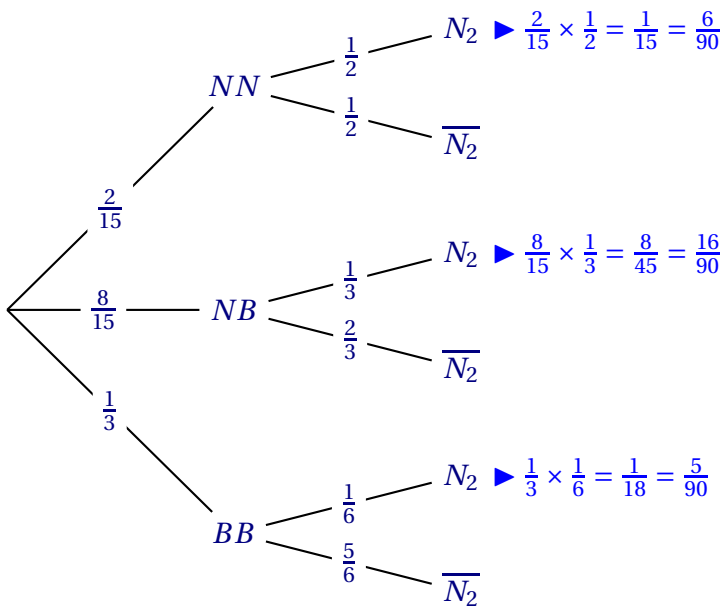
- On a pioché 2 boules blanches dans U_1 (événement noté BB).

▷ $P(BB) = \dfrac{\binom{6}{2}}{45} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$

▷ On a mis les 2 boules blanches piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 1 boule noire et 5 boules blanches.

La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est alors $\dfrac{1}{6}$.

On résume la situation dans un arbre pondéré.



La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est, d'après la formule des probabilités totales :

$P(N_2) = P(NN \cap N_2) + P(NB \cap N_2) + P(BB \cap N_2) = \dfrac{6}{90} + \dfrac{16}{90} + \dfrac{5}{90} = \dfrac{27}{90} = \dfrac{3}{10} = 0,3$

La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est égale à $0,3$; elle est donc supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A qui était de $0,28$.

Exercice 40.

La partie C *est indépendante des parties* A *et* B.

Un robot est positionné sur un axe horizontal et se déplace plusieurs fois d'un mètre sur cet axe, aléatoirement vers la droite ou vers la gauche.

Lors du premier déplacement, la probabilité que le robot se déplace à droite est égale à $\frac{1}{3}$.

S'il se déplace à droite, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à droite lors du déplacement suivant est égale à $\frac{3}{4}$.

S'il se déplace à gauche, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à gauche lors du déplacement suivant est égale à $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

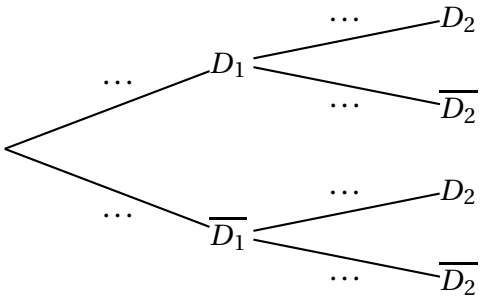
- D_n l'évènement : « le robot se déplace à droite lors du n-ième déplacement » ;
- $\overline{D_n}$ l'évènement contraire de D_n ;
- p_n la probabilité de l'évènement D_n.

On a donc $p_1 = \frac{1}{3}$.

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Déterminer la probabilité que le robot se déplace deux fois à droite.

3. Montrer que $p_2 = \frac{7}{12}$.

4. Le robot s'est déplacé à gauche lors du deuxième déplacement. Quelle est la probabilité qu'il se soit déplacé à droite lors du premier déplacement ?

Partie B : étude de la suite (p_n).

On souhaite estimer le déplacement du robot au bout d'un nombre important d'étapes.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}.$$

On pourra s'aider d'un arbre.

2. **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}.$$

b. La suite (p_n) est-elle convergente ? Justifier.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $u_n = p_n - \frac{2}{3}$.

a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

b. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

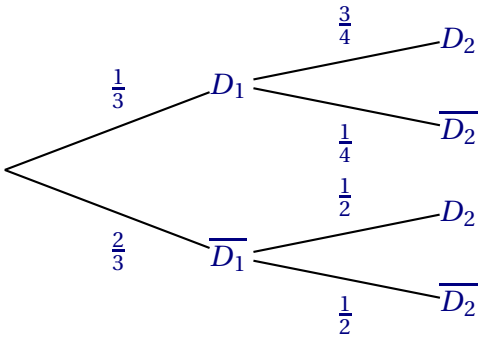
Dans cette partie, on considère un autre robot qui réalise dix déplacements d'un mètre indépendants les uns des autres, chaque déplacement vers la droite ayant une probabilité fixe égale à $\frac{3}{4}$. Quelle est la probabilité qu'il revienne à son point de départ au bout des dix déplacements ? On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

Corrigé

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. On complète l'arbre pondéré suivant :



2. On a $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

3. De la même façon $P\left(\overline{D_1} \cap D_2\right) = P\left(\overline{D_1}\right) \times P_{\overline{D_1}}(D_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p_2 = P(D_2) = P(D_1 \cap D_2) + P\left(\overline{D_1} \cap D_2\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3+4}{3 \times 4} = \frac{7}{12}$.

4. On a d'abord $p\left(\overline{D_2}\right) = 1 - p(D_2) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$.

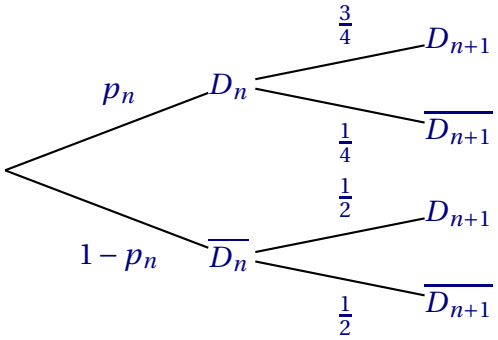
Il faut calculer la probabilité conditionnelle :

$$p_{\overline{D_2}}(D_1) = \frac{p\left(\overline{D_2} \cap D_1\right)}{p\left(\overline{D_2}\right)} = \frac{p\left(D_1 \cap \overline{D_2}\right)}{p\left(\overline{D_2}\right)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Partie B : étude de la suite (p_n).

1. $$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

On reprend l'arbre initial en partant de la branche D_n pondérée par le nombre p_n et la branche $\overline{D_n}$ pondérée par $1 - p_n$, soit :



Toujours d'après la loi des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(D_{n+1}) = P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}) + P(\overline{D_n}) \times P_{\overline{D_n}}(D_{n+1}) = p_n \times \frac{3}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

2. **a.** On montre par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}.$$

Initialisation : on a $p_1 = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $p_2 = \frac{7}{12}$ et $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$.
On a $\frac{4}{12} < \frac{7}{12} < \frac{8}{12}$, soit $p_1 < p_2 < \frac{2}{3}$: l'encadrement est vrai au rang 1.

Hérédité : soit n un naturel avec $n \geqslant 1$ et supposons que $p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}$; comme $\frac{1}{4} > 0$, on a donc par produit :
$\frac{1}{4}p_n \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$, soit $\frac{1}{4}p_n \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{6}$ et, en ajoutant à chaque membre $\frac{1}{2}$:
$\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} + \frac{1}{2} < \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$, soit d'après la relation de récurrence démontrée à la question **1.** : $p_{n+1} < p_{n+2} < \frac{2}{3}$.
La relation est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 1 et si elle est vraie au rang n au moins égal à 1, elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $p_n < p_{n+1} < \frac{2}{3}$.

b. Le résultat précédent montre que la suite est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$: d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge donc vers un nombre réel inférieur ou égal à $\frac{2}{3}$.

3. **a.** Quel que soit $n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n + \frac{3}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6}$
$$= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{4}{6}\right) = \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}u_n.$$

La relation $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n$, avec $n \geqslant 1$ montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

b. On sait que pour $n \geqslant 1$, $\quad u_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = p_n - \frac{2}{3} = 0$ et finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{3}$.

Conclusion : sur un grand nombre de déplacements du robot celui-ci se dirigera en moyenne deux fois sur trois à droite et donc une fois sur trois à gauche.

Partie C

La variable aléatoire X égale au nombre de déplacements vers la droite suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{4}$.

La seule possibilité de revenir au point de départ est de faire (globalement) 5 déplacements à droite et donc 5 déplacements à gauche, soit :

$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \approx 0{,}058\,3$, soit 0,058 au millième près.

Exercice 41.

Les deux parties sont indépendantes.

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2 % des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres.

On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

1. Justifier que la variable aléatoire N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de N et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3. *On arrondira les résultats à* 10^{-3} *près.*
   - **a.** Calculer la probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes.
   - **b.** Calculer la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes.
4. Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ».

   Combien de cachets une boîte doit-elle contenir au maximum pour respecter ce critère ? Justifier.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i, pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i-ème cachet prélevé.

On considère la variable aléatoire S définie par :

$$S = M_1 + M_1 + \ldots + M_{100}.$$

On admet que les variables aléatoires M_1, M_2, …, M_{100} suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ.

1. Déterminer $E(S)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2. On note s l'écart type de la variable aléatoire S.
Montrer que : $s = 10\sigma$.

3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9.

a. Montrer que cette condition est équivalente à :

$$P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant 0,1.$$

b. En déduire la valeur maximale de σ qui permet, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, d'assurer cette condition.

Corrigé

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2 % des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres.
On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

1. Un cachet peut être non conforme, avec la probabilité $p = 0,02$, ou conforme.
Un échantillon de 100 cachets correspond à une répétition avec remise de l'expérience qui consiste à tirer un cachet de la production totale.
Donc la variable aléatoire N qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,02$.

2. L'espérance de N est $E(N) = np = 100 \times 0,02 = 2$.
Il y a donc, en moyenne, 2 cachets non conformes par boîte.

3. **a.** La probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes est : $P(N = 3) = \binom{100}{3} \times 0,02^3 \times (1 - 0,02)^{100-3} \approx 0,182$.

b. La probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes est la probabilité qu'elle contienne au plus 5 cachets non conformes, c'est-à-dire :
$P(N \leqslant 5) \approx 0,985$.

4. Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ».

Pour N suivant la loi binomiale de paramètres n, à déterminer, et $p = 0,02$, on veut : $P(N = 0) > 0,5$. C'est-à-dire : $\binom{n}{0} \times 0,02^0 \times (1-0,02)^n > 0,5$. On résout cette inéquation.

$$\binom{n}{0} \times 0,02^0 \times (1-0,02)^n > 0,5 \iff 0,98^n > 0,5 \iff \ln\left(0,98^n\right) > \ln(0,5)$$

$$\iff n \times \ln(0,98) > \ln(0,5) \iff n < \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)}$$

$\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)} \approx 34,3$

Donc le nombre maximum de cachets dans la boîte pour que la probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes soit supérieure à 0,5 est 34.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i, pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i-ème cachet prélevé.
On considère la variable aléatoire S définie par : $S = M_1 + M_1 + \ldots + M_{100}$.
On admet que les variables aléatoires M_1, M_2, …, M_{100} suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ.

1. Chaque variable aléatoire M_i suit une loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$.

$S = M_1 + M_2 + \ldots + M_{100}$

On utilise la linéarité de l'espérance donc :

$E(S) = E(M_1 + M_2 + \ldots + M_{100}) = E(M_1) + E(M_2) + \ldots + E(M_{100}) = 100 \times 2 = 200$

La masse de 100 cachets est donc en moyenne de 200 grammes.

2. On note s l'écart type de la variable aléatoire S.

Chaque variable aléatoire M_i suit une loi de probabilité d'écart-type σ, donc de variance $V(M_i) = \sigma^2$.

Les variables M_i étant indépendantes, on va utiliser l'additivité de la variance :

$V(S) = V(M_1 + M_2 + \ldots + M_{100}) = V(M_1) + V(M_2) + \ldots + V(M_{100}) = 100\sigma^2$

$s = \sqrt{V(S)} = \sqrt{100\sigma^2} = 10\sigma$

3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9, c'est-à-dire que $P(199 < S < 201) > 0,9$.

a. $199 < S < 201 \iff 199 - 200 < S - 200 < 201 - 200 \iff -1 < S - 200 < 1$

$\iff |S - 200| < 1$

Donc $P(199 < S < 201) = P\left(|S - 200| < 1\right)$

En prenant l'événement contraire :

$P\left(|S - 200| < 1\right) > 0,9 \iff P\left(|S - 200| \geqslant 1\right) \leqslant 0,1$

b. La variable aléatoire S a pour espérance $E(S) = 200$ et pour variance $V(S) = 100\sigma 2$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

pour tout $\delta \in]0\,;+\infty[$, $P\left(\left|S - E(S)\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V(S)}{\delta^2}$,

c'est-à-dire, pour tout $\delta \in]0\,;+\infty[$, $P\left(\left|S - 200\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{100\sigma^2}{\delta^2}$,

On cherche σ pour que $P\left(\left|S - 200\right| \geqslant 1\right) \leqslant 0,1$.

On prend $\delta = 1$ donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev devient :

$P\left(\left|S - 200\right| \geqslant 1\right) \leqslant \dfrac{100\sigma^2}{1^2}$, c'est-à-dire $P\left(\left|S - 200\right| \geqslant 1\right) \leqslant 100\sigma^2$

Il suffit que $100\sigma^2 \leqslant 0,1$ donc que $\sigma^2 \leqslant 10^{-3}$, et donc que $\sigma \leqslant \sqrt{10^{-3}}$.

La valeur maximale de σ qui permet d'assurer la condition requise est $\sigma = \sqrt{10^{-3}} \approx 0,0316$.

Exercice 42.

Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

- 60 % sont des véhicules tout-électrique ;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile.
On choisit un acheteur au hasard et on considère les évènements suivants :

- E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique » ;
- B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième si nécessaire.

1. Calculer la probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile.
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Démontrer que $P(B) = 0,658$.

3. Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique ?

4. On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.

a. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

b. Calculer $P(X = 8)$.

c. Calculer la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge.

d. Calculer l'espérance de X.

e. La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1 200 €.

En moyenne, quelle somme doit-elle prévoir d'engager pour cette offre lors de la vente de 20 véhicules ?

Corrigé

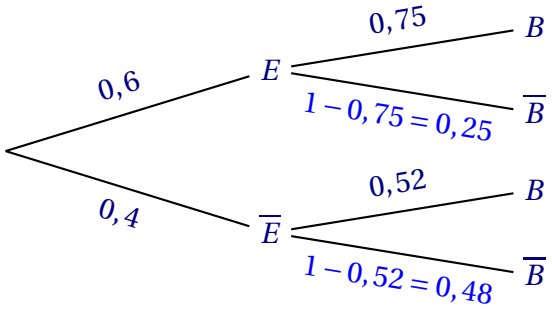
Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

- 60 % sont des véhicules tout-électrique ;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile.
On choisit un acheteur au hasard et on considère les évènements suivants :

- E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique » ;
- B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

On crée un arbre pondéré résumant la situation.



1. La probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile est :
$P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$.

2. D'après la formule des probabilités totales :
$P(B) = P(E \cap B) + P\left(\overline{E} \cap B\right) = 0,45 + 0,4 \times 0,52 = 0,658$.

3. Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile.
La probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique est :
$P_B(E) = \dfrac{P(E \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,45}{0,658} \approx 0,684$.

4. On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.

a. On est dans le cas d'une répétition avec remise d'une expérience n'ayant que 2 issues : la possibilité d'installer une borne de recharge, avec la probabilité $p = 0,658$, ou non. Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,658$.

b. $P(X=8) = \binom{20}{8} \times 0,658^8 \times (1-0,658)^{20-8} \approx 0,011$

c. La probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge est : $P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 9) \approx 1 - 0,045\,2 \approx 0,955$

d. L'espérance de X est : $E(X) = np = 20 \times 0,658 = 13,16$.

e. La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1 200 €.

L'espérance de X représente le nombre moyen de clients pouvant installer une borne de recharge à leur domicile. L'installation d'une borne coûte 1 200 €.

Il faut donc prévoir : $13,16 \times 1\,200$ soit 15 792 €.

Exercice 43.

Un sondage réalisé en France fournit les informations suivantes :

- 60 % des plus de 15 ans ont l'intention de regarder les jeux Olympiques et Paralympiques (JOP) de Paris 2024 à la télévision ;
- parmi ceux qui ont l'intention de regarder les JOP, 8 personnes sur 9 déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

On choisit au hasard une personne de plus de 15 ans. On considère les évènements suivants :

- J : « la personne a l'intention de regarder les JOP Paris 2024 à la télévision » ;
- S : « la personne choisie déclare pratiquer une activité sportive régulière ».

On note $\overline{J}$ et $\overline{S}$ leurs évènements contraires.

Dans les questions 1. *et* 2., *les probabilités seront données sous la forme d'une fraction irréductible.*

1. Démontrer que la probabilité que la personne choisie ait l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière est de $\dfrac{8}{15}$.

On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

Selon ce sondage, deux personnes sur trois parmi les plus de 15 ans déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

2. **a.** Calculer la probabilité que la personne choisie n'ait pas l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière.

b. En déduire la probabilité de S sachant $\overline{J}$ notée $P_{\overline{J}}(S)$.

Dans la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième.

3. Dans le cadre d'une opération de promotion, 30 personnes de plus de 15 ans sont choisies au hasard.

On assimile ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.

a. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

b. Calculer la probabilité qu'exactement 16 personnes déclarent pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.

c. La fédération française de judo souhaite offrir une place pour la finale de l'épreuve par équipe mixte de judo à l'Arena Champ-de-Mars pour chaque personne déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi ces 30 personnes.

Le prix d'une place s'élève à 380 € et on dispose d'un budget de 10 000 euros pour cette opération.

Quelle est la probabilité que ce budget soit insuffisant ?

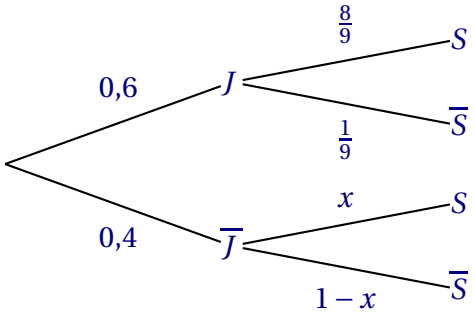
Corrigé

1. D'après l'énoncé $P(J) = 0,6$ et $P_J(S) = \dfrac{8}{9}$.

On a donc $P(J \cap S) = P(J) \times P_J(S) = 0,6 \times \dfrac{8}{9} = \dfrac{4,8}{9} = \dfrac{3 \times 1,6}{3 \times 3} = \dfrac{1,6}{3} = \dfrac{5 \times 1,6}{5 \times 3} = \dfrac{8}{15}$.

2. **a.** On sait que $P(S) = \dfrac{2}{3}$.

On commence l'arbre de probabilités pondéré suivant :



D'après la loi des probabilités totales :

$P(S) = P(J \cap S) + P\left(\overline{J} \cap S\right)$, soit $\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{15} + P\left(\overline{J} \cap S\right) \iff P\left(\overline{J} \cap S\right) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{8}{15} = \dfrac{10}{15} - \dfrac{8}{15} = \dfrac{2}{15}$.

La probabilité que la personne choisie n'a pas l'intention de regarder les JO à la télévision et a une activité sportive régulière est égale à $\dfrac{2}{15}$;

b. On a $P_{\overline{J}}(S) = \dfrac{P\left(\overline{J} \cap S\right)}{P\left(\overline{J}\right)} = \dfrac{\frac{2}{15}}{0,4} = \dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{2}{15} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{3} = x$.

3. **a.** Les personnes sont choisies au hasard et chacune d'elles a une pratique sportive régulière avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

b. On a $P(X = 16) = \binom{30}{16}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{16} \times \left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^{30-16} = \binom{30}{16}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{16} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{14} \approx 0,0462$ soit 0,046 au millième près à la calculatrice.

c. On a $\dfrac{10\,000}{380} \approx 26,3$: on peut donc offrir 26 entrées gratuites au maximum.
La calculatrice donne $P(X \leqslant 26) \approx 0,9967$ soit environ 0,997. La probabilité que le budget soit insuffisant est donc égale à environ $1 - 0,997$ soit environ 0,003 ou trois millièmes.

Exercice 44.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans.
Elle constate que 60 % de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47 % ont acheté la carte de fidélité.
Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38 % ont acheté la carte de fidélité.
On interroge au hasard un client et on considère les évènements suivants :

- R : « le client est un client régulier » ;
- F : « le client a acheté la carte de fidélité ».

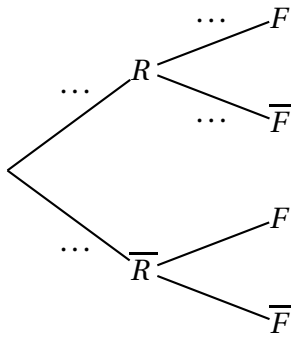
Pour un évènement E quelconque, on note $\overline{E}$ son évènement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

1. **a.** Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.

b. Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.

c. Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.

d. Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80 % sont des clients réguliers.
Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.



2. On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manière indépendante. On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que $P(F) = 0,38$.
Les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.

a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Justifier.

b. Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

Partie B

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.
On choisit au hasard un échantillon de 1 000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé.
On considère que ces 1 000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1000 clients.
On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30 000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 100 000.
On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.
On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.
On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y}{1\,000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice.
Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à 53,5 et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,722 75.

3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

Corrigé

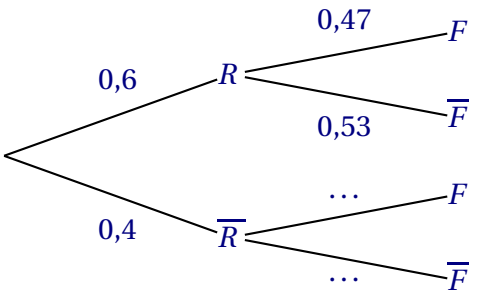
Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

1.

a. Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.

b. On a $p(R \cap F) = p(R) \times p_R(F) = 0,6 \times 0,47 = 0,282$.



2. Il faut trouver $p_{\overline{R}}(F)$

D'après la loi des probabilités totales, on a :

$p(F) = p(F \cap R) + p\left(F \cap \overline{R}\right) = p(R \cap F) + p\left(\overline{R} \cap F\right)$, soit :

$0,38 = 0,282 + p\left(\overline{R} \cap F\right)$, d'où $p\left(\overline{R} \cap F\right) = 0,38 - 0,282 = 0,098$.

Puis $p_{\overline{R}}(F) = \dfrac{\overline{R} \cap F}{\overline{R}} = \dfrac{0,098}{0,4} = 0,245$.

3. On a $p_F(R) = \dfrac{p(F \cap R)}{p(F)} = \dfrac{0,282}{0,38} \approx 0,74$, soit 74 %. L'affirmation est fausse.

4. **a.** Le choix des 20 clients s'effectue de façon indépendante et chaque tirage correspond à un choix de probabilité 0,38, la variable aléatoire X donnant le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité est une loi binomiale de paramètres $n = 20$, $p = 0,38$.

b. On a $p(X \leqslant 4) \approx 0,072\,6$, donc $p(X \geqslant 5) \approx 1 - 0,072\,6$ soit environ 0,927 3 soit 0,927 au millième près.

Partie B

1. La variable aléatoire X_2 suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$ donc son espérance $E(X_2)$ est égale à $np = 1\,000 \times 0,47 = 470$.

Cela signifie qu'en moyenne, sur un échantillon de 1 000 clients réguliers, il y en aura 470 qui ont acheté la carte de fidélité.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y}{1\,000}$.

2. La variable Z représente la moyenne par client des montants offerts aux 1 000 clients.

- On utilise la linéarité de l'espérance.

  $Z = \dfrac{Y}{1\,000}$ donc $E(Z) = \dfrac{E(Y)}{1\,000}$, et $Y = Y_1 + Y_2$ donc $E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2)$.

  De plus, $Y_2 = 50X_2$ donc $E(Y_2) = 50E(X_2) = 50 \times 470 = 23\,500$

  On sait que $E(Y_1) = 30\,000$.

  On en déduit que : $E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2) = 30\,000 + 23\,500 = 53\,500$, et donc que $E(Z) = \dfrac{E(Y)}{1\,000} = \dfrac{53\,500}{1\,000} = 53,5$.
- Les variables étant indépendantes, on va utiliser l'additivité de la variance.

  $V(Y) = V(Y_1 + Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2)$, $V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2 V(X_2) = 2\,500V(X_2)$, et $V(Z) = V\left(\dfrac{Y}{1\,000}\right) = \dfrac{V(Y)}{1\,000^2} = \dfrac{V(Y)}{10^6}$

  La variable aléatoire X_2 suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$ donc sa variance $V(X_2)$ est égale à $np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times (1 - 0,47) = 249,1$.

  On en déduit que $V(Y_2) = 2\,500V(X_2) = 2\,500 \times 249,1 = 622\,750$.

  On sait que $V(Y_1) = 100\,000$ donc

  $V(Y) = V(Y_1) + V(Y_2) = 100\,000 + 622\,750 = 722\,750$.

  $V(Z) = \dfrac{V(Y)}{10^6} = \dfrac{722\,750}{10^6} = 0,722\,75$

3. La variable aléatoire Z a pour espérance $E(Z) = 53,5$ et pour variance $V(Z) = 0,722\,75$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

pour tout $\delta \in]0\,;+\infty[$, $P\left(\left|Z - E(Z)\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V(Z)}{\delta^2}$.

$51,7 < Z < 55,3 \iff 53,5 - 1,8 < Z < 53,5 + 1,8 \iff -1,8 < Z - 53,5 < 1,8$

$\iff \left|Z - 53,5\right| < 1,8$

En remplaçant $E(Z)$ et $V(Z)$ par leurs valeurs, et en prenant $\delta = 1,8$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev devient : $P\left(\left|Z - 53,5\right| \geqslant 1,8\right) \leqslant \dfrac{0,722\,75}{1,8^2}$

En considérant l'évènement contraire, on a : $P\left(\left|Z - 53,5\right| < 1,8\right) > 1 - \dfrac{0,722\,75}{1,8^2}$.

$1 - \dfrac{0,722\,75}{1,8^2} \approx 0,777$

Donc la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

Exercice 45.

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ».

Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ».
Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

— 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;

— 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

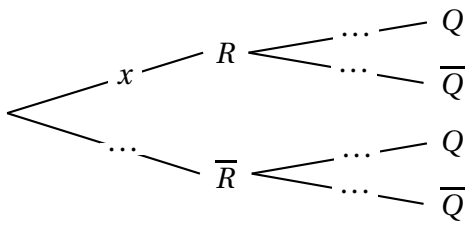
On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.
On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».
Pour un évènement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\overline{R}}\left(\overline{Q}\right)$.

2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. Montrer que $x = 0,9$.

3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question.
Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?

4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20 .
On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20\ ;\ 0,615)$.
La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.
À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?

5. On interroge au hasard dix étudiants.
Les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20\ ;\ 0,615)$.
Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$.
Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.

6. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.

a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?

b. Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,473\,55$.

c. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.

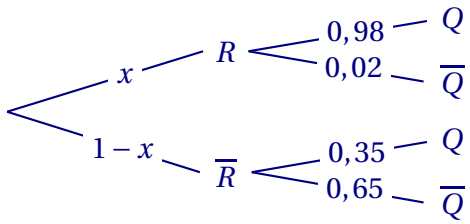
« La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».

Corrigé

Puisque l'on interroge un étudiant au hasard, on est en situation d'équiprobabilité, et les proportions sont assimilables à des probabilités.

1. Comme 91,7 % des étudiants ont répondu oui, on a donc $P(Q) = 0,917$.
Et $P_{\overline{R}}\left(\overline{Q}\right) = 0,65$, cela correspond à la probabilité que le candidat interrogé ait répondu « non », sachant qu'il a échoué à l'examen.

2. **a.** L'arbre pondéré complété est :



b. On sait que $P(Q) = 0,917$, or, comme R et $\overline{R}$ partitionnent l'univers, en vertu de la loi des probabilités totales, on a également :

$$\begin{aligned} P(Q) &= P\left(Q \cap R\right) + P\left(Q \cap \overline{R}\right) \\ &= x \times 0,98 + (1-x) \times 0,35 \\ &= 0,98x + 0,35 - 0,35x \\ &= 0,63x + 0,35 \end{aligned}$$

Puisque la probabilité de Q est unique, on peut donc écrire, puis résoudre l'équation :

$$0,63x + 0,35 = 0,917 \iff 0,63x = 0,567$$
$$\iff x = \frac{0,567}{0,63}$$
$$\iff x = 0,9$$

La solution de l'équation est donc 0,9 : la probabilité que l'étudiant ait réussi son examen est donc de 0,9 (ou bien : 90 % des étudiants ont réussi leur examen).

3. Pour cette question, on doit calculer $P_Q(R)$.

On a : $P_Q(R) = \dfrac{P(Q \cap R)}{P(Q)} = \dfrac{0,9 \times 0,98}{0,917} = \dfrac{0,882}{0,917} = \dfrac{126}{131} \approx 0,962$

Si l'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question, la probabilité qu'il ait réussi l'examen est d'environ 0,962 (à 10^{-3} près).

C'est-à-dire qu'environ 96,2 % des étudiants ayant répondu « oui » ont effectivement réussi l'examen.

4. Par exploration à la calculatrice, avec une loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615), on a : $P(N \geqslant 11) \approx 0,797$, et $P(N \geqslant 12) \approx 0,649$.

En choisissant de récompenser les candidats dont la note est supérieure ou égale à 11, la directrice récompensera environ 80 % d'eux.

5. Comme les dix variables aléatoires suivent la même loi binomiale de paramètres 20 et 0,615, chacune de ces variables aléatoires a

- pour espérance : $E(N_i) = n \times p = 20 \times 0,615 = 12,3$;
- et pour variance : $V(N_i) = n \times p \times (1-p) = 20 \times 0,615 \times 0,385 = 4,7355$.

S étant la somme de ces dix variables aléatoires, on a :

— $E(S) = E(N_1) + E(N_2) + \cdots + E(N_{10}) = 12,3 + 12,3 + ... + 12,3 = 123$;

— comme les variables aléatoires sont indépendantes,
$V(S) = V(N_1) + V(N_2) + \cdots + V(N_{10}) = 10 \times 4,7355 = 47,355$.

6. **a.** La variable aléatoire M donne la moyenne des notes obtenues par un groupe (un échantillon) de 10 étudiants choisis au hasard.

b. On a bien

— $E(M) = \dfrac{1}{10} \times E(S) = \dfrac{1}{10} \times 123 = 12,3$;

— $V(M) = \left(\dfrac{1}{10}\right)^2 \times V(S) = \dfrac{1}{100} \times 47,355 = 0,473\,55$.

c. On remarque que l'intervalle de notes considéré : $]10,3 \ ; \ 14,3[$ est un intervalle centré sur l'espérance de M, autrement dit, la probabilité qui nous intéresse est celle de l'évènement : $A = \{|M - E(M)| < 2\}$.

L'évènement contraire de cet évènement est : $\overline{A} = \{|M - E(M)| \geqslant 2\}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev affirme que :

$$P(|M - E(M)| \geqslant 2) \leqslant \frac{V(M)}{2^2} \iff P(|M - 12,3| \geqslant 2) \leqslant \frac{0,47355}{4}$$
$$\iff P(|M - 12,3| \geqslant 2) \leqslant 0,1183875$$
$$\iff P(|M - 12,3| < 2) \geqslant 1 - 0,1183875$$
$$\iff P(|M - 12,3| < 2) \geqslant 0,8816125$$

L'affirmation « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % » est donc bien correcte, la probabilité que cet évènement soit réalisé étant supérieure à 0,88, elle est aussi supérieure à 0,8 qui correspond à 80 %.

Exercice 46.

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles

Partie A

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face ».

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
2. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X

k	0	1	2	3
$P(X = k)$				

Partie B

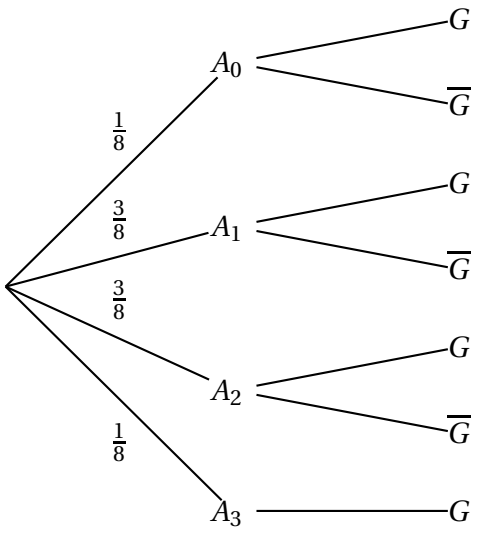
Voici les règles d'un jeu où le but est d'obtenir trois pièces du côté « Face » en un ou deux essais :

- On lance trois pièces équilibrées :
  - Si les trois pièces sont tombées du côté « Face », la partie est gagnée ;
  - Sinon, les pièces tombées du côté « Face » sont conservées et on relance celles tombées du côté « Pile ».
- La partie est gagnée si on obtient trois pièces du côté « Face », sinon elle est perdue.

On considère les évènements suivants :

- G : « la partie est gagnée ».
  Et pour tout entier k compris entre 0 et 3, les évènements :
- A_k : « k pièces sont tombées du côté « Face » au premier lancer ».

1. Démontrer que $P_{A_1}(G) = \dfrac{1}{4}$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. Démontrer que la probabilité p de gagner à ce jeu est $p = \dfrac{27}{64}$
4. La partie a été gagnée. Quelle est la probabilité qu'exactement une pièce soit tombée du côté « Face » à la première tentative ?
5. Combien de fois faut-il jouer à ce jeu pour que la probabilité de gagner au moins une partie dépasse 0,95 ?

Corrigé

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles

Partie A

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face ».

1. On lance 3 fois une pièce de monnaie bien équilibrée donc il s'agit d'une répétition de 3 épreuves identiques et indépendantes ; la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face » suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{1}{2}$.
2. $P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-0} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

   $P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$

   $P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-2} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$

   $P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

   On complète le tableau donnant la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Partie B

Voici les règles d'un jeu où le but est d'obtenir trois pièces du côté « Face » en un ou deux essais :

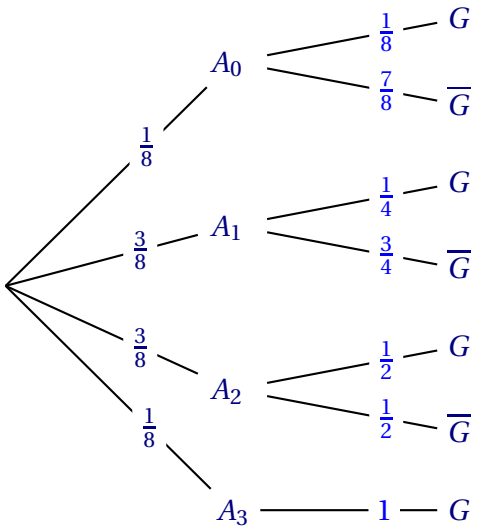
- On lance trois pièces équilibrées :
  - Si les trois pièces sont tombées du côté « Face », la partie est gagnée ;
  - Sinon, les pièces tombées du côté « Face » sont conservées et on relance celles tombées du côté « Pile ».
- La partie est gagnée si on obtient trois pièces du côté « Face », sinon elle est perdue.

On considère les évènements suivants :

- G : « la partie est gagnée ».
  Et pour tout entier k compris entre 0 et 3, les évènements :
- A_k : « k pièces sont tombées du côté « Face » au premier lancer ».

1. $P_{A_1}(G)$ est la probabilité de l'événement « on a gagné sachant que lors du premier lancer, on a obtenu une fois « Face ». C'est donc la probabilité qu'au deuxième lancer, les deux pièces tombent sur « Face ».
Il y a 4 résultats équiprobables possibles : PP - PF - FP - FF, dont un seul favorable ; la probabilité cherchée est donc égale à $\frac{1}{4}$.

2. On complète l'arbre pondéré ci-dessous :



3. D'après la loi des probabilités totales on a :
$p = P(A_0) \times P_{A_0}(G) + P(A_1) \times P_{A_1}(G) + P(A_2) \times P_{A_2}(G) + P(A_3) \times P_{A_3}(G)$
$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \times 1 = \frac{1+6+12+8}{64} = \frac{27}{64}$

4. La partie a été gagnée. La probabilité qu'exactement une pièce soit tombée du côté « Face » à la première tentative est :

$$P_G(A_1) = \frac{P(A_1 \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{4}}{\frac{27}{64}} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{27}{64}} = \frac{3}{32} \times \frac{64}{27} = \frac{2}{9}.$$

5. Les parties sont à chaque fois indépendantes et la probabilité de gagner est à chaque fois égale à $\frac{27}{64}$. Pour n parties jouées, on appelle Z la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées, Z suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{27}{64}$.

$P(Z=0) = \binom{n}{0} \times \left(\frac{27}{64}\right)^0 \times \left(1-\frac{27}{64}\right)^n = \left(\frac{37}{64}\right)^n$ donc $P(Z \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{37}{64}\right)^n$.

Il faut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(Z \geqslant 1) > 0,95$.

On résout donc l'inéquation :

$$1 - \left(\frac{37}{64}\right)^n > 0,95 \iff \left(\frac{37}{64}\right)^n < 0,05$$

$$\iff \ln\left(\left(\frac{37}{64}\right)^n\right) < \ln(0,05) \text{ (croissance de la fonction ln)}$$

$$\iff n \ln\left(\frac{37}{64}\right) < \ln(0,05)$$

$$\iff n > \frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} \text{ car } \frac{1}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} < 0$$

Or la calculatrice donne $\frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} \approx 5,46$. Il faut donc faire au moins 6 parties.

Exercice 47.

Partie A

Suite à une étude statistique réalisée dans la station-service Carbuplus, on évalue à 0,25 la probabilité qu'un client venant alimenter son véhicule en carburant passe moins de 12 minutes dans la station avant de la quitter.
On choisit au hasard et de façon indépendante 10 clients de la station et on assimile ce choix à un tirage avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 10 clients associe le nombre de ces clients ayant passé moins de 12 minutes à la station.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

2. Quelle est la probabilité qu'au moins 4 clients dans un échantillon de 10 passent moins de 12 minutes à la station ? On arrondira si besoin le résultat à 10^{-3} près.

3. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un client arrive à la station et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.
On désigne par T_1, T_2, T_3 les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.

On suppose que T_1, T_2, T_3 sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.
On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. Exprimer S en fonction de T_1, T_2 et T_3.
2. **a.** Déterminer l'espérance de S et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   b. Quelle est la variance du temps d'attente total S de ce troisième client ?
3. Montrer que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

Corrigé

Partie A

1. La variable aléatoire X suit d'après les conditions de l'énoncé une loi binomiale de paramètres $n = 10$ de probabilité $p = 0,25$.
2. On a $P(X \leqslant 3) \approx 0,775\,8$, d'où $P(X > 3) \approx 0,224\,2$ soit environ 0,224 au millième près.
3. $E(X) = n \times p = 10 \times 0,25 = 2,5$.
   Sur un grand nombre de tirages 25 clients sur 100 passeront moins de 12 minutes à la station.

Partie B

Un client arrive à la station et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.
On désigne par T_1, T_2, T_3 les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.
On suppose que T_1, T_2 et T_3 sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.
On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. La variable aléatoire T_1 correspond au temps d'attente passé par le premier client à la station ; comme ce premier client n'a personne devant lui, la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station par le premier client est T_1.
   La variable aléatoire T_2 correspond au temps d'attente passé par le deuxième client à la station ; comme ce deuxième client avait le premier client devant lui, la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station par le deuxième client est $T_1 + T_2$.
   La variable aléatoire T_3 correspond au temps d'attente passé par le troisième client à la station ; comme ce troisième client avait deux autres clients devant lui, la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station par le troisième client est $T_1 + T_2 + T_3$.
   Donc $S = T_1 + T_2 + T_3$.

2. **a.** L'espérance est linéaire donc :
$E(S) = E(T_1 + T_2 + T_3) = E(T_1) + E(T_2) + E(T_3) = 6 + 6 + 6 = 18$.
Cela signifie que le temps moyen d'attente à la station d'un client qui a deux personnes devant lui est de 18 minutes.

b. Les 3 variables aléatoires T_1, T_2 et T_2 sont indépendantes, donc on peut utiliser l'additivité de la variance :
$V(S) = V(T_1 + T_2 + T_3) = V(T_1) + V(T_2) + V(T_3) = 1 + 1 + 1 = 3$.

3. La variable aléatoire S a pour espérance $E(S) = 18$ et pour variance $V(S) = 3$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :
pour tout $\delta \in]0\,;+\infty[$, $P\left(\left|S - E(S)\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V(S)}{\delta^2}$, c'est-à-dire : $P\left(\left|S - 18\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{3}{\delta^2}$.
En prenant l'événement contraire, on a donc : $P\left(\left|S - 18\right| < \delta\right) > 1 - \dfrac{3}{\delta^2}$.
La probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est : $P(14 < S < 22)$, soit : $P(18-4 < S < 18+4)$, ou encore : $P(-4 < S-18 < 4)$, c'est-à-dire : $P\left(\left|S - 18\right| < 4\right)$.
En prenant $\delta = 4$, on a donc; $P\left(\left|S - 18\right| < 4\right) > 1 - \dfrac{3}{16}$ donc $P\left(\left|S - 18\right| < 4\right) > 0,8125$.
On en déduit que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

Exercice 48.

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.
Les achats sur internet représentent 60 % des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30% des ventes et ceux en grandes surfaces 10 % des ventes.
Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

— 75 % pour les clients sur internet ;

— 90 % pour les clients en magasin d'électroménager ;

— 80 % pour les clients en grande surface.

On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.
On définit les évènements suivants :

— I : « le client a effectué son achat sur internet » ;

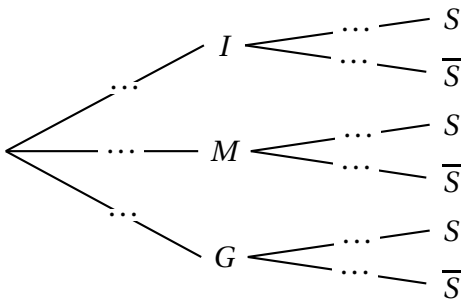
— M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;

— G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;

— S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un évènement quelconque, on notera $\overline{A}$ son évènement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.



2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.

3. Démontrer que $P(S) = 0,8$.

4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ? On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.

5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.

6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.

7. Dans les deux questions **a.** et **b.** qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet. Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2.

La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution. La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :

— L'espérance $E(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$;

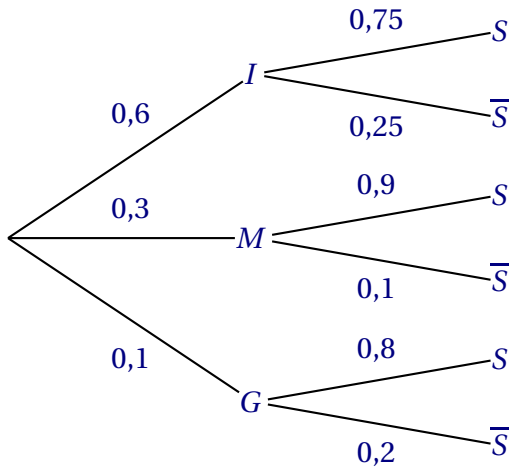
— L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$.

a. Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.

b. Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

Corrigé

1. Voici l'arbre pondéré :



2. La probabilité cherchée est $p(I \cap S) = p(I) \times p_I(S) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$.

3. On a de même $p(M \cap S) = p(M) \times p_M(S) = 0,3 \times 0,9 = 0,27$.
$p(G \cap S) = p(G) \times p_G(S) = 0,1 \times 0,8 = 0,08$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(S) = p(I \cap S) + p(M \cap S) + p(G \cap S) = 0,45 + 0,27 + 0,08 = 0,45 + 0,35 = 0,8$.

4. on a $p_S(I) = \dfrac{p(S \cap I)}{p(S)} = \dfrac{p(I \cap S)}{p(S)} = \dfrac{0,45}{0,8} = \dfrac{45}{80} = \dfrac{9}{16} = 0,562\,5$, soit 0,563 au millième près.

5. **a.** Les conditions de l'étude sont telles que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,8$.

b. D'après la calculatrice $p(X \geqslant 25) = 1 - p(X \leqslant 24) \approx 1 - 0,572\,5$ soit environ 0,4275, donc 0,428 au millième près.

6. Soit Y la variable aléatoire prenant comme valeurs le nombre de clients satisfaits : elle suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p = 0,8$.
Il faut trouver le plus petit naturel n tel que
$p(Y \leqslant n-1) \geqslant 0,99$, donc tel que $1 - P(Y = n) \geqslant 0,99 \iff P(Y = n) \leqslant 0,01 \iff$
$0,8^n \leqslant 0,01 \iff n \ln 0,8 < \ln 0,01$ (par croissance de la fonction logarithme népérien)
$\iff n > \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$ car $\ln(0,8) < 0$
Or $\dfrac{\ln 0,1}{\ln 0,8} \approx 20,6$.
Il faut donc interroger au moins 21 personnes.

7. **a.**

- $E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$ et T_1 et T_2 sont deux variables indépendantes, donc
- $V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3$.

b. Il faut trouver :
$p(5 \leqslant T \leqslant 9)$ ou encore $p(4 < T < 10) = p(4 - E(T) < T - E(T) < 10 - E(T)) =$
$p(-3 < T - E(T) < 3)$ soit $p(|T - E(T)| < 3)$ ou encore $1 - p(|T - E(T)| \geqslant 3)$ et finalement d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
$p(5 \leqslant T \leqslant 9) \geqslant 1 - \dfrac{V(T)}{3^2}$, soit

$p(5 \leqslant T \leqslant 9) \geqslant 1 - \dfrac{3}{9}$ et finalement :

$p(5 \leqslant T \leqslant 9) \geqslant \dfrac{2}{3}$.

Exercice 49.

Dans la revue *Lancet Public Health*, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.
Source : https ://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667 (21) 00064-5/fulltext
On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice.

Partie A

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
   On note I l'évènement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 »
   Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 ?
2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres.
   On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.
   a. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   b. Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
   c. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon ?
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   d. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon ?
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   e. Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) > 0,9$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B :

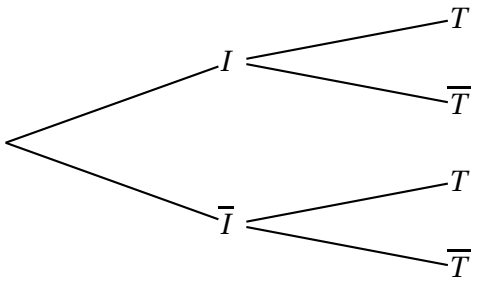
Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection), si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID 19.
Si le test est positif, cela signifie que la personne a déjà été infectée par la COVID 19.
Deux paramètres permettent de caractériser ce test : sa sensibilité et sa spécificité.
La **sensibilité** d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie. (II s'agit donc d'un vrai positif).
La **spécificité** d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie. (II s'agit donc d'un vrai négatif).
Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :

— Sa sensibilité est de 0,8.

— Sa spécificité est de 0,99.

On prélève un individu soumis au test dans la population française adulte au 11 mai 2020.
On note T l'évènement « le test réalisé est positif ».

1. Compléter l'arbre des probabilités ci-dessous avec les données de l'énoncé :



2. Montrer que $p(T) = 0{,}055\,03$.

3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

Partie C :

On considère un groupe d'une population d'un autre pays soumis au même test de sensibilité 0,8 et de spécificité 0,99.
Dans ce groupe la proportion d'individus ayant un test positif est de 29,44 %.
On choisit au hasard un individu de ce groupe ; quelle est la probabilité qu'il ait été infecté ?

Corrigé

Partie A

1. Puisque l'individu est choisi dans la population française, on suppose qu'il y a une situation d'équiprobabilité et que les proportions sont assimilables à des probabilités.
Comme 5,7 % des adultes avaient déjà été infectés, d'après l'étude du *Lancet*, la probabilité que l'individu choisi ait déjà été infecté est de $P(I) = 0{,}057$.

2. **a.** — On a une épreuve de Bernoulli, dont le succès : « l'individu choisi a déjà été infecté », a une probabilité $p = 0{,}057$;
— Cette épreuve est répétée $N = 100$ fois, de façon identique et indépendante (car le prélèvement des 100 individus est assimilé à un tirage avec remise) ;
— X est une variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi ces répétitions.
Avec ces éléments, on peut affirmer que X suit la loi binomiale de paramètres $N = 100$ et $p = 0{,}057$.
Remarque : le paramètre donnant le nombre de répétitions est souvent noté n, plutôt que N, mais dans la question **2. e.**, un entier n est introduit, donc pour éviter le conflit de notation, on utilise N ici.

b. Puisque X suit une loi binomiale, on a : $E(X) = N \times p = 100 \times 0{,}057 = 5{,}7$. On en déduit que dans un échantillon de 100 personnes adultes choisies au sein de la population française le 11 mai 2020, en moyenne, 5,7 d'entre eux avaient déjà été infectés par la COVID 19.

c. La probabilité demandée est celle de l'évènement $\{X = 0\}$.
Pour les variables aléatoires régies par la loi binomiale, on a (pour k entier naturel inférieur à n) : $P(X = k) = \binom{N}{k} \times p^k \times (1-p)^{N-k}$.
On a donc, ici : $P(X = 0) = \binom{100}{0} \times 0,057^0 \times 0,943^{100} = 0,943^{100} \approx 0,0028$.

d. La probabilité qu'au moins deux personnes de l'échantillon aient été préalablement infectées est de :
$P(X \geqslant 2) = 1 - P\left(\overline{X \geqslant 2}\right) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$. (Certains modèles de calculatrices n'ont pas besoin de ce calcul).
À la calculatrice, on obtient : $P(X \geqslant 2) \approx 0,9801$.

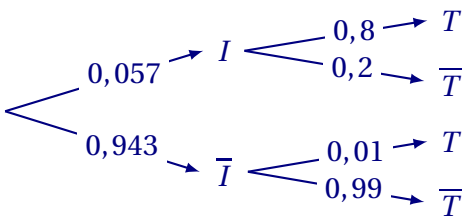
e. Par exploration à la calculatrice, on constate que pour $n \leqslant 8$, on a une probabilité inférieure ou égale à 0,9, avec $P(X \leqslant 8) \approx 0,8829$ et $P(X \leqslant 9) \approx 0,9408$.
L'entier cherché est 9.
Cela signifie que dans un échantillon de cent adultes choisis dans la population française le 11 mai 2020, il y a plus de neuf chances sur dix que le nombre d'entre eux préalablement infectés par la COVID 19 est inférieur ou égal à 9.

Partie B

1. L'évènement I est l'évènement déjà utilisé dans la **Partie A**. On avait $P(I) = 0,057$.

— La description de la **sensibilité** nous fait comprendre qu'il s'agit de la probabilité conditionnelle : $P_I(T) = 0,8$;
— celle de la **spécificité** indique que est : $P_{\overline{I}}\left(\overline{T}\right) = 0,99$.

Avec ces informations, on peut compléter l'arbre probabilisé :

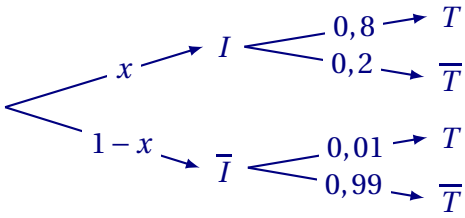


2. Les évènements I et $\overline{I}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P\left(I \cap T\right) + P\left(\overline{I} \cap T\right) = 0,057 \times 0,8 + 0,943 \times 0,01 = 0,055\,03$.

3. La question posée est de calculer : $P_T(I)$.
D'après la définition des probabilités conditionnelles :
$P_T(I) = \dfrac{P(T \cap I)}{P(T)} = \dfrac{0,057 \times 0,8}{0,055\,03} = \dfrac{4560}{5503} \approx 0,828\,6$.
Cela signifie qu'une personne dont le test est positif n'a qu'une probabilité de 0,828 6 (environ) d'avoir été préalablement infectée par la COVID 19.

Partie C

Si le test est le même, sa sensibilité et sa spécificité sont les mêmes, ce qui change, c'est donc la probabilité d'avoir été préalablement infecté. Cette probabilité n'est pas connue, notons la x.
On a donc l'arbre suivant :



Les évènements I et $\overline{I}$ partitionnent toujours cet univers différent, donc, d'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P\left(I \cap T\right) + P\left(\overline{I} \cap T\right) = x \times 0,8 + (1-x) \times 0,01 = 0,8x + 0,01 - 0,01x = 0,79x + 0,01$.
D'après l'énoncé, 29,44 % des gens ont un test positif, donc la probabilité de choisir un individu dont le test est positif est de 0,2944.
On a donc une double égalité, dont on déduit l'équation suivante : $0,79x + 0,01 = 0,2944$
Résolvons : $0,79x + 0,01 = 0,2944 \iff 0,79x = 0,2844$

$$\iff x = \frac{0,2844}{0,79}$$

$$\iff x = \frac{2844}{7900}$$

La probabilité que la personne choisie ait été infectée est donc de $\frac{2844}{7900} = 0,36$.
Dans cet autre pays, la proportion de personnes préalablement infectées est donc 36 %.

Exercice 50.

Au cours d'une séance, un joueur de volley-ball s'entraîne à faire des services. La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,85.
On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le joueur réussit un service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant est égale à 0,6 ;
- si le joueur ne réussit pas un service, alors la probabilité qu'il ne réussisse pas le suivant est égale à 0,6.

Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

Partie A

On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement R_2 est égale à 0,57.
3. Sachant que le joueur a réussi le deuxième service, calculer la probabilité qu'il ait raté le premier.
4. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de services réussis au cours des deux premiers services.
   a. Déterminer la loi de probabilité de Z (on pourra utiliser l'arbre pondéré de la question 1).
   b. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(Z)$ de la variable aléatoire Z.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On s'intéresse maintenant au cas général.

Pour tout entier naturel n non nul, on note x_n la probabilité de l'évènement R_n.

1. **a.** Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(\overline{R_{n+1}})$.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $x_{n+1} = 0,2x_n + 0,4$.

2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = x_n - 0,5$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

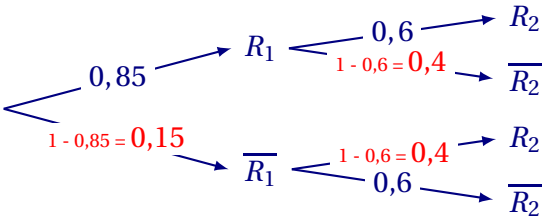
   b. Déterminer l'expression de x_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (x_n).

   c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

Partie A

1. La situation peut être représentée par l'arbre pondéré ci-contre :



2. Les évènement R_1 et $\overline{R_1}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

   $P(R_2) = P\left(R_2 \cap R_1\right) + P\left(R_2 \cap \overline{R_1}\right) = 0,85 \times 0,6 + 0,15 \times 0,4 = 0,57$.

   Ceci confirme que la probabilité de l'évènement R_2 est égale à 0,57.

3. Sachant que le joueur a réussi le deuxième service, la probabilité qu'il ait raté le premier est la probabilité conditionnelle : $P_{R_2}\left(\overline{R_1}\right)$.

   D'après la définition : $P_{R_2}\left(\overline{R_1}\right) = \dfrac{P\left(R_2 \cap \overline{R_1}\right)}{P(R_2)} = \dfrac{0,15 \times 0,4}{0,57} = \dfrac{0,06}{0,57} = \dfrac{6}{57} = \dfrac{2}{19}$.

   (puisqu'il n'y a pas de consigne d'arrondi dans l'énoncé, *a priori*, c'est la valeur exacte, fractionnaire, qui est attendue).

4. **a.** Voici le tableau donnant la loi de probabilité de Z.

z_i	0	1	2
évènement	$\overline{R_1} \cap \overline{R_2}$	$\left(\overline{R_1} \cap R_2\right) \cup \left(R_1 \cap \overline{R_2}\right)$	$R_1 \cap R_2$
$P(Z = z_i)$	$0,15 \times 0,6 = 0,09$	$0,15 \times 0,4 + 0,85 \times 0,4 = 0,06 + 0,34 = 0,4$	$0,85 \times 0,6 = 0,51$

   b. L'espérance mathématique E(Z) est donc :

   $E(Z) = 0,09 \times 0 + 0,4 \times 1 + 0,51 \times 2 = 1,42$.

   Ce résultat, dans le contexte de l'exercice, signifie que, dans ces conditions, le nombre moyen de services réussis sur les deux premiers services de la séance d'entraînement est de 1,42.

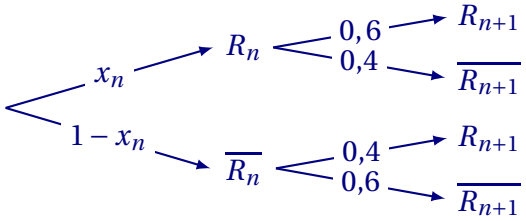
   (Ici, le nombre 1,42 n'a pas a être arrondi à l'entier, car il ne représente pas un nombre réel ou réaliste de services réussis, mais une *moyenne* théorique, établie sur les deux premiers services d'un grand nombre d'entraînements réalisés dans les mêmes conditions).

Partie B

1. **a.** D'après l'énoncé, on a les probabilités conditionnelles suivantes :

- $P_{R_n}(R_{n+1}) = 0,6$: c'est la situation « si le joueur réussit un service (ici, le service n) alors la probabilité qu'il réussisse le suivant (ici, le service $(n+1)$) est égale à 0,6 ».
- $P_{\overline{R_n}}(\overline{R_{n+1}}) = 0,6$. Là, c'est la situation « si le joueur ne réussit pas un service (ici, le service n) alors la probabilité qu'il ne réussisse pas le suivant (ici, le service $(n+1)$) est égale à 0,6 ».

b. On peut visualiser la situation par l'arbre pondéré ci-contre :



R_n et $\overline{R_n}$ partitionnant l'univers, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P(R_{n+1}) \\ &= P\left(R_{n+1} \cap R_n\right) + P\left(R_{n+1} \cap \overline{R_n}\right) \\ &= x_n \times 0,6 + (1 - x_n) \times 0,4 \\ &= 0,6x_n + 0,4 - 0,4x_n \\ &= 0,2x_n + 0,4. \end{aligned}$$

On a bien établi la relation de récurrence attendue pour la suite (x_n).

2. **a.** Puisque l'on a, pour tout entier naturel non nul $u_n = x_n - 0,5$, il est équivalent de dire que l'on a $u_n + 0,5 = x_n$.

Cherchons à établir la relation de récurrence de la suite (u_n). Soit n un entier naturel non nul :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= x_{n+1} - 0,5 && \text{d'après la définition de la suite } (u_n) \\ &= \left(0,2x_n + 0,4\right) - 0,5 && \text{d'après la relation de récurrence de } (x_n) \\ & && \text{(voir \textbf{B 1. b.})} \\ &= 0,2\left(u_n + 0,5\right) + 0,4 - 0,5 && \text{d'après la définition de la suite } (u_n) \\ &= 0,2u_n + 0,2 \times 0,5 - 0,1 \\ &= 0,2u_n + 0,1 - 0,1 \\ &= 0,2u_n \end{aligned}$$

Cette relation de récurrence est celle d'une suite géométrique, de raison $q = 0,2$ et de premier terme $u_1 = x_1 - 0,5 = 0,85 - 0,5 = 0,35$.

b. Puisque l'on sait que (u_n) est géométrique, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,35 \times 0,2^{n-1}$.

Et comme, pour tout n naturel non nul $u_n + 0,5 = x_n$: $\quad x_n = 0,5 + 0,35 \times 0,2^{n-1}$

Comme on a $0 < 0,2 < 1$, on en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$,

et donc, par limite de la somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0,5$.

c. Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'au bout d'un grand nombre de services, la probabilité de réussir un service tend à se stabiliser aux alentours de 0,5, ou bien encore qu'au bout d'un grand nombre de services, le joueur aura tendance à réussir un service sur 2.

Exercice 51.

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.
À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.
Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.
Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est $(4\,;5\,;1)$.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. **a.** Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
   b. En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché.
Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1, X_2, et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_1

On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S.
6. Déterminer $P(S = 24)$.
7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
   a. Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
   b. En déduire la probabilité de gagner un lot.

Corrigé

1. Un tirage est donc un triplet (c'est-à-dire une 3-liste ou un 3-uplet) ordonné d'éléments choisis dans un ensemble E de cardinal $\text{Card}(E) = 8$ (il y a 8 jetons), qui ne s'amenuise pas (car on remet le jeton avant de tirer le suivant, et donc les répétitions sont possibles.)
   Le nombre de tirages possibles est donc de : $\text{Card}(E)^3 = 8^3 = 512$.
   Il y a 512 tirages possibles.
2. **a.** Si on souhaite un tirage sans répétition de numéro, alors, c'est comme si on avait fait un tirage sans remise (un numéro déjà choisi ne peut pas être choisi à nouveau), et donc un triplet ordonné d'éléments choisis dans un ensemble qui s'amenuise.
   Il y a donc $\dfrac{8!}{(8-3)!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$ tirages possibles sans numéro répété.

Remarque : On peut parler d'arrangement, même si ce mot n'est pas explicitement à connaître en terminale.

On peut aussi voir cette valeur comme étant : 8 choix possibles pour le premier numéro du triplet, puis 7 choix possibles pour le deuxième numéro, sachant qu'il doit être différent du premier et enfin 6 choix possibles pour le dernier numéro, qui doit être différent des deux précédents.

b. Le nombre de tirages avec au moins une répétition de numéro est donc la différence des deux résultats précédents : $512 - 336 = 176$.

En effet, l'ensemble des tirages possibles est la réunion de deux ensembles disjoints : les tirages sans aucune répétition de numéro et les tirages avec au moins une répétition de numéro.

Remarque : On pouvait aussi compter le nombre de tirages avec deux numéros identiques : $8 \times \binom{3}{2} \times 7 = 168$ (huit choix pour le numéro répété, multiplié par $\binom{3}{2}$ façons de placer ces deux numéros identiques dans le triplet, multiplié par sept choix pour le numéro différent des deux premiers) et l'ajouter au nombre de tirages avec trois numéros identiques : 8 (huit choix possibles pour le numéro qui sera répété trois fois), mais dans ce cas, on obtient 176 sans le déduire des questions précédentes.

3. Le sac étant opaque et les jetons indiscernables au toucher, chaque sélection d'un jeton dans le sac est une situation d'équiprobabilité, et donc on a une loi équirépartie.

On peut donc présenter la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1 sous la forme du tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

4. L'espérance de la variable aléatoire X_1 est donc donnée par :

$E(X_1) = x_1 \times P(X_1 = x_1) + x_2 \times P(X_1 = x_2) + ...x_8 \times P(X_1 = x_8)$

$= \left(x_1 + x_2 + ... + x_8\right) \times \frac{1}{8}$ car la loi est équirépartie

$= \left(1 + 2 + ... + 8\right) \times \frac{1}{8}$

$= \frac{1+8}{2} \times 8 \times \frac{1}{8}$ avec la formule de la somme des premiers termes d'une suite arithmétique

$= 4,5$

5. On a $E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$, et puisque X_1, X_2 et X_3 suivent la même loi de probabilité, alors on en déduit :

$E(S) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 4,5 = 13,5$

6. L'évènement $\{S = 24\}$ n'est réalisé que par le tirage (8 ; 8 ; 8), donc sur les 512 issues possibles de l'expérience aléatoire, une seule est favorable à l'évènement : la probabilité est donc de $\frac{1}{512}$ (puisque l'on est en situation d'équiprobabilité).

Remarque : On peut aussi dire que l'évènement $\{S = 24\}$ est égal à l'évènement $\{X_1 = 8\} \cap \{X_2 = 8\} \cap \{X_3 = 8\}$.

Et comme les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes :

$$P(S=24) = P\big(\{X_1=8\}\cap\{X_2=8\}\cap\{X_3=8\}\big) = P(X_1=8)\times P(X_2=8)\times P(X_3=8)$$
$$= \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}$$

7. **a.** — Le nombre 24 ne peut être obtenu que par la somme 8 + 8 + 8, qui ne procède que d'un seul tirage (le tirage (8 ; 8 ; 8)).

— Le nombre 23 ne peut être obtenu que par la somme 7 + 8 + 8, cette somme est constituée d'un doublon (le 8) et d'un entier présent une seule fois (le 7).

Elle peut procéder de trois tirages différents, car il y a $\binom{3}{2} = 3$ façons de placer les deux entiers identiques dans un triplet.

Les trois triplets conduisant à $\{S=23\}$ sont : (7 ; 8 ; 8) ; (8 ; 7;8) et (8 ; 8 ; 7).

— Le nombre 22 peut être obtenu comme somme de trois entiers naturels entre 1 et 8 en faisant : 6 + 8 + 8, ou bien en faisant 7 + 7 + 8.

Chacune de ces sommes est constitué d'un doublon et d'un troisième entier différent, et est donc le résultat de trois tirages différents.

Il y a donc six tirages donnant 22 (les tirages (6 ; 8 ; 8) ; (8 ; 6 ; 8) ; (8 ; 8 ; 6) ; (8 ; 7 ; 7) ; (7 ; 8;7) et (7 ; 7 ; 8)).

On a donc bien finalement $1+3+6=10$ tirages conduisant au gain d'un lot.

b. On est en situation d'équiprobabilité pour les 512 tirages possibles (nombre déterminé à la question **1.**), donc, avec 10 tirages favorables à l'évènement « gagner un lot », la probabilité de gagner un lot est donc de $\frac{10}{512} = \frac{5}{256}$.

Exercice 52.

Partie A

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$f(x) = \frac{0,96x}{0,93x+0,03}.$$

1. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;1]$,

$$f'(x) = \frac{0,0288}{(0,93x+0,03)^2}.$$

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.

Partie B

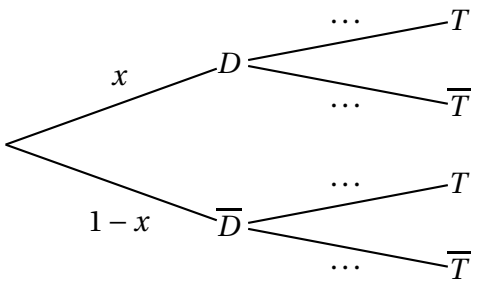
La lutte contre le dopage passe notamment par la réalisation de contrôles antidopage qui visent à déterminer si un sportif a fait usage de substances interdites.
Lors d'une compétition rassemblant 1 000 sportifs, une équipe médicale teste tous les concurrents.
On propose d'étudier la fiabilité de ce test.
On appelle x le réel compris entre 0 et 1 qui désigne la proportion de sportifs dopés.
Lors de l'élaboration de ce test, on a pu déterminer que :

- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il est dopé est égale à 0,96 ;
- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il n'est pas dopé est égale à 0,03.

On note :

- D l'évènement : « le sportif est dopé ».
- T l'évènement : « le test est positif ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



2. Déterminer, en fonction de x, la probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif.

3. Démontrer que la probabilité de l'évènement T est égale à $0,93x + 0,03$.

4. Pour cette question uniquement, on suppose qu'il y a 50 sportifs dopés parmi les 1 000 testés. La fonction f désigne la fonction définie à la partie A.
Démontrer que la probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que son test est positif est égale à $f(0,05)$. *En donner une valeur arrondie au centième.*

5. On appelle valeur prédictive positive d'un test la probabilité que le sportif soit réellement dopé lorsque le résultat du test est positif.

a. Déterminer à partir de quelle valeur de x la valeur prédictive positive du test étudié sera supérieure ou égale à 0,9. Arrondir le résultat au centième.

b. Un responsable de la compétition décide de ne plus tester l'ensemble des sportifs, mais de cibler les sportifs les plus performants supposés être plus fréquemment dopés.
Quelle est la conséquence de cette décision sur la valeur prédictive positive du test ?
Argumenter en utilisant un résultat de la partie A.

Corrigé

Partie A

1. f est dérivable sur son ensemble de définition, en tant que fraction rationnelle.

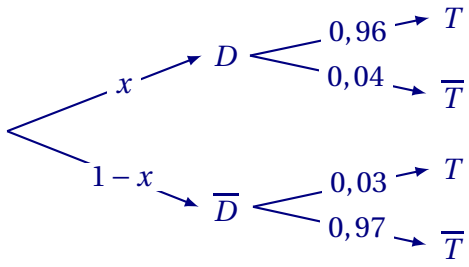
$$\forall x \in [0\,;\,1],\quad f'(x) = \frac{0,96 \times (0,93x + 0,03) - (0,96x \times 0,93)}{(0,93x + 0,03)^2}$$
$$= \frac{0,8928x + 0,0288 - 0,8928x}{(0,93x + 0,03)^2}$$
$$= \frac{0,0288}{(0,93x + 0,03)^2}$$

On arrive donc bien à l'expression demandée.

2. On a une fonction dérivée qui est le quotient d'un numérateur strictement positif par un dénominateur qui est le carré d'un réel non nul, donc strictement positif également, donc pour tout x dans $[0\,;\,1]$, $f'(x)$ est strictement positif.
On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.

Partie B

1. On a l'arbre suivant :



2. Ici, on nous demande de déterminer : $P(D \cap T)$

$P(\text{D} \cap \text{T}) = P(D) \times P_D(T) = x \times 0,96 = 0,96x$.

3. Les évènements D et $\overline{D}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T) \\ &= 0,96x + (1-x) \times 0,03 \\ &= 0,96x + 0,03 - 0,03x \\ &= 0,93x + 0,03 \end{aligned}$$

On arrive bien à la probabilité annoncée.

4. Dans cette question, on veut calculer $P_T(D)$.

Par définition des probabilités conditionnelles, on a : $P_T(D) = \dfrac{P(D \cap T)}{P(T)}$.

D'après les questions précédentes, cela donne : $P_T(D) = \dfrac{0,96x}{0,93x + 0,03} = f(x)$.

On est, dans cette question, avec 50 sportifs dopés sur les 1 000 testés, donc en choisissant un sportif au hasard, on est en situation d'équiprobabilité et donc la probabilité qu'un sportif soit dopé est, pour cette question $x = \dfrac{50}{1\,000} = 0,05$.

La probabilité demandée est donc bien $f(0,05) = \dfrac{0,96 \times 0,05}{0,93 \times 0,05 + 0,03} = \dfrac{32}{51} \approx 0,627$ soit environ 0,63 au centième près.

5. **a.** La valeur prédictive positive du test est donc la probabilité $P_T(D)$. D'après la question **4. a.**, pour toute probabilité x dans $[0\,;\,1]$, on a : $P_T(D) = f(x)$.

On veut donc résoudre, dans $[0\,;\,1]$, l'inéquation : $f(x) \geqslant 0,9$.

$$\begin{aligned} f(x) \geqslant 0,9 &\iff \frac{0,96x}{0,93x + 0,03} \geqslant 0,9 \\ &\iff 0,96x \geqslant 0,9(0,93x + 0,03) \quad \text{car sur } [0\,;\,1], \quad 0,93x + 0,03 > 0 \\ &\iff (0,96 - 0,9 \times 0,93)x \geqslant 0,9 \times 0,03 \\ &\iff 0,123x \geqslant 0,027 \\ &\iff x \geqslant \frac{27}{123} = \frac{9}{41} \end{aligned}$$

C'est donc pour x supérieur à $\dfrac{9}{41} \approx 0,22$ que la valeur prédictive positive du test sera supérieure ou égale à 0,9.

b. Si on accepte comme vraie l'affirmation « les sportifs les plus performants [sont les] plus fréquemment dopés », alors le fait de restreindre la population testée aux sportifs les plus performants doit avoir pour conséquence de faire augmenter x, la proportion de sportifs dopés dans la population testée.

Comme la valeur prédictive positive est donnée par $f(x)$ et que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$, plus x augmente, plus $f(x)$ augmente et donc plus on teste une population où la proportion de dopés est élevée (ce qui est le cas si on ne teste que les sportifs les plus performants), meilleure est la valeur prédictive positive du test.

Exercice 53.

Les données publiées le 1er mars 2023 par le ministère de la transition écologique sur les immatriculations de véhicules particuliers en France en 2022 contiennent les informations suivantes :

- 22,86 % des véhicules étaient des véhicules neufs ;
- 8,08 % des véhicules neufs étaient des hybrides rechargeables ;
- 1,27 % des véhicules d'occasion (c'est-à-dire qui ne sont pas neufs) étaient des hybrides rechargeables.

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au dix-millième.

Dans cette partie, on considère un véhicule particulier immatriculé en France en 2022.
On note :

- N l'évènement « le véhicule est neuf » ;
- R l'évènement « le véhicule est hybride rechargeable » ;
- $\overline{N}$ et $\overline{R}$ les évènements contraires des évènements contraires de N et R.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf et hybride rechargeable.

3. Démontrer que la valeur arrondie au dix-millième de la probabilité que ce véhicule soit hybride rechargeable est 0,028 3.

4. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable.

Dans cette partie, on choisit 500 véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022.
Dans la suite, on admettra que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.
On assimile le choix de ces 500 véhicules à un tirage aléatoire avec remise.
On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules neufs parmi les 500 véhicules choisis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser la valeur de ses paramètres.

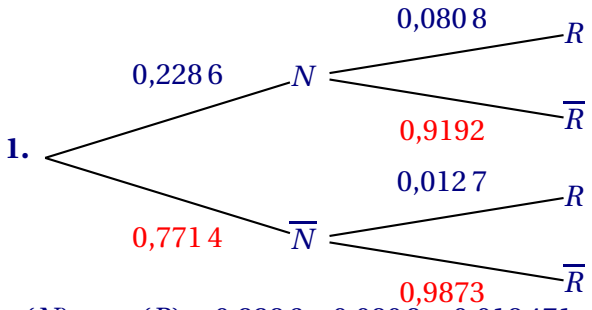
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs.

3. Déterminer la probabilité $p(X \geq 325)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On choisit désormais n véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022, où n désigne un entier naturel strictement positif.
On rappelle que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.
On assimile le choix de ces n véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

1. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n que tous ces véhicules soient d'occasion.
2. On note q_n la probabilité qu'au moins un de ces véhicules soit neuf. En résolvant une inéquation, déterminer la plus petite valeur de n telle que $q_n \geqslant 0{,}999\,9$.

Corrigé



2. On calcule $p(N \cap R) = p(N) \times p_N(R) = 0{,}228\,6 \times 0{,}080\,8 = 0{,}018\,471$ soit $0{,}018\,5$ à 10^{-4} près.
3. On a de même $p\left(\overline{N} \cap R\right) = p(N) \times p_{\overline{N}}(R) = 0{,}771\,4 \times 0{,}012\,7 = 0{,}009\,797$ soit $0{,}009\,8$ à 10^{-4} près.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $p(R) = p(N \cap R) + p\left(\overline{N} \cap R\right) \approx 0{,}018\,5 + 0{,}009\,8$
   $p(R) \approx 0{,}028\,3$.
4. On a $p_R(N) = \dfrac{p(R \cap N)}{p(R)} = \dfrac{p(N \cap R)}{p(R)} \approx \dfrac{0{,}018\,5}{0{,}028\,3} \approx 0{,}653\,71$ soit $0{,}653\,7$ à 10^{-4} près.

1. X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(n = 500,\ p = 0{,}65)$.
2. On calcule $\binom{500}{325} \times 0{,}65^{325} \times 0{,}35^{175} \approx 0{,}037\,384$ soit $0{,}037\,4$ à 10^{-4} près. (Utiliser la fonction binomiale de la calculatrice si les capacités de calcul de celle-ci sont dépassées).
3. On a $p(X \geqslant 325) = 1 - p(X \leqslant 324)$ soit d'après la calculatrice 0,479 44, donc
   $p(X \geqslant 325) \approx 1 - 0{,}479\,4 = 0{,}520\,6$ à 10^{-4} près.

1. On a $p_n = (1 - 0{,}65)^n = 0{,}35^n$.
2. On a $q_n = 1 - p_n$.
   On cherche donc n tel que $1 - p_n \geqslant 0{,}999\,9 \iff p_n \leqslant 0{,}000\,1$, soit par croissance de la fonction logarithme népérien :
   $n \ln 0{,}35 \leqslant \ln 00{,}000\,1 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}000\,1}{\ln 0{,}35}$ car $\dfrac{1}{\ln 0{,}35} < 0$.
   D'après la calculatrice $\dfrac{\ln 0{,}000\,1}{\ln 0{,}35} \approx 8{,}8$.
   Il faut prendre au minimum $n = 9$.

Exercice 54.

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.
Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

— la probabilité de tirer un objet rare est de 7 % ;

— si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 % ;

— si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet. On note :

- R l'évènement « le joueur tire un objet rare » ;
- E l'évènement « le joueur tire une épée » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$ les évènements contraires des évènements R et E.

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.
2. Calculer la probabilité de tirer une épée.
3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. Arrondir le résultat au millième.

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.
2. Déterminer $P(X < 6)$. Arrondir le résultat au millième.
3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %.

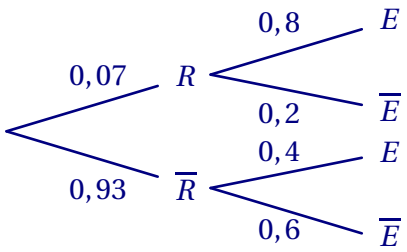
   Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à 0,95.

   Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On veillera à détailler la démarche mise en œuvre.

Corrigé

Partie A

1. D'après l'énoncé, on a : $p(R) = 0,07$; $p_R(E) = 0,8$ et $p_{\overline{R}}(E) = 0,4$
   On en déduit l'arbre pondéré modélisant la situation :



   et on a : $p(R \cap E) = p(R) \times p_R(E) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$

2. R et $\overline{R}$ constituent une partition de l'univers.
   D'après la loi des probabilités totales : $p(E) = p(R \cap E) + p\left(\overline{R} \cap E\right)$
   donc $p(E) = p(R) \times p_R(E) + p(\overline{R}) \times p_{\overline{R}}(E)$
   donc $p(E) = 0,056 + 0,93 \times 0,4 = 0,428$.

3. On cherche la probabilité que le joueur obtienne un objet rare sachant qu'il a tiré une épée.
   $p_E(R) = \dfrac{p(R \cap E)}{p(E)} = \dfrac{0,056}{0,428} \approx 0,131$ au millième près.

Partie B

1. Les 30 défis constituent une répétition d'expériences aléatoires identiques et indépendantes à deux issues, il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(30\,;0,07)$ de paramètres $n = 30$ et $p = 0,07$
   Son espérance est $E(X) = n \times p = 30 \times 0,07 = 2,1$

2. $p(X < 6) = p(X \leqslant 5) \approx 0,984$ au millième près.

3. On cherche le plus grand entier k tel que $p(X \geqslant k) \geqslant 0,5$
   $p(X \geqslant k) \geqslant 0,5 \iff 1 - p(X < k) \geqslant 0,5 \iff -p(X < k) \geqslant -0,5 \iff$
   $p(X < k) \leqslant 0,5 \iff p(X \leqslant k-1) \leqslant 0,5$.
   En utilisant la calculatrice on trouve : $p(X \leqslant 1) \approx 0,3694$ et $p(X \leqslant 2) \approx 0,6487$
   La plus grande valeur de k telle que $p(X \geqslant k) \geqslant 0,5$ est donc $k = 2$.
   Après avoir remporté 30 défis, dans au moins 50 % des cas, le joueur aura tiré au moins 2 objets rares.

4. On cherche le plus petit entier naturel n tel que $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,95$
   $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,95 \iff 1 - p(X = 0) \geqslant 0,95 \iff -p(X = 0) \geqslant -0,05 \iff$
   $p(X = 0) \leqslant 0,05$; or $p(X = 0) = \dbinom{n}{0} \times 0,07^0 \times 0,93^n = 0,93^n$
   $0,93^n \leqslant 0,05 \iff \ln(0,93^n) \leqslant \ln(0,05)$ car ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$
   $\iff n\ln(0,93) \leqslant \ln(0,05) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)}$ car $\ln(0,93) < 0$
   $\iff n \geqslant 41,3 \iff n \geqslant 42$
   Il faut donc tirer au minimum 42 objets pour que la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare soit supérieure ou égale à 0,95.