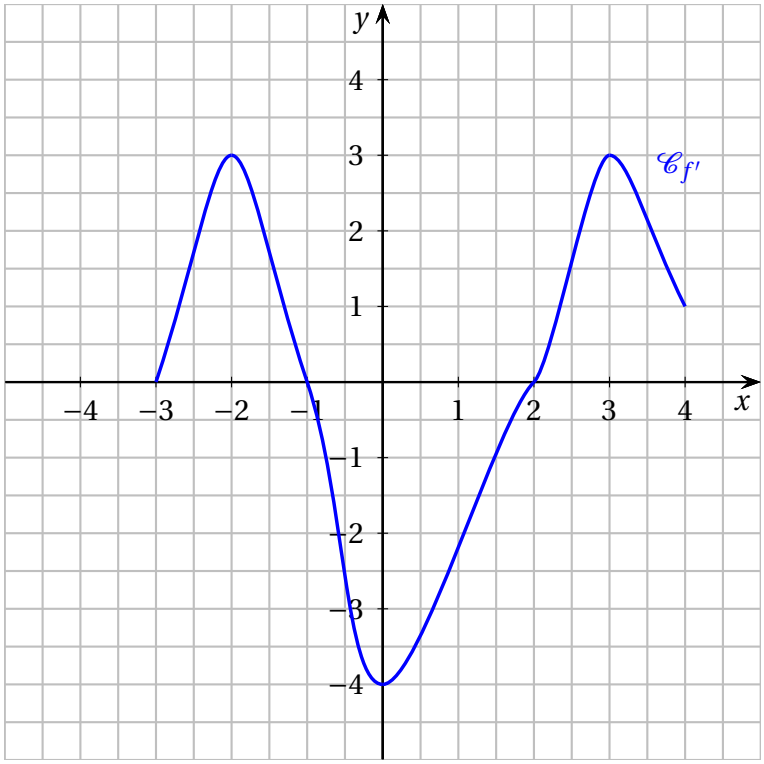
Annales baccalauréat spécialité
QCM et Vrai/Faux multi-thèmes

Exercice 1.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé du plan, la courbe représentative de la fonction dérivée f' d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3;4]$.



Par lecture graphique, déterminer l'affirmation correcte pour la fonction f :

a. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-2;-1]$
b. La fonction f est concave sur l'intervalle $[-1;2]$
c. La fonction f est concave sur l'intervalle $[-2;0]$
d. La fonction f admet exactement deux points d'inflexion sur l'intervalle $[-3;4]$

2. Une école de rugby compte 20 joueurs. Les matchs auxquels peut participer cette école se jouent à 10. Combien d'équipes différentes cette école peut-elle former ?

a. $\binom{20}{10}$
b. 20^{10}
c. $20 \times 19 \times 18 \times \ldots \times 11$
d. 10^{20}

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n + 3$.

La fonction Python suivante, dont la ligne 4 est incomplète, doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n tel que $u_n \geqslant 100$.

```
1 def suite() :
2     u = 1
3     n = 0
4     while
          .......... :
5         u = 1.5*u
              + 3
6         n = n+1
7     return n
```

La ligne 4 doit être complétée par :

a. `u <= 100`

b. `u >= 100`

c. `u < 100`

d. `n <= 100`

4. La solution de l'équation différentielle $y' + 3y = \dfrac{9}{2}$ qui vérifie $f(1) = 0$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f(x) = \dfrac{3}{2}$

b. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{3}{2}$

c. $f(x) = \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{3(1-x)} - \dfrac{3}{2}$

d. $f(x) = -\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{3(1-x)} + \dfrac{3}{2}$

Corrigé

1. Sur l'intervalle $[-2;0]$, f' est décroissante, la fonction f est donc concave sur cet intervalle.
Réponse 1. c

2. Le nombre d'équipes est égal au nombre de parties à 10 éléments pris dans un ensemble de cardinal 20, c'est-à-dire $\binom{20}{10}$.
Réponse 2. a

3. Le test d'arrêt de la ligne 4 est « while u < 100 ».
Réponse 3. c

4. On peut éliminer les réponses **a.** et **b.** pour lesquelles on n'a pas $f(1) = 0$.
Si $f(x) = -\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{3(1-x)} + \dfrac{3}{2}$, on a $f'(x) = -\dfrac{3}{2}(-3)\,\mathrm{e}^{3(1-x)} = \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{3(1-x)}$, et $f(0) = 1$.
$f'(x) + 3f(x) = \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{3(1-x)} - 3 \times \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{3(1-x)} + 3 \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$.
Réponse 4. d

Exercice 2.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Les affirmations sont indépendantes.

1. On considère l'équation différentielle $(E)\quad y' - 2y = (x-3)\,\mathrm{e}^{x}$, où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 1 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^{x}$ est solution de l'équation différentielle (E).

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = (2x+1)\cos(x)$.

On intègre par parties $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Affirmation 2 :

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = -4\pi$$

3. On considère l'inéquation suivante sur $]7;+\infty[$:

$$\ln\left(2x^2 - 6x - 56\right) \geqslant \ln(4x-8)$$

Affirmation 3 :

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $[8;+\infty[$.

4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{5u_n + 3}$$

On admet que $u_n \neq 0$ pour tout entier naturel n.

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{2}{u_n}$.

Affirmation 4 :

La suite (v_n) est une suite arithmétique.

5. On lance 3 600 fois un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

Affirmation 5 :

La probabilité que le nombre d'apparitions du 6 soit strictement compris entre 450 et 750 est minorée par 0,97.

Corrigé

1. **Affirmation 1** :

   f est dérivable et, pour tout x réel : $f(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^x$

   donc, pour tout x réel : $f'(x) = 1\times \mathrm{e}^x + (x-2)\times \mathrm{e}^x = (x-1)\,\mathrm{e}^x$.

   Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) - 2f(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x - 2(x-2)\,\mathrm{e}^x$

   $= (-x+3)\,\mathrm{e}^x$

   $= -(x-3)\,\mathrm{e}^x$

   L'affirmation est **fausse**.

2. **Affirmation 2** :

   On pose, pour tout x réel, $v(x) = 2x+1$ et $u'(x) = \cos x$.

   On a alors, pour tout x réel : $v'(x) = 2$ et on peut choisir $u(x) = \sin x$.

   Par intégration par parties, on a : $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[(2x+1)\sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 2\sin x\,\mathrm{d}x$

   $= \Big((2\pi+1)\sin\pi - \sin 0\Big) - \Big[-2\cos x\Big]_0^\pi$

   $= 0 + 2\cos\pi - 2\cos 0$

   $= -4$

   L'affirmation est **fausse**.

3. **Affirmation 3** :

   - La fonction du second degré $x \longmapsto 2x^2-6x-56$ admet deux racines : -4 et 7.
     Le coefficient du terme de degré 2 est $a = 2$ donc cette fonction est strictement positive sur $]7;+\infty[$.
   - La fonction affine $x \longmapsto 4x-8$ est strictement positive sur $]2;+\infty[$.

   On peut résoudre l'inéquation sur l'intervalle $]7;+\infty[$, et on a :

   $\forall x \in]7;+\infty[$, $\ln\left(2x^2-6x-56\right) \geqslant \ln(4x-8) \iff 2x^2-6x-56 \geqslant 4x-8$ car la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

   $\iff 2x^2-10x-48 \geqslant 0$

   $\iff x^2-5x-24 \geqslant 0$ car $2>0$

   Le discriminant est : $\Delta = b^2-4ac = 121$, donc la fonction du second degré $x \longmapsto x^2-5x-24$ admet deux racines : -3 et 8.

   Le coefficient du terme de degré 2 est $a = 1$, donc cette fonction est positive sur $]-\infty;-3] \cup [8;+\infty[$.

   Sur $]7;+\infty[$, l'inéquation a pour ensemble de solutions l'intervalle $[8;+\infty[$.

   L'affirmation est **vraie**.

4. **Affirmation 4** :

   Soit n un entier naturel :

   $$v_{n+1} = \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{2}{\dfrac{3u_n}{5u_n+3}} = 2\times\frac{5u_n+3}{3u_n} = 2\times\left(\frac{5u_n}{3u_n}+\frac{3}{3u_n}\right) = 2\times\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{u_n}\right) = \frac{10}{3}+\frac{2}{u_n} = \frac{10}{3}+v_n.$$

   On reconnaît la relation de récurrence d'une suite arithmétique, de raison $r = \dfrac{10}{3}$.

   L'affirmation est **vraie**.

5. Affirmation 5 :

On considère l'expérience aléatoire « obtenir un 6 en lançant un dé équilibré à 6 face numéroté de 1 à 6 » a deux issues : le succès de probabilité $\frac{1}{6}$ et l'échec de probabilité $\frac{5}{6}$. Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli.

La variable aléatoire qui compte le nombre de succès (les apparitions du 6) quand on répète 3 600 fois cette épreuve suit la loi binomiale de paramètre $p = \frac{1}{6}$ et $n = 3\,600$.

On a alors $E(X) = \frac{1}{6} \times 3600 = 600$, et $V(X) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times 3600 = 500$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, pour tout $t > 0$, on a : $P\left(|X - 600| \geqslant t\right) \leqslant \frac{500}{t^2}$.

Or $P\left(450 < X < 750\right) = P\left(|X - 600| < 150\right) = 1 - P\left(|X - 600| \geqslant 150\right)$.

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev pour $t = 150$, on obtient donc :

$P\left(|X - 600| \geqslant 150\right) \leqslant \frac{500}{150^2}$

On en déduit que $P\left(450 < X < 750\right) \geqslant 1 - \frac{500}{150^2}$.

Or, $1 - \frac{500}{150^2} \approx 0,978$.

On peut donc conclure : $P\left(450 < X < 750\right) \geqslant 0,97$.

L'affirmation est **vraie**.

Exercice 3.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{(x^2)}$.

Affirmation 1 : f est concave sur $]-\infty; 0]$.

2. Un refuge spécialisé accueille 24 rapaces numérotés de 1 à 24. Le refuge travaille avec trois vétérinaires. Afin d'administrer un soin à tous les oiseaux, le directeur veut donc former trois groupes, numérotés de 1 à 3, constitués chacun de 8 rapaces.

Affirmation 2 : Le nombre de façons de répartir les rapaces dans les groupes 1 à 3 est :

$$\frac{24!}{(8!)^3}.$$

3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle :

$$y' = -y + 1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Affirmation 3 : La fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - 1$ vérifie

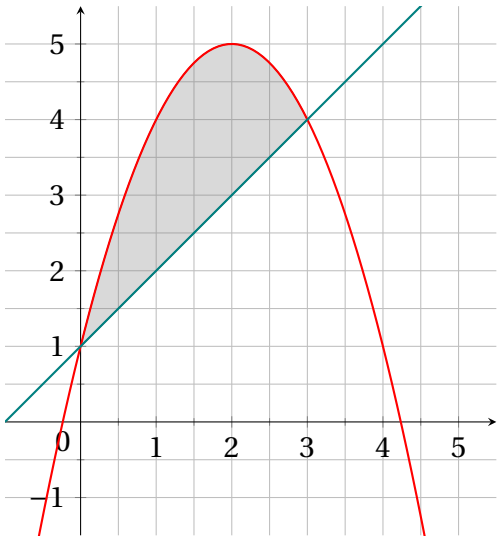
$$g' = -g.$$

4. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n}.$$

Affirmation 4 : La suite (u_n) n'admet pas de limite.

5. On a tracé ci-dessous la parabole d'équation $y = -x^2 + 4x + 1$ et la droite d'équation $y = x + 1$.



Affirmation 5 : L'aire du domaine grisé est égale à 6,5 unités d'aire.

Corrigé

1. Soit $g(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$

Avec $u(x) = x^2$ puis $u'(x) = 2x$, on a

$\left(\mathrm{e}^{(x^2)}\right)' = \left(\mathrm{e}^{u(x)}\right)' = \mathrm{e}^{u(x)} \times u'(x) = \mathrm{e}^{(x^2)} \times 2x.$

Donc $f'(x) = \mathrm{e}^{(x^2)} + x \times \mathrm{e}^{(x^2)} \times 2x$;

$f'(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}\left(1 + 2x^2\right)$.

Puis de même $f''(x) = 4x\,\mathrm{e}^{(x^2)} + \left(1 + 2x^2\right) \times 2x\,\mathrm{e}^{(x^2)} = 2x\left(2 + 1 + 2x^2\right)\mathrm{e}^{(x^2)}$.

Finalement $f''(x) = 2x\left(3 + 2x^2\right)\mathrm{e}^{(x^2)}$

Dans ce produit pour $x \in]-\infty;0[$, on a :

- $3 + 2x^2 > 0$;
- $\mathrm{e}^{(x^2)} > 0$
- $2x < 0$

Conclusion sur $]-\infty;0]$, $f''(x) < 0$: la fonction f est concave sur cet intervalle.

Affirmation 1 vraie

2.

- Dans le groupe 1 on peut former $\binom{24}{8}$ ensembles de 8 rapaces ;
- Dans le groupe 2 on peut former $\binom{16}{8}$ ensembles de 8 rapaces ;

- Dans le groupe 3 on peut former $\binom{8}{8}$ ensemble de 8 rapaces ;

Il y a donc $\binom{24}{8} \times \binom{16}{8} \times \binom{8}{8}$ façons différentes de répartir 8 rapaces dans ces 3 groupes.

Or $\binom{24}{8} \times \binom{16}{8} \times \binom{8}{8} = \dfrac{24!}{8! \times (24-8)!} \times \dfrac{16!}{8! \times (16-8)!} \times 1 = \dfrac{24!}{8! \times 16!} \times \dfrac{16!}{8! \times 8!} = \dfrac{24!}{(8!)^3}$.

Affirmation 2 vraie

3. f est solution de l'équation différentielle donc quel que soit $x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = -f(x) + 1 \quad (1)$.
D'autre part $g(x) = f(x) - 1$ montre que puisque f est dérivable sur g l'est aussi avec : $g'(x) = f'(x)$.
L'égalité (1) devient alors
$g'(x) = -f(x) - 1 = -(f(x) - 1) = -g(x)$
Conclusion : quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -g(x)$.

Affirmation 3 vraie

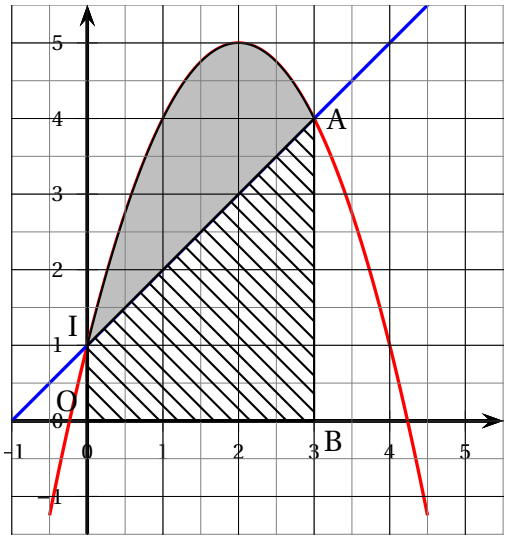
4. Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$.
En multipliant par $\dfrac{1}{n} > 0$, on a $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin(n)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

La suite converge vers zéro.

Affirmation 4 fausse

5.



L'aire du domaine grisé est égale à la différence de deux aires :

- l'aire de la surface limitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$ et la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto -x^2 + 4x + 1$.

La fonction f étant manifestement positive sur l'intervalle [0;3], cette aire est l'intégrale (en u. a.) $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^3 -x^2+4x+1)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3}+2x^2+x\right]_0^3 = -\frac{3^3}{3}+2\times 3^2+3-\left(-\frac{0^3}{3}+2\times 0^2+0\right) = -\frac{27}{3}+18+3 = 22-9 = 12$ (u.a.) **et**

- l'aire du trapèze rectangle OIAB soit $\frac{\text{OI}+\text{AB}}{2}\times \text{OB}$;

On a de façon évidente : OI = 1, AB = 4 et OB = 3, donc
$\mathscr{A}(\text{OIAB}) = \frac{1+4}{2}\times 3 = \frac{15}{2}$ (u.a)
Si $\mathscr{A}(G)$ est l'aire de la surface grisée alors
$\mathscr{A}(G) = 12-\frac{15}{2} = \frac{24-15}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$ (u.a.).

Affirmation 5 fausse

Remarque : on peut aussi dire que $\mathscr{A}(G)$ est la différence de l'intégrale de la fonction $f(x) = -x^2+4x+1$ et de l'intégrale de la fonction $g(x) = x+1$ sur l'intervalle [0 ; 3].
$\mathscr{A}(G) = \int_0^3 \left(-x^2+4x+1\right)\mathrm{d}x - \int_0^3 (x+1)\,\mathrm{d}x$, soit par linéarité de l'intégrale :
$\mathscr{A}(G) = \int_0^3 \left(-x^2+4x+1-(x+1)\right)\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(-x^2+4x+1-x-1)\right)\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(-x^2+3x\right)\mathrm{d}x = \int_0^3 x(3-x) : \mathrm{d}x.$
Il faut alors considérer cette fonction trinôme $x \longmapsto x(x-3)$ qui est négative sauf entre ses racines 0 et 3 sui est justement l'intervalle d'intégration.
Il faut alors rappeler que cette fonction polynôme trinôme est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur [0 ; 3], donc intégrale sur cet intervalle et affirmer que
$\mathscr{A}(G) = \int_0^3 \left(-x^2+3x\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = -\frac{3^3}{3}+3\times\frac{3^2}{2}-\frac{0^3}{3}-3\times\frac{0^2}{2} = -9+\frac{27}{2} = \frac{-18+27}{2} = \frac{9}{2} \neq \frac{13}{2}.$

Exercice 4.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre choix.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.
Les quatre questions sont indépendantes.

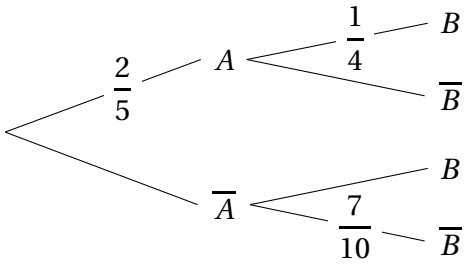
1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^5$$

Affirmation 1 : La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Une urne contient 32 jetons numérotés de 1 à 32 indiscernables au toucher.
On tire simultanément 5 jetons de cette urne.
On appelle tirage la liste non ordonnée des numéros des cinq jetons tirés.
Affirmation 2 : Le nombre de tirages possibles contenant au moins un multiple de 8 est égal à 103 096.

3. On considère l'arbre de probabilités ci-dessous.



Affirmation 3 : $P_B\left(\overline{A}\right) = \dfrac{9}{50}$.

4. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' + y = \mathrm{e}^{-x}\cos(x),$$

où y est une fonction de la variable x, dérivable sur $\mathbb{R}$.
Affirmation 4 : La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Affirmation 5 : Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions k définies sur $\mathbb{R}$ par

$$k(x) = C\,\mathrm{e}^{-x}\sin(x) \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

Corrigé

1. **Affirmation 1 : Fausse.**
Calculons la dérivée seconde de $f(x) = (-0,5x+3)^5$. (on rappelle que $(u^n)' = nu^{n-1}u'$)

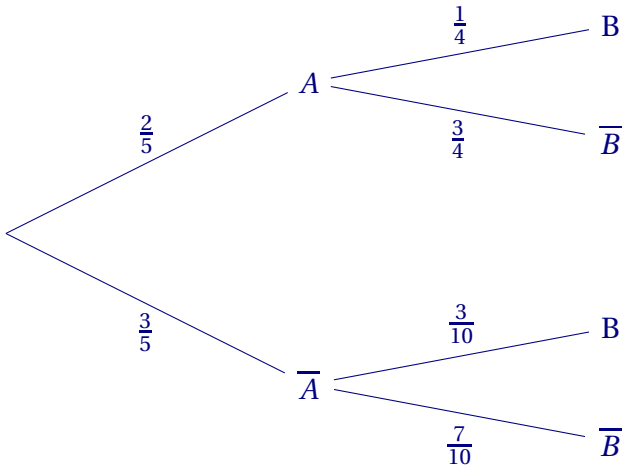
$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times (-0,5) \times (-0,5x+3)^4 = -2.5(-0,5x+3)^4 \\ f''(x) &= -2,5 \times 4 \times (-0,5) \times (-0,5x+3)^3 = 5(-0,5x+3)^3 \end{aligned}$$

Pour $x = 10$, on a $f''(10) = 5(-5+3)^3 = 5(-8) = -40 < 0$. La dérivée seconde n'est pas positive sur tout $\mathbb{R}$, la fonction n'est donc pas convexe sur $\mathbb{R}$.

2. **Affirmation 2 : Vraie.**
Il y a 4 multiples de 8 parmi les 32 jetons $\{8, 16, 24, 32\}$. Le nombre de tirages contenant au moins un multiple de 8 est le nombre total de tirages moins le nombre de tirages ne contenant aucun multiple de 8 (tirage parmi les 28 autres jetons).

$$\begin{array}{rcl} \text{Nombre total} & = & \binom{32}{5} = 201\,376 \\ \text{Sans multiple de 8} & = & \binom{28}{5} = 98\,280 \\ \text{Au moins un} & = & 201\,376 - 98\,280 = 103\,096 \end{array}$$

3. **Affirmation 3 : Fausse.** Complétons l'arbre fourni par l'énoncé.



On peut dans un premier temps calculer $p(B)$ par la formule de probabilités totales :

$$p(B) = p(A \cap B) + p\left(\overline{A} \cap B\right) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10} + \frac{9}{50} = \frac{14}{50}$$

On en déduit que :

$$p_B\left(\overline{A}\right) = \frac{p\left(\overline{A} \cap B\right)}{p(B)} = \frac{\frac{9}{50}}{\frac{14}{50}} = \frac{9}{14}$$

4. **Affirmation 4 : Vraie.**
Vérifions si $h(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$ vérifie $h'(x) + h(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$.

$$\begin{array}{rcl} h'(x) & = & -\mathrm{e}^{-x}\sin(x) + \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \\ h'(x) + h(x) & = & (-\mathrm{e}^{-x}\sin(x) + \mathrm{e}^{-x}\cos(x)) + \mathrm{e}^{-x}\sin(x) \\ h'(x) + h(x) & = & \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \end{array}$$

La fonction h est bien une solution particulière.

5. **Affirmation 5 : Fausse.**
Les solutions de (E) sont la somme de la solution particulière $h(x)$ et des solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $C\mathrm{e}^{-x}$. L'ensemble des solutions de (E) est donc constitué des fonctions de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$, ce qui est différent de l'expression proposée.

Exercice 5.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre choix. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Affirmation 1 : La fonction f admet pour limite 1 en $+\infty$.

2. On considère la suite (w_n) définie par $w_0=1$ et pour tout entier naturel n par :

$$w_{n+1}=w_n+2n+3$$

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n,

$$w_n=(n+1)^2$$

3. Soit p un nombre réel tel que $0<p<1$.
On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres 3 et p.
On note $P(X=1)$ la probabilité de l'évènement $(X=1)$.
Affirmation 3 : $P(X=1)=3p-6p^2+3p^3$.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ par :

$$v_n=\int_0^1 \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x$$

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$v_n=\frac{\mathrm{e}^n}{n}$$

5. On colorie en rouge, jaune ou noir chacune des 16 cases d'un quadrillage.
Affirmation 5 : On peut réaliser $\binom{16}{3}$ coloriages différents.

Corrigé

1. **Affirmation 1 : Vraie**
Pour tout x réel strictement supérieur à 1, on a : $x-1>0 \Longrightarrow (x-1)=\sqrt{(x-1)^2}$.
On en déduit : $\forall x\in]1;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}}$

$$=\sqrt{\frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}}=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt{\frac{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}}=\sqrt{\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}}$$

Par limites usuelles, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Par limite de la somme on en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1$.

Par limite du quotient, on a ensuite : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$.

Et enfin, par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}}=\lim\limits_{y\to 1}\sqrt{y}=\sqrt{1}=1$.

La fonction f admet bien 1 pour limite en $+\infty$.

2. Affirmation 2 : Vraie

Méthode 1 : (la plus simple)

Soit (u_n) la suite définie pour tout naturel par $u_n=(n+1)^2$

- On a $u_0=1^2=1$;

D'autre part $u_{n+1}=\left[\overbrace{(n+1)}^{a}+\overbrace{1}^{b}\right]^2$ et on développe cette identité :

$u_{n+1}=(n+1)^2+2\times(n+1)\times 1+1=(n+1)^2+2n+2+1$ et comme $1+2=3$, on obtient finalement : $u_{n+1}=u_n+2n+3$: conclusion les deux suites (w_n) et (u_n) ont le même premier terme (1) et vérifient la même relation de récurrence : elles sont donc égales.

Quel que soit $n\in\mathbb{N}$, $\quad w_n=u_n=(n+1)^2$.

Méthode 2 : méthode par récurrence classique

Pour tout entier naturel n, posons P_n l'affirmation : « $w_n=(n+1)^2$ ».

Démontrons par récurrence que les affirmations P_n sont toutes vraies.

- **Initialisation :** On a d'une part : $\quad w_0=1$;
  et d'autre part : $\quad (0+1)^2=1$.
  On constate donc que l'affirmation P_0 est vraie.
- **Hérédité :** Soit n un entier naturel. On suppose que l'affirmation P_n est vraie.
  P_n est vraie $\Longrightarrow w_n=(n+1)^2$
  $\Longrightarrow w_n+2n+3=(n+1)^2+2n+3$
  $\Longrightarrow w_{n+1}=(n+1)^2+2n+3$ en utilisant la relation de récurrence de (w_n)
  $\Longrightarrow w_{n+1}=n^2+2n+1+2n+3$
  $\Longrightarrow w_{n+1}=n^2+4n+4$
  $\Longrightarrow w_{n+1}=(n+2)^2$
  $\Longrightarrow P_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :** On a montré que l'affirmation P_0 est vraie, et que pour un n entier naturel, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.
  En vertu du principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel n, l'affirmation est vraie, et donc on a établi une expression explicite du terme général de la suite (w_n) :
  $$\forall n\in\mathbb{N},\quad w_n=(n+1)^2$$

Méthode 3 : moins classique.

On a pour tout naturel n, $w_{n+1} = w_n + 2n + 3 \iff w_{n+1} - w_n = 2n + 3$ qui est une forme linéaire en n. On peut donc chercher w_n comme un trinôme du second degré en n, c'est-dire supposer que :

(1) $w_n = an^2 + bn + c$, avec a, b c réels donc :

(2) $w_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$ et par différence ligne (2) moins ligne (1)

$w_{n+1} - w_n = a(2n+1) + b$ soit $w_{n+1} - w_n = 2an + a + b$. Or on a vu que

$w_{n+1} - w_n = 2n + 3$. Donc par identification :

$$\begin{cases} 2an & = & 2n \\ a+b & = & 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & 2 \end{cases}$$

Conclusion $w_n = 1n^2 + 2n + c$; or $w_0 = 1 \iff 0 + 0 + c = 1 \iff c = 1$ et enfin :

$$w_n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

3. **Affirmation 3 : Vraie**

Soit p un nombre réel tel que $0 < p < 1$, et X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres 3 et p.

On a, par propriété : $P(X = 1) = \binom{3}{1} \times p^1 \times (1-p)^{3-1}$

$$\begin{aligned} &= 3 \times p \times (1-p)^2 \\ &= 3p(1 - 2p + p^2) \\ &= 3p - 6p^2 + 3p^3. \end{aligned}$$

La probabilité de l'évènement $(X = 1)$ est bien : $P(X = 1) = 3p - 6p^2 + 3p^3$.

4. **Affirmation 4 : Fausse**

Soit n un entier naturel n non nul.

Une primitive sur $[0;1]$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{nx}$ est : $x \longmapsto \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{nx}$.

On a donc : $v_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n}\mathrm{e}^{nx}\right]_0^1 = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{n\times 1} - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{n\times 0} = \frac{\mathrm{e}^n - 1}{n} \neq \frac{\mathrm{e}^n}{n}$.

5. **Affirmation 5 : Fausse**

Chacune des 16 cases est coloriée, donc à condition de numéroter les 16 cases, en associant à chaque case la couleur utilisée, cela revient à associer aux entiers de 1 à 16 une couleur.

Chaque coloriage est ainsi assimilable à une 16-liste d'éléments choisis dans l'ensemble des couleurs, qui est de cardinal 3 (puisque trois couleurs sont à notre disposition). Les éléments peuvent se répéter, puisque nous devons colorier 16 cases avec trois couleurs, donc on devra utiliser la même couleur plusieurs fois.

Le nombre de k-listes d'éléments d'un ensemble de cardinal n est : n^k.

Il y a donc $3^{16} = 43\,046\,721$ coloriages différents possibles.

$\binom{16}{3} = 560 \neq 43\,046\,721$. Ce nombre pourrait correspondre au nombres de façons qu'il y a de choisir 3 cases parmi les 16 cases du quadrillage.

Remarque : On peut aussi raisonner en disant qu'on a 3 choix de couleur pour la première case, à multiplier par 3 choix pour la deuxième case, et ainsi de suite, on retrouve bien 3^{16} choix possibles pour colorier nos 16 cases.

Exercice 6.

*Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse**, en justifiant la réponse.*
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - x^2.$$

Affirmation 1 : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad -2y' + 3y = \sin x + 8\cos x.$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\cos x - \sin x.$$

Affirmation 2 : La fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(3x+1) + 8.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 25$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = g(u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est strictement positive.
Affirmation 3 : La suite (u_n) est décroissante.

4. On considère une fonction affine h définie sur $\mathbb{R}$.
On note k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = x^4 + x^2 + h(x)$.
Affirmation 4 : La fonction k est convexe sur $\mathbb{R}$.

5. Une anagramme d'un mot est le résultat d'une permutation des lettres de ce mot.
Exemple : le mot BAC est possède 6 anagrammes : BAC, BCA, ABC, ACB, CAB, CBA.
Affirmation 5 : Le mot EULER possède 120 anagrammes.

Corrigé

1. Puisque $x > 0$, on peut écrire $f(x) = x^2\left(\dfrac{\ln(x)}{x^2} - 1\right)$.

On sait (croissances comparées) que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$, donc que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} - 1 = -1$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, on obtient finalement par produit de limites

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(\dfrac{\ln(x)}{x^2} - 1\right) = -\infty$.

L'affirmation 1 est vraie.

2. $f(x) = 2\cos(x) - \sin(x)$, donc : $f'(x) = -2\sin(x) - \cos(x)$. Donc :

$$\begin{aligned} -2f'(x) + 3f(x) &= -2(-2\sin(x) - \cos(x)) + 3(2\cos(x) - \sin(x)) \\ &= 4\sin(x) + 2\cos(x) + 6\cos(x) - 3\sin(x) \\ &= \sin(x) + 8\cos(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction f est solution de l'équation différentielle $-2y' + 3y = \sin(x) + 8\cos(x)$.

L'affirmation 2 est vraie.

3. On a $u_0 = 25$ et donc $u_1 = \ln(3 \times 25 + 1) + 8 \approx 12,3 < 25$.

On peut donc supposer que la suite est décroissante ce que l'on démontre par récurrence : soit (P_n) : $u_{n+1} < u_n$

Initialisation : on a vu que $u_1 < u_0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_{n+1} < u_n$: on a succésivement :

$$\begin{aligned} u_{n+1} < u_n &\iff 3u_{n+1} < 3u_n \\ &\iff 3u_{n+1} + 1 < 3u_n + 1 \\ &\iff \ln(3u_{n+1} + 1) < \ln(3u_n + 1) \text{ par croissance de la fonction ln} \\ &\iff \ln(3u_{n+1} + 1) + 8 < \ln(3u_n + 1) + 8 \\ &\iff u_{n+2} < u_{n+1} \end{aligned}$$

La relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence quel que soit $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} < u_n$: ceci montre que la suite (u_n) est décroissante.

L'affirmation 3 est vraie.

4. Une application affine est de la forme $h(x) = ax + b$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Donc $k(x) = x^4 + x^2 + ax + b$; k est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle on a successivement :

$k'(x) = 4x^3 + 2x + a$, puis

$k''(x) = 12x^2 + 2$, comme un carré est supérieur ou égal à zéro, il en résulte que $k''(x) \geqslant 2 > 0$.

Sur $\mathbb{R}$, la dérivée seconde est supérieure à zéro : la fonction k est convexe sur $\mathbb{R}$.

L'affirmation 4 est vraie.

5. Avec 5 lettres différentes le nombre d'anagrammes est égal à $5! = 120$.

Comme EULER possède deux lettres identiques le nombre d'anagrammes est égal à $\dfrac{5!}{2!} = \dfrac{120}{2} = 60$.

L'affirmation 5 est fausse.

Exercice 7.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x)$.

Affirmation 1 :

$$\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$$

2. Soient n et k deux entiers naturels non nuls tels que $k \leqslant n$.

Affirmation 2 :

$$n \times \binom{n-1}{k-1} = k \times \binom{n}{k}$$

3. Pour les trois affirmations suivantes, on considère que l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

Soit d la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= t+1 \\ y &= 2t+1 \\ z &= -t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$

Soit d' la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= 2t'-1 \\ y &= -t'+2 \\ z &= t'+1 \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$

Soit P le plan d'équation cartésienne : $2x+y-2z+18=0$.

Soit A le point de coordonnées $(-1\,;\,-3\,;\,2)$ et B le point de coordonnées $(-5\,;\,-5\,;\,6)$.

On appelle plan médiateur du segment [AB] le plan passant par le milieu du segment [AB] et orthogonal à la droite (AB).

Affirmation 3 : Le point A appartient à la droite d.

Affirmation 4 : Les droites d et d' sont sécantes.

Affirmation 5 : Le plan P est le plan médiateur du segment [AB].

Corrigé

1. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x)$.

Affirmation 1 : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$

On calcule $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x$ en faisant une intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{cases} u'(x) = x & \Longrightarrow \quad u(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ v(x) = \ln(x) & \Longrightarrow \quad v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\times\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\times\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\times\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} = \left[\frac{\mathrm{e}^2}{2}\times\ln(\mathrm{e}) - \frac{1^2}{2}\times\ln(1)\right] - \left[\frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{1^2}{4}\right] \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - 0 - \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4} \end{aligned}$$

Affirmation 1 vraie

2. Soient n et k deux entiers naturels non nuls tels que $k \leqslant n$.

Affirmation 2 : $n \times \binom{n-1}{k-1} = k \times \binom{n}{k}$

On va utiliser les propriétés : $\dfrac{k}{k!} = \dfrac{1}{(k-1)!}$ et $n! = n\times(n-1)!$.

- $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\times(n-k)!}$ donc

  $k \times \binom{n}{k} = k \times \dfrac{n!}{k!\times(n-k)!} = \dfrac{k\times n!}{k!\times(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!\times(n-k)!}$
- $\binom{n-1}{k-1} = \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\times((n-1)-(k-1))!} = \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\times(n-1-k+1)!}$

  $= \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\times(n-k)!}$ donc

  $n \times \binom{n-1}{k-1} = n \times \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\times(n-k)!} = \dfrac{n\times(n-1)!}{(k-1)!\times(n-k)!} == \dfrac{n!}{(k-1)!\times(n-k)!}$

Affirmation 2 vraie

3. Pour les trois affirmations suivantes, on considère que l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\right)$.

Soit d la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1 \\ z = -t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$

Soit d' la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2t'-1 \\ y = -t'+2 \\ z = t'+1 \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$

Soit P le plan d'équation cartésienne : $2x+y-2z+18=0$.

Soit A le point de coordonnées $(-1\,;\,-3\,;\,2)$ et B le point de coordonnées $(-5\,;\,-5\,;\,6)$.

On appelle plan médiateur du segment [AB] le plan passant par le milieu du segment [AB] et orthogonal à la droite (AB).

Affirmation 3 : Le point A appartient à la droite d.

$A \in d$ si et seulement s'il existe un réel t tel que : $\begin{cases} -1 = t+1 \\ -3 = 2t+1 \\ 2 = -t \end{cases}$

Le réel $t = -2$ vérifie les trois égalités donc le point A appartient à la droite d.

Affirmation 3 vraie

Affirmation 4 : Les droites d et d' sont sécantes.

d et d' sont sécantes s'il existe un couple $(t\,,\,t')$ tel que $\begin{cases} t+1 = 2t'-1 \\ 2t+1 = -t'+2 \\ -t = t'+1 \end{cases}$

$$\begin{cases} t+1 = 2t'-1 \\ 2t+1 = -t'+2 \\ -t = t'+1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2t'-2 \\ 2(2t'-2)+1 = -t'+2 \\ -(2t'-2) = t'+1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 2t'-2 \\ 4t'-4+1 = -t'+2 \\ -2t'+2 = t'+1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2t'-2 \\ 5t' = 5 \\ 1 = 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2t'-2 \\ t' = 1 \\ \frac{1}{3} = t' \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc les droites d et d' ne sont pas sécantes.

Affirmation 4 fausse

Affirmation 5 : Le plan P est le plan médiateur du segment [AB].

Le plan médiateur du segment [AB] est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,,\,y\,,\,z)$ tels que MA = MB, ce qui équivaut à $MA^2 = MB^2$.

$$\begin{aligned} MA^2 &= (x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 4z + 4 \\ &= x^2 + 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z + 14 \\ MB^2 &= (x+5)^2 + (y+5)^2 + (z-6)^2 \\ &= x^2 + 10x + 25 + y^2 + 10y + 25 + z^2 - 12z + 36 \\ &= x^2 + 10x + y^2 + 10y + z^2 - 12z + 86 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MA^2 = MB^2 &\iff x^2 + 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z + 14 = x^2 + 10x + y^2 + 10y + z^2 - 12z + 86 \\ &\iff -8x - 4y + 8z - 72 = 0 \iff -4\left(2x + y - 2z + 18\right) = 0 \\ &\iff 2x + y - 2z + 18 = 0 \end{aligned}$$

On retrouve l'équation du plan P donc P est le plan médiateur du segment [AB].

Affirmation 5 vraie

Exercice 8.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = \frac{1}{2}y + 4.$$

Affirmation 1 : Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 8, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

2. Dans une classe de terminale, il y a 18 filles et 14 garçons.
On constitue une équipe de volley-ball en choisissant au hasard 3 filles et 3 garçons.

Affirmation 2 : Il y a 297 024 possibilités pour former une telle équipe.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{n}{2 + \cos(n)}.$$

Affirmation 3 : La suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

4. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points $\mathrm{A}(1\,;\,1\,;\,2)$, $\mathrm{B}(5\,;\,-1\,;\,8)$ et $\mathrm{C}(2\,;\,1\,;\,3)$.
Affirmation 4 : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 10$ et une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est 30°.

5. On considère une fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty]$ dont la dérivée seconde est définie sur $]0\,;\,+\infty]$ par :

$$h''(x) = x\ln x - 3x.$$

Affirmation 5 : La fonction h est convexe sur $\left[\mathrm{e}^3\,;\,+\infty\right[$.

Corrigé

1. **Affirmation 1 : Vraie.**
On reconnaît une forme présente dans le cours : les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$, avec a et b réels non nuls ont pour solution les fonctions de la forme : $x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où k est un réel quelconque.
Ici, on applique cette propriété avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 4$, ce qui donne bien l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2}y + 4$, ayant pour solution les fonction de la forme : $x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - \dfrac{4}{\frac{1}{2}}$ soit $x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 8$, avec $k \in \mathbb{R}$.

2. **Affirmation 2 : Vraie.**

Une équipe de volley-ball telle que décrite est constituée d'un couple de deux éléments. Le premier élément de ce couple est un ensemble de 3 élèves filles distinctes (donc pas de répétition), qui n'ont pas de rôle particulier, donc on parle d'un ensemble, et pas d'une liste ou d'un triplet (donc pas de notion d'ordre) : on va utiliser des combinaisons.

3 filles choisies parmi les 18 de la classe : il y a $\binom{18}{3} = 816$ façons de choisir les trois filles qui constitueront ce premier ensemble.

Le deuxième élément du couple sera un ensemble de trois élèves garçons, choisis avec les même principes.

3 garçons choisis parmi les 14 de la classe : il y a $\binom{14}{3} = 364$ façons de choisir les trois garçons qui constitueront ce second ensemble.

Finalement, par principe multiplicatif, une équipe est un ensemble de trois filles choisi parmi les 816 ensembles possibles, associé à un ensemble de garçons parmi les 364 ensembles possibles : il y a donc $816 \times 364 = 297\,024$ équipes différentes possibles.

3. **Affirmation 3 : Vraie.**

Pour tout n entier naturel, on a :

$$\begin{aligned}
-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1 &\implies 1 \leqslant 2 + \cos(n) \leqslant 3 \\
&\implies \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2+\cos(n)} \leqslant \frac{1}{1} \quad \text{fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
&\implies \frac{n}{3} \leqslant \frac{n}{2+\cos(n)} \quad \text{car } n \geqslant 0 \\
&\implies \frac{n}{3} \leqslant v_n
\end{aligned}$$

Par limite du quotient, on a immédiatement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{3} = +\infty$,

donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, ce qui est l'affirmation 3.

4. **Affirmation 4 : Fausse.**

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, donc, comme le repère est orthonormé, on a :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + (-2) \times 0 + 6 \times 1 = 10$, la première partie de l'affirmation est donc vraie.

Cependant, on peut aussi calculer les normes et en déduire le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$, défini par les deux vecteurs.

$AB = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{16+4+36} = \sqrt{56} = \sqrt{4 \times 14} = 2\sqrt{14}$.

$AC = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$.

On a donc, avec la définition trigonométrique du produit scalaire :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 2\sqrt{14} \times \sqrt{2} \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 4\sqrt{7}\cos\left(\widehat{BAC}\right)$

En égalant ces deux expressions du produit scalaire, on déduit :

$10 = 4\sqrt{7}\cos\left(\widehat{BAC}\right)$ qui équivaut à : $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{10}{4\sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.

Il se trouve que le cosinus de 30° est connu, il vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et est donc différent de celui trouvé ici : l'angle ne mesure dont pas 30°.

Remarque : une valeur approchée d'une mesure de l'angle peut être obtenue à la calculatrice :
$\widehat{\text{BAC}} = \arccos\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{14}\right) \approx 19°$.

5. **Affirmation 5 : Vraie.**
En effet, pour tout x réel strictement positif, on a : $h''(x) = x\ln(x) - 3x = x\big(\ln(x) - 3\big)$
x étant strictement positif, le signe de $h''(x)$ est donc le signe de $\ln(x) - 3$.
$x \in \left[\,\mathrm{e}^3\,;\,+\infty\right[\iff \mathrm{e}^3 \leqslant x$
$\iff \ln\left(\mathrm{e}^3\right) \leqslant \ln(x)$ car ln est croissante sur $\mathbb{R}*+$
$\iff 3 \leqslant \ln(x)$
$\iff 0 \leqslant \ln(x) - 3$
$\iff 0 \leqslant h''(x)$
Sur l'intervalle $\left[\,\mathrm{e}^3\,;\,+\infty\right[$, la dérivée seconde de h est donc à valeurs positives, donc la dérivée première de h est croissante, et donc h elle-même est bien convexe sur cet intervalle.

Exercice 9.

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.

Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.

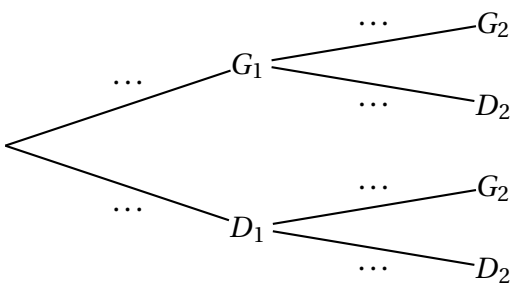
Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de $0,2$.
De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.
On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :

- G_n : « Léa gagne la n-ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n-ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n.
On a donc $g_1 = 0,5$.

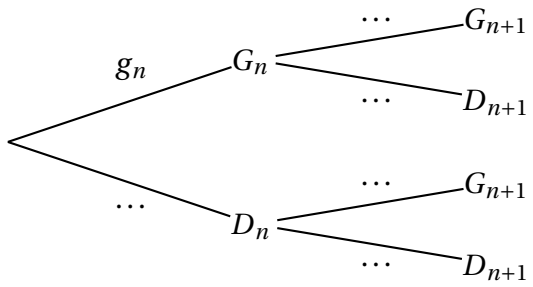
1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $p_{G_1}(D_2)$?
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2.

4. Soit n un entier naturel non nul.

a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.



b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2.$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0,4$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
On précisera son premier terme et sa raison.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$$

6. Étudier les variations de la suite (g_n).

7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n).
Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leqslant 0,001$.

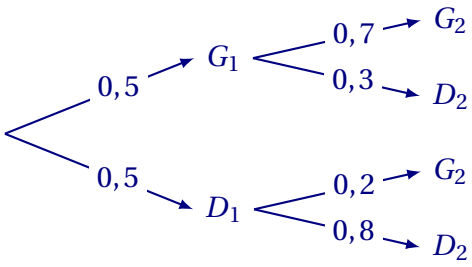
9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0,4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1  def seuil(e) :
2      g = 0.5
3      n = 1
4      while . . . :
5          g = 0.5 * g + 0.2
6          n = . . .
7      return (n)
```

Corrigé

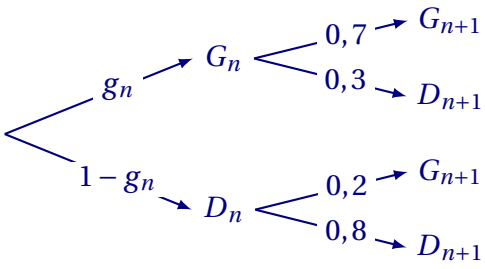
1. D'après l'énoncé, si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70% des cas, elle perd donc la suivante dans 30 %.
On a donc $P_{G_1}(D_2) = 0,3$

2. On a l'arbre suivant :



3. Les évènements G_1 et D_1 partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :
$$\begin{aligned} g_2 = P(G_2) &= P(G_1 \cap G_2) + P(D_1 \cap G_2) \\ &= 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2 \\ &= 0,35 + 0,1 \\ &= 0,45 \end{aligned}$$

4. **a.** On a l'arbre suivant :



b. Pour tout entier naturel n non nul, les évènements G_n et D_n déterminent une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :
$$\begin{aligned} g_{n+1} = P(G_{n+1}) &= P(G_n \cap G_{n+1}) + P(D_n \cap G_{n+1}) \\ &= g_n \times 0,7 + (1-g_n) \times 0,2 \\ &= 0,7g_n + 0,2 - 0,2g_n \\ &= 0,5g_n + 0,2 \end{aligned}$$
On arrive bien au résultat annoncé.

5. **a.** Soit n un entier non nul.
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= g_{n+1} - 0,4 \quad \text{par définition de la suite } (v_n) \\ &= 0,5g_n + 0,2 - 0,4 \quad \text{par définition de la suite } (g_n) \\ &= 0,5(v_n + 0,4) - 0,2 \quad \text{car } v_n = g_n - 0,4 \iff g_n = v_n + 0,4 \\ &= 0,5v_n + 0,2 - 0,2 \\ &= 0,5v_n \end{aligned}$$
La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = g_1 - 0,4 = 0,5 - 0,4 = 0,1$

b. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,1 \times 0,5^{n-1}$

Or pour tout entier naturel n non nul $\quad g_n = v_n + 0,4 \quad$ donc $\quad g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$

6. Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} g_{n+1} - g_n &= 0,1 \times 0,5^n + 0,4 - 0,1 \times 0,5^{n-1} - 0,4 \\ &= 0,1 \times 0,5^{n-1} \times (0,5 - 1) \\ &= 0,1 \times 0,5^{n-1} \times (-0,5) \\ &= -0,1 \times 0,5^n \end{aligned}$$

or $0,5 > 0$ et $0,1 > 0$ donc $g_{n+1} - g_n < 0 \iff g_{n+1} < g_n$

La suite (g_n) est strictement décroissante.

7. $-1 < 0,5 < 1$, donc on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,5)^n = 0$, donc, par limite du produit et de la somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 = 0,4.$

Sur le long terme, Léa gagnera son match dans 40 % des cas.

8. Déterminons les valeurs de n pour lesquels $g_n - 0,4 \leqslant 0,001$

$$\begin{aligned} g_n - 0,4 \leqslant 0,001 &\iff 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 - 0,4 \leqslant 0,001 \\ &\iff 0,1 \times 0,5^{n-1} \leqslant 0,001 \\ &\iff 0,5^{n-1} \leqslant 0,01 \quad \text{car } 0,1 > 0 \\ &\iff \ln\left(0,5^{n-1}\right) \leqslant \ln(0,01) \quad \text{par croissance de la fonction ln sur } \mathbb{R}^{*+} \\ &\iff (n-1)\ln(0,5) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff (n-1) \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} \quad \text{car } \ln(0,5) < 0 \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} + 1 \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} + 1 = \dfrac{-\ln(100)}{-\ln(2)} + 1 = \dfrac{\ln(100) + \ln(2)}{\ln(2)} = \dfrac{\ln(200)}{\ln(2)} \approx 7,64$ donc, n étant un entier, la plus petite valeur de n tel que $g_n - 0,4 \leqslant 0,001$ est 8.

9. Le programme complété est :

```
def seuil(e):
  g = 0.5
  n = 1
  while g > 0.4 + e :
    g = 0.5 * g + 0.2
    n = n + 1
  return(n)
```

Exercice 10.

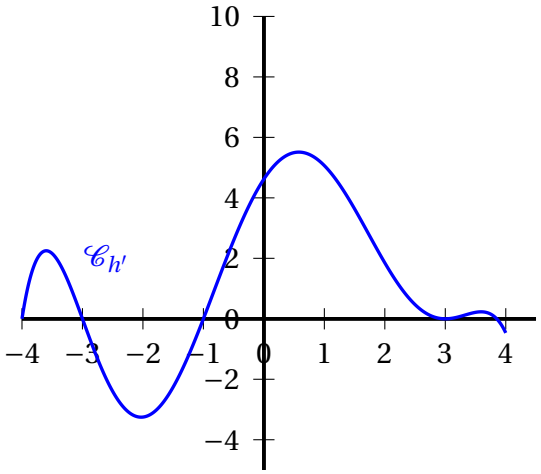
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n et vérifiant la relation suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ \frac{1}{2} < u_n \leqslant \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1}.$$

Affirmation 1 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

2. Soit h une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [-4 ; 4].
La représentation graphique $\mathscr{C}_{h'}$ de sa fonction dérivée h' est donnée ci-dessous.



Affirmation 2 : La fonction h est convexe sur $[-1\,;\,3]$.

3. Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).
Affirmation 3 : Il existe 20 634 codes qui contiennent au moins un 0.'

4. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln x$.
Affirmation 4 : La fonction f est une solution sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle

$$xy' - y = x.$$

Corrigé

1. **Affirmation 1 : VRAIE.**
En effet, pour tout n entier naturel non nul, on a :

$$\frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} = \frac{n^2\left(3+\dfrac{4}{n}+\dfrac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(6+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{3+\dfrac{4}{n}+\dfrac{7}{n^2}}{6+\dfrac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = 0$$

donc par limite de la somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{4}{n}+\dfrac{7}{n^2}=3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 6+\dfrac{1}{n^2}=6$

et donc par limite du quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3+\dfrac{4}{n}+\dfrac{7}{n^2}}{6+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

D'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

La suite (u_n) est donc encadrée par deux suites ayant pour limite $\dfrac{1}{2}$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{1}{2}$.

Remarque : il ne faut pas se laisser déstabiliser par le fait que tous les termes de la suite sont **strictement** supérieurs à $\dfrac{1}{2}$, quand on « passe à la limite », les inégalités deviennent large. Par exemple, la suite de terme général $\dfrac{1}{n}$ a des termes tous strictement plus grands que 0, et pourtant, sa limite est 0.

2. **Affirmation 2 : FAUSSE.**

   Sur $[-1\ ;\ 3]$, la fonction dérivée h' n'est pas croissante, la fonction h n'est donc pas convexe sur $[-1\ ;\ 3]$.

3. **Affirmation 3 : VRAIE.**

   Il y a $10\times10\times10\times10\times3\times2=60\,000$ codes possibles. (10 valeurs possibles pour chacun des chiffres et 3 valeurs possibles pour la première lettre et deux valeurs possible pour la deuxième car elles doivent être distinctes.)

   Déterminons le nombre de code ne contenant pas de 0 :

   Il y a $9\times9\times9\times9\times3\times2=39\,366$ codes ne contenant pas de 0. (9 valeurs possibles pour chacun des chiffres et 3 valeurs possibles pour la première lettre et deux valeurs possible pour la deuxième car elles doivent être distinctes.)

   Il y a donc $60\,000-39\,366=20\,634$ codes contenant au moins un zéro.

4. **Affirmation 4 : VRAIE.**

   f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout réel x strictement positif en dérivant ce produit on a :

   $f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\dfrac{1}{x}=\ln(x)+1$, donc

   $xf'(x)-f(x)=x(\ln(x)+1)-x\ln(x)=x\ln(x)+x-x\ln(x)=x$.

   Conclusion : f est bien solution sur $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle $xy'-y=x$.