Annales baccalauréat spécialité
Suites

Corrigés :

Exercice 1. Amérique du Sud 13 novembre 2026 - Exercice 2

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = \ln\left(3 + \mathrm{e}^{u_n}\right) - a$$

où a est un entier.
Dans la partie A on étudiera le cas $a = 0$ et dans la partie B le cas $a = 1$.
On admet que la suite (u_n) ainsi construite est bien définie.

Partie A : cas $a = 0$

Dans cette partie, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \ln\left(3 + \mathrm{e}^{u_n}\right)$$

1. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$.

a. Déterminer la valeur de v_0.

b. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 3.

c. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \ln(1 + 3n)$$

b. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B : cas $a = 1$

La suite (u_n) est ici définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = \ln\left(3 + \mathrm{e}^{u_n}\right) - 1$$

1. Calculer u_1 et montrer que $u_2 = \ln\left(3 + \dfrac{4}{\mathrm{e}}\right) - 1$.

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = \ln\left(3 + \mathrm{e}^{x}\right) - 1.$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.
Dans la suite de l'exercice on remarquera que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

3. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
4. On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

   Montrer que $\ell = \ln\left(\dfrac{3}{e-1}\right)$.
5. Le script en langage Python ci-dessous est le script d'une fonction seuil qui prend en entrée un nombre réel d strictement positif et qui renvoie en sortie le premier indice n tel que :

$$u_n \geqslant \ell - d$$

```
L1  from math import *
L2  def seuil (d) :
L3      N = 0
L4      U = 0
L5      L = log(3/(exp(1)-1))
L6  ..............
L7          U = log(3+exp(U))-1
L8          N = N+1
L9      return N
```

On rappelle que depuis la bibliothèque math en langage Python la fonction ln est notée log.

Parmi les quatre propositions ci-dessous, dire sans justification, laquelle doit être choisie à la ligne 6 du script afin que la fonction `seuil 1` retourne le résultat attendu.

Proposition 1 : « while U <= L + d : »

Proposition 2 : « while U > L + d : »

Proposition 3 : « while U < L - d : »

Proposition 4 : « while U >= L - d : »

Exercice 2. Métropole 8 septembre 2026 - Exercice 2

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]-3\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{x+3}.$$

On admet que f est dérivable sur $]-3\,;\,+\infty[$.

1. Vérifier, en détaillant les calculs, que pour tout réel x de $]-3\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{6}{(x+3)^2}$.

   En déduire que f est croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier n, on a : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
3. En déduire que (u_n) est convergente.

Partie B

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$.
On note (v_n) et (w_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n} \quad et \quad w_n = v_n + 1.$$

1. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + \frac{1}{2}$.

2. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera les paramètres.

3. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

5. **a.** Recopier et compléter le script suivant de telle sorte que la fonction seuil() renvoie le plus petit entier n tel que u_n soit inférieur ou égal à 10^{-3}.

```
1  def seuil():
2    n = 0
3    u = 1
4    while ...:
5      n = n + 1
6      u = ...
7    return ...
```

b. Quelle est la valeur renvoyée par la fonction `seuil()` ?

Exercice 3. Polynésie 17 juin 2026 - Exercice 2

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout $x \in [4;10]$ par $f(x) = \ln(8x^3 - 1)$.
On admet que la fonction f est dérivable sur $[4;10]$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Montrer pour tout $x \in [4;10]$, on a :

$$f'(x) = \frac{24x^2}{(2x-1)(4x^2+2x+1)}.$$

2. **a.** En déduire que f est croissante sur $[4;10]$.

b. Montrer que, pour tout $x \in [4;10]$, on a :

$$4 \leqslant f(x) \leqslant 10.$$

3. On définit la fonction g définie pour tout $x \in [4;10]$ par $g(x) = f(x) - x$.
On admet que g est strictement décroissante sur son ensemble de définition.

a. Montrer que, sur l'intervalle $[4;10]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

b. Déterminer un encadrement à 10^{-3} près de α.

Partie B

On admet qu'on peut définir la suite (u_n) par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction étudiée à la partie A.

1. Donner une valeur approchée de u_1 à 10^{-1} près.

2. **a.** Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. Montrer que la suite (u_n) converge vers le nombre α, défini dans la partie A.

Partie C

Dans cette partie, on admet que $8,4 \leqslant \alpha \leqslant 8,5$.
On a créé, en langage Python, la fonction `alpha` suivante.
On précise qu'en langage Python, l'instruction `log` correspond à ln.

```
def f(x) :
    return log(8*x**3 -
       1)

def alpha(a):
    n = 0
    u = 5
    while u < a:
        u = f(u)
        n = n + 1
    return n
```

1. On admet que `alpha(8.499)` renvoie la valeur 11.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Un utilisateur exécute `alpha(8.6)`.
Expliquer pourquoi aucune valeur n'est alors renvoyée.

Exercice 4. Polynésie 16 juin 2026 - Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(3x^2 + 1)$$

On admet que la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

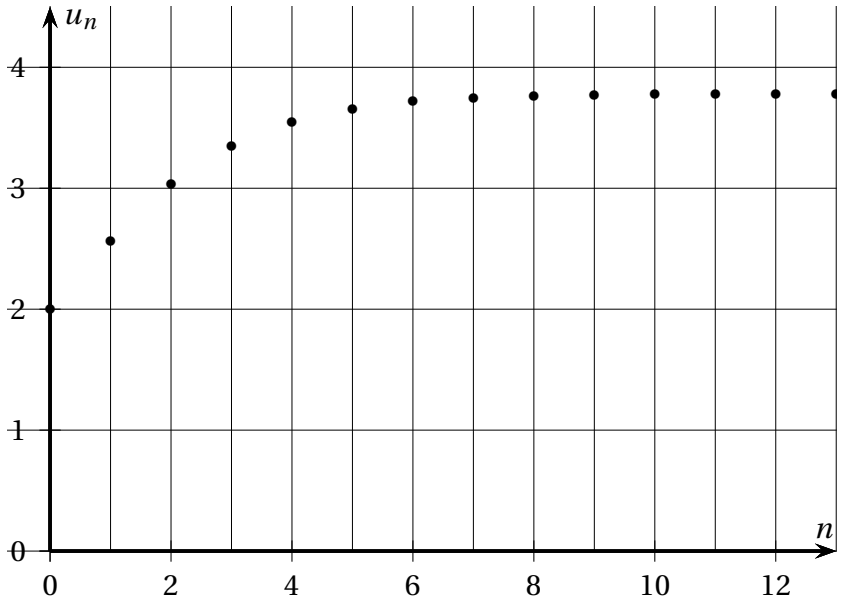
Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier } n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \ln\left(3u_n^2 + 1\right).$$

1. Calculer u_1.

2. La suite (u_n) est représentée ci-dessous. Émettre des conjectures sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).



3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Partie B

On note ℓ la limite de la suite (u_n).
Le but de cette partie est de trouver une valeur approchée de la limite ℓ.
On considère la fonction g définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(3x^2+1) - x.$$

1. On note g' la fonction dérivée de la fonction g.
Démontrer que pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{-3x^2+6x-1}{3x^2+1}.$$

2. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur $[2\,;\,4]$.

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2\,;\,4]$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. Justifier que $\ell = \alpha$.

Exercice 5. Antilles-Guyane 16 juin 2026 - Exercice 2

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.
La notice du médicament indique que :

- le traitement doit durer au moins 7 h ;
- lorsque sa quantité, en mg, présente dans le sang est supérieure ou égale à 3 mg, il y a un risque de toxicité.

On s'intéresse à la quantité de médicament présente dans le sang au cours du temps sachant que le patient reçoit une première dose de 1 mg.
Deux protocoles sont étudiés dans les deux parties qui sont indépendantes.

Partie A : étude du premier protocole

Après l'injection de la première dose, une quantité supplémentaire de médicament est administrée régulièrement et de façon continue à un patient mis sous perfusion.
Dans cette partie, on modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient par une fonction q définie sur $[0\,;\,+\infty[$, où $q(t)$ désigne la quantité, en mg, de médicament présente dans le sang du patient, et t représente le temps, en heure, écoulé depuis l'injection initiale. On a ainsi $q(0) = 1$.
On admet que :

- la fonction q est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note q' sa fonction dérivée ;
- la fonction q est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E) :

$$y' = -\frac{3}{10}y + 1$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1. Donner les solutions sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle (E).

2. Montrer que pour tout réel t appartenant à $[0\,;\,+\infty[$, $q(t) = \dfrac{10}{3} - \dfrac{7}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t}$.

3. Déterminer la limite de la fonction q en $+\infty$. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. Étudier les variations de la fonction q sur $[0\,;+\infty[$.

5. Déterminer, en résolvant une inéquation, au bout de combien de temps après l'injection initiale le médicament présente un risque pour le patient. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-1}.

6. D'après ce modèle, le protocole présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Partie B : étude du second protocole

On injecte au patient une première dose de médicament de 1 mg. On admet que la quantité de médicament présente dans le sang du patient baisse de 30 % toutes les heures. Pour compenser cette baisse, on injecte une dose supplémentaire de 0,75 mg de médicament toutes les heures.
On modélise la situation par une suite (u_n), où, pour tout entier naturel n, u_n représente la quantité, en mg, de médicament présente dans le sang du patient au bout de n heures écoulées depuis l'injection initiale.
Sous ces conditions, on a $u_0 = 1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 0,75$.

2. **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

d. D'après ce modèle, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 2,5$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,7^n$.

4. D'après ce modèle, au bout de combien d'injections supplémentaires la quantité de médicament présente dans le sang de ce patient dépasse-t-elle 2,4 mg ?

Exercice 6. Métropole 16 juin 2026 - Exercice 3

On étudie le fonctionnement d'un système de chauffage installé dans une pièce.
Ce système se déclenche automatiquement dès que la température de la pièce est inférieure ou égale à 18 °C (degrés Celsius), et s'éteint lorsqu'elle atteint 20 °C.

Partie A : Phase de chauffage

Pour une température de la pièce variant de 18 °C à 20 °C, le système de chauffage fonctionne en continu. La température de la pièce augmente progressivement.
Dans cette partie, on modélise la température de la pièce, en degré Celsius, à l'instant t, exprimé en dizaines de minutes, par une fonction T définie sur $[0;+\infty[$.
On admet que la fonction T est :

- dérivable sur $[0;+\infty[$;
- solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' = -0,035y + 0,91$$

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

On note T' la fonction dérivée de la fonction T.
On suppose qu'au début de l'étude, la température de la pièce est de 18 °C.
Ainsi $T(0) = 18$.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0;+\infty[$.

2. En déduire que, pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, on a :

$$T(t) = 26 - 8\,\mathrm{e}^{-0,035t}.$$

3. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps la pièce atteindra la température de 20 °C.

On exprimera le résultat en heures et minutes arrondi à la minute.

4. Si une panne du système de chauffage l'empêche de s'éteindre lorsque la température de la pièce atteint 20 °C, la température de la pièce pourra-t-elle dépasser 28 °C selon ce modèle ? Justifier.

Partie B : Phase de refroidissement

Lorsque la pièce atteint la température de 20 °C, le système de chauffage s'éteint et la pièce refroidit. On modélise la température de la pièce par la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07\,\mathrm{e}^{-0,1n},$$

où n est un nombre entier exprimant le temps écoulé en dizaines de minutes.

1. Montrer que $u_1 = 19,72$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a

$$u_n > 10.$$

On admet que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

a. Justifier que cette limite est solution de l'équation

$$x = 0,965x + 0,35.$$

b. Déterminer ℓ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. On rappelle que le système de chauffage se met en marche automatiquement dès que la température de la pièce, est inférieure ou égale à 18 °C.

a. Recopier et compléter les lignes 4,5 et 6 du programme écrit en langage Python ci-dessous, afin qu'il renvoie le nombre de dizaines de minutes à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

```
1. def marche() :
2.   n = 0
3.   u = 20
4.   while ...:
5.     u = ...
6.     n = ...
7.   return n
```

b. Déterminer le temps, en dizaines de minutes, à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

Exercice 7. Centres étrangers 10 juin 2026 - Exercice 2

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. On considère l'équation différentielle suivante où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$(E) : \quad y' + y = 2\cos(x)$$

Affirmation 1 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4\,\mathrm{e}^{-x} + \cos(x) + \sin(x)$ est solution de l'équation différentielle (E).

2. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ et $g(x) = \sin(x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère et $\mathscr{C}_g$ celle de la fonction g.
Affirmation 2 : Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un seul point d'intersection.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{2n + \sin(n)}{n+1}$$

Affirmation 3 : La suite (v_n) diverge.

4. On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1$$

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 on a $u_n = n^2$.

5. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \mathrm{e}^{-n}$.
On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
Affirmation 5 : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$

Exercice 8. Asie 10 juin 2026 - Exercice 1

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ par :

$$f(x)=\frac{x-2}{2x-3}$$

1. Justifier tous les éléments du tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$
f	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

2. En déduire que pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$f(x) \in [0;1].$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n - 3}, \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. En utilisant la fonction f, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
En admettant que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0;1]$, montrer que $\ell = 1$.

4. On donne ci-dessous une fonction `seuil` écrite en langage Python.

```
def seuil(h):
  n = 0
  u = 0
  while u < 1-h:
    n = n+1
    u = (u-2)/(2*u-3)
  return n
```

L'appel `seuil(0.0001)` renvoie la valeur 5 000.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

5. **a.** Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n) sous forme de fractions irréductibles.

b. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n et démontrer cette conjecture.

Exercice 9. Amérique du Nord 21 mai 2026 - Exercice 2

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

2. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que, pour tout réel x,on a $f'(x) = \dfrac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

3. Le but de cette question est de retrouver par une autre méthode les résultats de la question **2.** de la **partie B**.

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2}$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4 dont on précisera le premier terme.

b. En déduire une expression de v_n en fonction de n puis que $u_n = \sqrt{\dfrac{1,5\times 4^n}{1+0,5\times 4^n}}$ pour tout entier naturel n.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_{n-1}^2$.

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci permette de lister les p premiers termes de la suite (S_n).

```
from math import*

def termes(p) :
    u = ...
    S=0
    L= [ ]
    for i in range(p) :
        S=...
        u= ...
        L.append(S)
    return L
```

Remarque : on rappelle qu'en langage Python,

- la commande L= [ ] crée une liste vide ;
- la commande L.append (S) ajoute, à la fin de la liste L, l'élément supplémentaire S.

2. On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a $1 \leqslant u_k \leqslant \sqrt{3}$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $n \leqslant S_n \leqslant 3n$.

3. En déduire les limites respectives de S_n et de $\dfrac{S_n}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 10. Amérique du Nord 20 mai 2026 - Exercice 2

La perche-soleil est une espèce de poisson envahissante. Un plan de lutte contre la prolifération de cette espèce est mis en place et on étudie dans cet exercice deux modèles d'évolution de la population de perches-soleil dans un étang naturel. On estime que, dans cet étang, le nombre de perches-soleil s'élève à 4 000 individus au 1er janvier 2025.

: étude d'un modèle discret

Dans cette partie, on modélise le nombre de perches-soleil dans l'étang par une suite (u_n).
Pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de perches-soleil, exprimé en millier, dans l'étang au 1er janvier de l'année $2025 + n$.
La suite (u_n) est définie par :

— $u_0 = 4$.

— pour tout entier naturel n : $\quad u_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{u_n}$.

On admet que cette suite est bien définie et qu'en particulier pour tout entier n, $\quad u_n > 0$.

1. Calculer le nombre de perches-soleil au 1er janvier 2026 donné par ce modèle.

2. On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $\quad h(x) = 4 - \dfrac{4}{x}$.

a. Justifier que la fonction h est croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

d. Justifier que $\ell = 2$.

e. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?

3. On considère le script Python ci-dessous.

a. Soit s un réel appartenant à l'intervalle $]2;4[$.

Recopier et compléter ce script de sorte qu'il renvoie, après exécution, le plus petit entier n tel que $u_n < s$.

```
def population(s) :
  u=4
  n=0
  while... :
    u=...
    n=...
  return n
```

b. Quelle valeur renvoie la commande `population(2.2)` ?

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

: étude d'un modèle continu

On note t le temps écoulé, exprimé en année, à partir du 1er janvier 2025. L'évolution du nombre de perches-soleil, exprimé en millier, est modélisée par la fonction p telle que :

— la fonction p est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$;

— $p(0) = 4$;

— la fonction p est solution de l'équation différentielle (E) $\quad y' + y = 2 \quad$ où y est une fonction de la variable réelle t.

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).

2. En déduire que l'expression de la fonction p sur l'intervalle $[0;+\infty[$ est $\quad p(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + 2$.

3. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?

Exercice 11. Nouvelle-Calédonie 21 novembre 2025 - Exercice 3

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 2\right)$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln(9)$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $f(2\ln(2)) = 2\ln(2)$.

3. Montrer que $u_1 = \ln(5)$.

4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

5. En déduire que la suite (u_n) converge.

6. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - X - 2 = 0$.

b. En déduire l'ensemble des solutions sur R de l'équation :

$$e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$$

c. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = x$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 12. Nouvelle-Calédonie 20 novembre 2025 - Exercice 3

On considère n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{1-x}.$$

On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et on note f_n' sa fonction dérivée.

Partie A

Dans cette partie on étudie le cas où $n = 1$.
On étudie donc la fonction f_1 définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f_1(x) = xe^{1-x}.$$

1. Montrer que $f_1'(x)$ est strictement positive pour tout réel x de $[0\,;\,1[$.

2. En déduire le tableau de variations de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0\,;\,1]$

3. En déduire que l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;\,1]$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx.$$

On admet que $u_1 = e - 2$.

1. **a.** Justifier que pour tout $x \in [0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$$

.

b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

b. On considère le script Python ci-dessous définissant la fonction `suite()` :

```
from math import exp

def suite():
  u = ...
  for n in range (1, ...):
      u = ...
  return
```

Recopier et compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction `suite()` renvoie la valeur de $\displaystyle\int_0^1 x^8 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$.

3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 13. Amérique du Sud 14 novembre 2025 - Exercice 3

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 &= \ln(4) \\ v_{n+1} &= \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_n}\right) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad w_n = -1+\mathrm{e}^{v_n}.$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie et strictement positive.

1. Donner les valeurs exactes de v_1 et w_0.

2. **a.** Une partie d'une feuille de calcul où figurent les indices et les termes des suites (v_n) et (w_n) est reproduite ci-contre.

Parmi les trois formules ci-dessous, choisir la formule qui, saisie dans la cellule B3 puis recopiée vers le bas, permettra d'obtenir les valeurs de la suite (v_n) dans la colonne B.

Formule 1	LN(−1 + 2 * EXP(B2))
Formule 2	= LN(−1 + 2 * EXP(B2))
Formule 3	= LN(−1 + 2 * EXP(A2))

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (v_n).

c. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, valider votre conjecture concernant le sens de variation de la suite (v_n).

	A	B	C
1	n	v_n	w_n
2	0	1,386 294 36	3
3	1	1,945 910 15	6
4	2	2,564 949 36	12
5	3	3,218 875 82	24
6	4	3,891 820 3	48
7	5	4,574 710 98	96
8	6	5,262 690 19	192
9	7	5,953 243 33	384
10	8	6,645 090 97	768
11	9	7,337 587 74	1 536
12	10	8,030 409 56	3 072
13	11	8,723 394 02	6 144
14	12	9,416 459 83	12 288
15	13	10,109 566 3	24 576
16	14	10,802 693 2	49 152
17	15	11,495 830 2	98 304
18	16	12,188 972 3	196 608
19	17	12,882 116 9	393 216

3. **a.** Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n = \ln(1 + 3 \times 2^n)$.

c. Déterminer la limite de la suite (v_n).

4. Justifier que l'algorithme suivant écrit en langage Python renvoie un résultat quel que soit le choix de la valeur du nombre S.

```
from math import*
def seuil(S):
    V=ln(4)
    n=0
    while V < S :
      n=n+1
      V=ln(2*exp(V)-1)
    return(n)
```

Exercice 14. Métropole 9 septembre 2025 - Exercice 3

Le but de cet exercice est d'étudier les convergences de deux suites vers une même limite.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{3x-2}.$$

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

x	2	$+\infty$
$f(x)$	2 ↗	$+\infty$

On admet que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On appelle ℓ la limite de (u_n).
On admet qu'elle est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer la valeur de ℓ.

4. On considère la fonction `rang` écrite ci-dessous en langage Python.
On rappelle que sqrt(x) renvoie la racine carrée du nombre x.

```
1  from math import *
2
3  def rang(a) :
4    u = 6
5    n=0
6    while u > = a :
7      u = sqrt(3*u - 2)
8      n = n+1
9    return n
```

a. Pourquoi peut-on affirmer que `rang`(2.000001) renvoie une valeur?

b. Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction `rang`(a) renvoie-t-elle un résultat?

Partie B

On admet que la suite (v_n) vérifiant $v_0 = 6$ et, pour tout n, entier naturel, $v_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{v_n}$ est bien définie.

1. Calculer v_1.

2. Pour tout n entier naturel, on admet que $v_n \neq 2$ et on pose :

$$w_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2}$$

a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2 et préciser son premier terme w_0.

b. On admet que, pour tout n entier naturel,

$$w_n - 1 = \frac{1}{v_n - 2}.$$

En déduire que, pour tout n entier naturel,

$$v_n = 2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}$$

c. Calculer la limite de (v_n).

3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $v_n < 2{,}01$ en résolvant l'inéquation.

Partie C

À l'aide des parties précédentes, déterminer le plus petit entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, les termes v_n et u_n appartiennent à l'intervalle $]1{,}99\,;\,2{,}01[$.

Exercice 15. Polynésie 2 septembre 2025 - Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2 + \ln\left(u_n^2 - 3\right).$$

On admet que cette suite est bien définie.

Partie A : Exploitation de programmes Python

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour que `suite(k)` qui prend en paramètre un entier naturel `k`, renvoie la liste des k premières valeurs de la suite (u_n).

Remarque : On précise que, pour tout réel strictement positif `a`, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de `a`.

```
def suite(k):
  L = []
  u = 5
  for i in range(......):
    L.append(u)
    u=............
  return(......)
```

2. On a exécuté `suite(9)` ci-dessous. Émettre deux conjectures : l'une sur le sens de variation de la suite (u_n) et l'autre sur son éventuelle convergence.

```
>>> suite(9)
[ 5, 5.091042453358316, 5.131953749864703,
5.150037910978289, 5.157974010229213, 5.1614456706362954,
5.162962248594583, 5.163624356938671, 5.163913344065642]
```

3. On a ensuite créé la fonction `mystere(n)` donnée ci-dessous et exécuté `mystere(10000)`, ce qui a renvoyé 1.

Cet affichage contredit-il la conjecture émise sur le sens de variation de la suite (u_n) ? Justifier.

```
def mystere(n):
  L = suite(n)
  c = 1
  for i in range(n - 1):
    if L[i] > L[i + 1]:
      c = 0
  return c
```

```
>>> mystere(10000)
1
```

Partie B : Étude de la convergence de la suite (u_n)

On considère la fonction g définie sur $[2\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right)$$

On admet que g est dérivable sur $[2\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction g est croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie C : Étude de la valeur de la limite

On considère la fonction f définie sur $[\,2; +\infty\,[$ par :

$$f(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right) - x.$$

On admet que f est dérivable sur $[2\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On donne le tableau de variations de f suivant. On ne demande aucune justification.

x	2		3		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$\ln(6) - 1$	↘	$-\infty$

1. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[2\ ;\ +\infty[$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.

b. Donner la valeur exacte de α et une valeur approchée à 10^{-3} près de β.

2. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

Justifier que $f(\ell) = 0$ et déterminer ℓ.

Exercice 16. Métropole 18 juin 2025 - Exercice 3

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{1+5^n}{2+3^n}.$$

Affirmation 1 : La suite (u_n) converge vers $\frac{5}{3}$.

2. On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n, w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3.$$

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant n$.

3. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée dans un repère orthonormé sur la figure (Fig. 1) en page suivante.
On précise que :

- T est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 8 ;
- L'axe des abscisses est la tangente horizontale à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

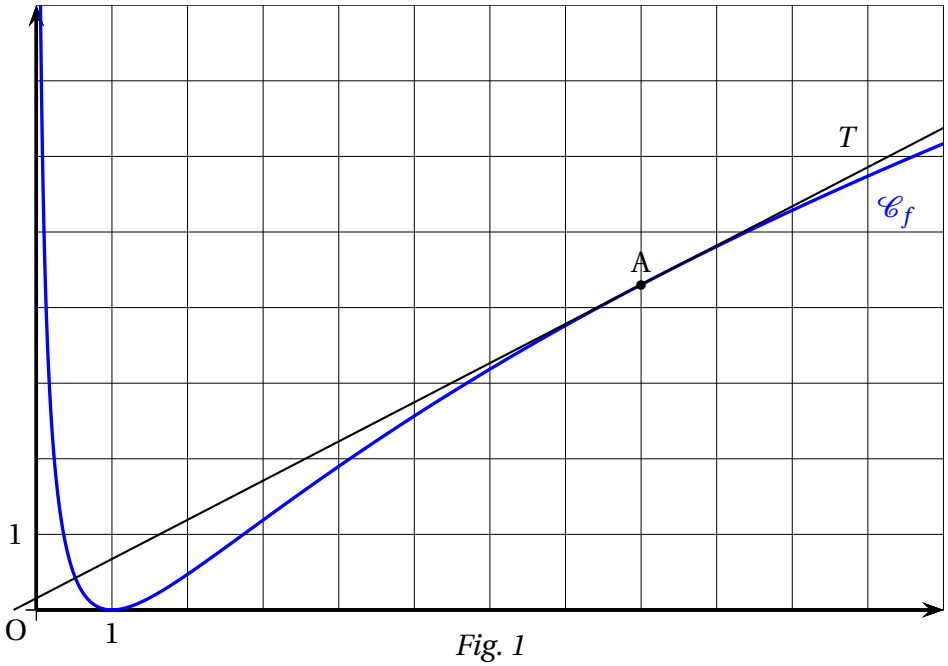


Fig. 1

Affirmation 3 : D'après le graphique, la fonction f est convexe sur son ensemble de définition.

4. **Affirmation 4 :** Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) - x + 1 \leqslant 0$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 17. Métropole 17 juin 2025 - Exercice 4

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.
La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n, on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024+n$. Ainsi, $u_0 = 1$.
Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n.$$

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.
2. On note h la fonction définie sur $[0\,;20]$ par

$$h(x) = -0,02x^2 + 1,3x.$$

On admet que h est croissante sur $[0\,;20]$.

   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.
   b. En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.
   c. Justifier que $L = 15$.

3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.

   a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.
   b. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil():
  n=0
  u= 1
  while ..... :
    n=.....
    u=.....
  return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.
Dans ce modèle, pour une durée t, en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est solution sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_1) : \quad y' = 0,02y(15-y).$$

On admet qu'une telle fonction f existe ; le but de cette partie est d'en déterminer une expression.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.
   Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$(E_2) : \quad y' = -0,3y + 0,02.$$

2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2).
3. En déduire que pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$:

$$f(t) = \frac{15}{14\mathrm{e}^{-0,3t} + 1}.$$

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 18. Centres étrangers 13 juin 2025 - Exercice 1

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.
Au 1er janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.
On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 0,93.
Pour tout entier naturel n, u_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.
On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n.$$

Pour tout entier naturel n, v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = -0,05x^2 + 1,1x.$$

2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,11]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6.$$

4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ.
5. **a.** Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ.
   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.
3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.
4. On considère le programme Python ci-contre.
   a. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.
   b. Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

```
n=0
u = 6
v = 6
while ... :
    u = ...
    v= ...
    n = n+1
print (2025 + n)
```

Exercice 19. Asie 12 juin 2025 - Exercice 2

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 10$.
Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$,
3. Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 + 10\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n). Justifier la réponse.

Partie B

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n + \dfrac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$$

1. Montrer que $w_1 = 44,5$.

On souhaite écrire une fonction suite, en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée. On donne ci-dessous une proposition pour cette fonction suite.

```
1  def suite(n) :
2      U=30
3      W=45
4      for i in range (1,n+1) :
5          U=U/2+10
6          W=W/2+U/2+7
7      return W
```

2. L'exécution de suite(1) ne renvoie pas le terme w_1. Comment modifier la fonction suite afin que l'exécution de suite(n) renvoie la valeur du terme w_n ?

3. **a.** Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n on a :

$$w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

b. On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a : $0 \leqslant 10n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{10}{n}$.

Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?

Exercice 20. Asie 11 juin 2025 - Exercice 3

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 ml d'un médicament.
On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en ml présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.
On a $u_1 = 2$ et

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif : } u_{n+1} = 2 + 0,8u_n.$$

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1. Calculer la valeur u_2.
2. Montrer par récurrence que :

$$u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1} \text{ pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif.}$$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geqslant 10$ admet-elle des solutions ? Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL. Justifier votre démarche.

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.
On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2.
2. Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n.$$

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
4. On donne la fonction mystere suivante, écrite en langage Python :

```
1  def mystere(k) :
2      n = 1
3      s = 2
4      while s < k :
5          n = n + 1
6          s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
7      return n
```

Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie `mystere(9)` ?

5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

Exercice 21. Amérique du Nord (sujet de secours) 22 mai 2025 - Exercice 4

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$			

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. Calculer w_0.

2. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

3. Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.

3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \dfrac{1}{4}\ell$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel ln(2), en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au XVI^{e} siècle.

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

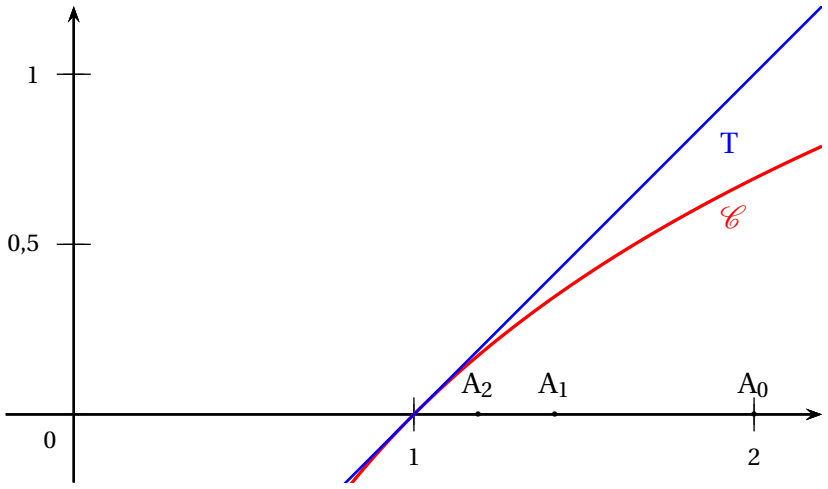
Partie A

1. **a.** Donner la valeur exacte de u_1 et de u_2.
   b. Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.
2. **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c. Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.
   d. Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n).

Partie B

On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

1. **a.** Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\quad \ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction ln et la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
   Une équation de la droite T est $y = x - 1$.
   Les points A_0, A_1, A_2 ont pour abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 et pour ordonnée 0.



   On décide de prendre $x-1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0{,}99\ ;\ 1{,}01[$.

a. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0,99\ ;\ 1,01[$ et donner une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.

b. En déduire une approximation de $\ln(u_k)$.

c. Déduire des questions **1. c.** et **2. b.** de la **partie B** une approximation de $\ln(2)$.

3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.

Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel `Briggs(a)` renvoie une approximation de $\ln(a)$.

On rappelle que l'instruction en langage Python `sqrt(a)` correspond à $\sqrt{a}$.

```
from math import*
def Briggs(a):
  n = 0
  while a >= 1.01:
    a = sqrt(a)
    n = n+1
  L =...
return L
```

Exercice 23. Amérique du Nord 21 mai 2025 - Exercice 2

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1.

2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n, par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

a. Calculer a_0 et a_1.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$a_n \geqslant 3n - 1$$

d. En déduire la limite de la suite (a_n).

3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.
On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
1  def algo(p):
2    u=2
3    n=0
4    while u-1>p:
5      u=(2*u+1)/(u+2)
6      n=n+1
7    return (n,u)
```

a. Interpréter les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` dans le contexte de l'exercice.

b. Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0,001$.

Exercice 24. Amérique du Sud 22 novembre 2024 - Exercice 2

Cet exercice contient 5 affirmations.
Pour chaque affirmation, répondre par VRAI ou FAUX en justifiant la réponse.
Toute absence de justification ou justification incorrecte ne sera pas prise en compte dans la notation.

Partie 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 10 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

1. **Affirmation 1** : La suite (u_n) est décroissante minorée par 0.
2. **Affirmation 2** : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. **Affirmation 3** : La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$ est géométrique.

Partie 2

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{3}{2}y + 2$ d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

1. **Affirmation 4** : Il existe une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).
2. Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$ on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 0$.
3. **Affirmation 5** : La tangente au point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}_f$ a pour coefficient directeur $2e^{\frac{3}{2}}$.

Exercice 25. Amérique du Sud 21 novembre 2024 - Exercice 3

Répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes et justifier votre réponse.
Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans la notation.
Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par

$$u_n = \frac{25+(-1)^n}{n}.$$

Affirmation 1 : La suite (u_n) est divergente.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} w_0 &= 1 \\ w_{n+1} &= \dfrac{w_n}{1+w_n} \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n, $w_n > 0$.

On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \dfrac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.

Affirmation 2 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \ln(1+v_n) \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n, $v_n > 0$.

Affirmation 3 : La suite (v_n) est décroissante.

4. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} [\ln(x)]^n \,\mathrm{d}x$.

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.

Exercice 26. Métropole 11 septembre 2024 - Exercice 3

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ t_{n+1} = -0{,}8\,t_n + 18.$$

Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

2. On considère une suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul :

$$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4.$$

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \frac{S_n}{n}$.

Affirmation 2 : La suite (u_n) converge.

3. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n}.$$

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^n - n$.
Affirmation 4 : La suite (u_n) converge.

5. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n.

```
def u(n) :
    valeur = 2
    for k in range(n) :
        valeur = 0.5 * (valeur + 2/valeur)
    return valeur
```

On admet que (u_n) est décroissante et vérifie pour tout entier naturel n :

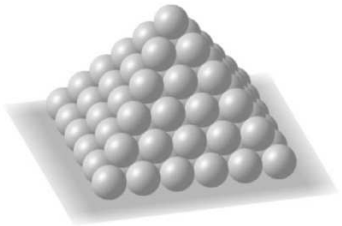
$$\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2.$$

Affirmation 5 : La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice 27. Polynésie 5 septembre 2024 - Exercice 3

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :

- le 1er étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule ;
- le 2e étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules ;
- le 3e étage possède 9 boules ;
- ...
- le n-ième étage possède n^2 boules.



Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n-ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages.

2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

a. Calculer S_5 et interpréter ce résultat.

b. On considère la fonction `pyramide` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python.

Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n, l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1, n+1) :
        S = ...
    return ...
```

c. Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges. Combien d'oranges utilise-t-il pour construire la plus grande pyramide possible ?

Exercice 28. Polynésie 20 juin 2024 - Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et pour tout entier naturel} \quad n, \quad u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1. **a.** Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2.

b. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python. On admet que, pour tout réel strictement positif `a`, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de `a`.

```
def mystere(k) :
    u = 8
    S = 0
    for i in range(k) :
        S = S + u
        u = u - log( u / 4 )
    return S
```

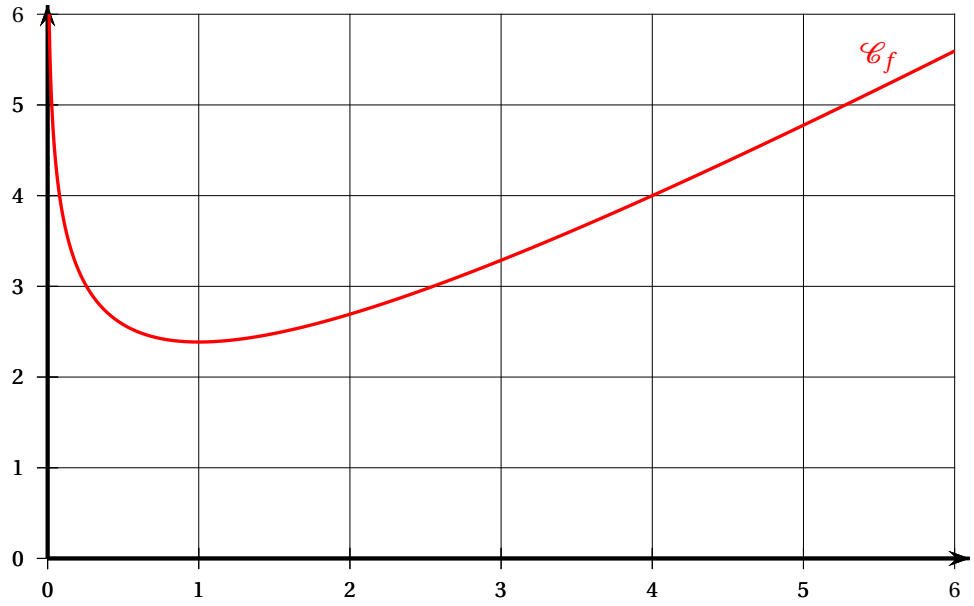
L'exécution de `mystere(10)` renvoie `58.44045206721732`. Que représente ce résultat ?

c. Modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

On donne ci-dessous une représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f pour les valeurs de x comprises entre 0 et 6.



Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle.
On note ℓ la valeur de cette limite

c. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

d. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 29. Métropole (sujet de secours) 20 juin 2024 - Exercice 3

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre réel a.

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$

1. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$.
2. Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.
   a. En utilisant un raisonnement par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n < 2$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$

1. On donne ci-contre la fonction `u` écrite en langage Python.
   Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit `u(2,1)` et `u(2,2)` dans la console Python.

```
def u(a,n) :
    u=a
    for k in range(n) :
      u=u**2-2*u+2
    return u
```

2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite (u_n) dans le cas où $a = 2$?
   On admettra ce résultat sans démonstration.

Partie C : étude dans le cas général

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de a.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)}$.
2. Déterminer, suivant les valeurs du réel a strictement supérieur à 1, la limite de la suite (u_n).

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que 1 $m^3 = 1\,000$ L.
Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.
Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $mg \cdot L^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et $3\,mg \cdot L^{-1}$.
Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.
Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à $0,01\,mg \cdot L^{-1}$. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de $0,70\,mg \cdot L^{-1}$.

Partie A : étude d'un modèle discret.

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de $0,3\,mg \cdot L^{-1}$.
2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore, en $mg \cdot L^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0,7$.
   On admet que pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3.$$

   a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.
   b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.
4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-après écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

```
def alerte_chlore(s) :
    n = 0
    u = 0.7
    while ... :
        n = ...
        u = ...
    return n
```

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu.

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.
Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en $mg \cdot L^{-1}$, dans la piscine.
On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -0,08y + \dfrac{q}{50}$, où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = Ce^{-0,08x} + \dfrac{q}{4}$ où C est une constante réelle.
2. **a.** Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.
   b. On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à $0,7\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$. On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de $2\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$. Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

Exercice 31. Polynésie 19 juin 2024 - Exercice 4

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.
Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}.$$

Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n):
    u = ...
    for i in range(n) :
        ...
    return u
```

2. L'exécution de `suite(2)` renvoie 1.3333333333333333.
   Effectuer un calcul pour vérifier et expliquer cet affichage.
3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.000000000005457
```

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{5 - x}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.$$

3. **a.** Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
   Prouver l'équivalence suivante :

$$f(x) = x \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$$

   b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
   Déterminer sa limite.
5. Le comportement de la suite serait-il identique en choisissant comme terme initial $u_0 = 4$ au lieu de $u_0 = 3$?

Exercice 32. Métropole (sujet de secours) 19 juin 2024 - Exercice 3

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Montrer que pour tout nombre réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) &= u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant 0$.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire la convergence de la suite (u_n).

4. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

5. **a.** Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leqslant h$, où h est un nombre réel strictement positif.

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
    n = 0
    u =7
    while ... :
        n = n+1
        u = ...
    return n
```

b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit seuil(0.01) dans la console Python. Justifier la réponse.

Partie C : calcul intégral

1. Étudier le signe de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Interpréter graphiquement l'intégrale :

$$I = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2\ ;\ 4]$, on a l'encadrement :

$$0,5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0,25x + 0,25.$$

En déduire l'encadrement :

$$1 \leqslant I \leqslant 2.$$

Exercice 33. Métropole 19 juin 2024 - Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5xe^{-x}$.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Affirmation 1 :
L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe C_f.

Affirmation 2 :
La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' + y = 5e^{-x}$.

2. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n), telles que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1 .

Affirmation 3 :
La suite (v_n) converge vers un nombre réel ℓ appartenant à l'intervalle $[-1;1]$.

On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.

Affirmation 4 :
Pour tout entier naturel n, on a alors : $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

Exercice 34. Asie 11 juin 2024 - Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.

3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g.
   Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.
   Résoudre, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$
2. Justifier que la suite (u_n) converge.
   On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
3. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 35. Asie 10 juin 2024 - Exercice 4

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.
Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. **Affirmation 1** : Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
2. On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n,on a $u_n \leqslant \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n}$.
   Affirmation 2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. On considère la fonction suivante écrite en langage Python :

```
def terme(N) :
    U =1
    for i in range(N) :
        U=U+i
    return U
```

Affirmation 3 : terme(4) renvoie la valeur 7.

4. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :

— Prix A : il reçoit 1 000 euros par jour pendant 15 jours ;
— Prix B : il reçoit 1 euro le 1er jour, 2 euros le 2e jour, 4 euros le 3e jour et pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.

Affirmation 4 : La valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$v_n = \int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Affirmation 5 : La suite (v_n) est croissante.

Exercice 36. Centres étrangers (Suède) 7 juin 2024 - Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est juste ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 2y = -6x + 1$.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 6x + 1$ est une solution de l'équation différentielle (E).

Affirmation 2 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

La suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

Affirmation 3 : On considère la suite (u_n) définie dans l'affirmation 2.
L'instruction `suite(50)` ci-dessous, écrite en langage Python, renvoie u_{50}.

```
1  def suite(k):
2    S=0
3    for i in range(k):
4      S=S+(3/4)**k
5    return S
```

Affirmation 4 : Soit a un réel et f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = a\ln(x) - 2x.$$

Soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
II existe une valeur de a pour laquelle la tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}.$$

3. En déduire que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4. On considère le script Python ci-dessous :

```
1  from math import *
2  def seuil(n):
3      u=5
4      i=0
5      ℓ =(1 + sqrt(5))/2
6      while abs(u-ℓ)>=10**(-n):
7          u=sqrt(u+1)
8          i=i+1
9      return(i)
```

On rappelle que la commande **abs(x)** *renvoie la valeur absolue de x.*

   a. Donner la valeur renvoyée par `seuil (2)`.

b. La valeur renvoyée par `seuil` (4) est 9.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 38. Centres étrangers 5 juin 2024 - Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$.

1. **a.** Résoudre sur l'intervalle $[0\,;1]$ l'équation $f(x) = x$.

b. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$,

$$f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

c. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.$$

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.

4. **a.** Justifier que pour tout entier naturel n, $\ln(2) - u_n$ est positif.

b. On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.
Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.1
    while ln (2) − u ... 0.0001 :
        n=n+1
        u= ...
    return (u, n)
```

c. Donner la valeur de la variable n renvoyée par la fonction seuil ().

Exercice 39. Amérique du Nord 22 mai 2024 - Exercice 3

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 &= \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} &= g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

2. Calculer u_1 et u_2.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

5. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.

7. En déduire une expression de v_n en fonction de n.

8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.

9. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
def seuil() :
    n=0
    u=0.5
    while u < 0.95 :
        n=...
        u=...
    return n
```