Annales baccalauréat spécialité
Suites

Exercice 1.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = \ln\left(3 + \mathrm{e}^{u_n}\right) - a$$

où a est un entier.
Dans la partie A on étudiera le cas $a = 0$ et dans la partie B le cas $a = 1$.
On admet que la suite (u_n) ainsi construite est bien définie.

Partie A : cas $a = 0$

Dans cette partie, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \ln\left(3 + \mathrm{e}^{u_n}\right)$$

1. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$.

a. Déterminer la valeur de v_0.

b. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 3.

c. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \ln(1 + 3n)$$

b. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B : cas $a = 1$

La suite (u_n) est ici définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = \ln\left(3 + \mathrm{e}^{u_n}\right) - 1$$

1. Calculer u_1 et montrer que $u_2 = \ln\left(3 + \dfrac{4}{\mathrm{e}}\right) - 1$.

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \ln\left(3 + \mathrm{e}^{x}\right) - 1.$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Dans la suite de l'exercice on remarquera que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

3. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

4. On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

Montrer que $\ell = \ln\left(\dfrac{3}{\mathrm{e}-1}\right)$.

5. Le script en langage Python ci-dessous est le script d'une fonction seuil qui prend en entrée un nombre réel d strictement positif et qui renvoie en sortie le premier indice n tel que :

$$u_n \geqslant \ell - d$$

```
L1  from math import *
L2  def seuil (d) :
L3      N = 0
L4      U = 0
L5      L = log(3/(exp(1)-1))
L6  ..............
L7          U = log(3+exp(U))-1
L8          N = N+1
L9      return N
```

On rappelle que depuis la bibliothèque math en langage Python la fonction ln est notée log.

Parmi les quatre propositions ci-dessous, dire sans justification, laquelle doit être choisie à la ligne 6 du script afin que la fonction `seuil 1` retourne le résultat attendu.

Proposition 1 : « while U <= L + d : »

Proposition 2 : « while U > L + d : »

Proposition 3 : « while U < L - d : »

Proposition 4 : « while U >= L - d : »

Corrigé

Partie A

1. a. $v_0 = \mathrm{e}^{u_0} = \mathrm{e}^0 = 1$.

b. On calcule $v_{n+1} - v_n = \mathrm{e}^{\ln(3+\mathrm{e}^{u_n})} - \mathrm{e}^{u_n} = 3 + \mathrm{e}^{u_n} - \mathrm{e}^{u_n} = 3$.

Ceci étant indépendant du choix de n, la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 3.

c. Comme (v_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 1$, pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 + 3 \times n = 1 + 3n$.

2. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(\mathrm{e}^{u_n}) = u_n$.

De plus comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$, $u_n = \ln(v_n) = \ln(1+3n)$.

b. D'après la connaissance sur la fonction $x \longmapsto \ln(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. De plus $1+3n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(1+3n) = +\infty$$

Partie B

1. $u_2 = \ln(3 + \mathrm{e}^{u_1}) - 1 = \ln\left(3 + \mathrm{e}^{\ln(4)-1}\right) - 1 = \ln\left(3 + \mathrm{e}^{\ln(4)} \times \mathrm{e}^{-1}\right) - 1 = \ln\left(3 + \dfrac{4}{\mathrm{e}}\right) - 1$

2. On pose $\mathscr{P}(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

- Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie (initialisation) :

$u_0 = 0$ et donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.

$u_1 = \ln(4) - 1 \approx 0{,}386\,294\,361\,12$ et donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$ est vraie.

- On forme l'hypothèse de récurrence en supposant qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

On a donc $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. f étant strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$, alors on obtient les inégalités :

$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$$

Or $f(0) = \ln(4) - 1 \approx 0{,}386\,294\,361\,12$ et $f(1) = \ln\left(3 + \mathrm{e}^1\right) - 1 \approx 0{,}743\,668\,380\,629 \leqslant 1$. En élargissant les inégalités :

$$0 \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) < 1$$

qui devient :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 1$$

et $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

Comme le résultat est indépendant du choix de n, alors on a montré que $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(n+1)$ (hérédité).

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

3. La suite (u_n) est croissante, majorée, elle est donc convergente.

4. On résout l'équation $f(x) - x = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) - x = 0 &\iff \ln(3 + \mathrm{e}^x) - 1 - x = 0 \\
&\iff \mathrm{e}^{\ln(3+\mathrm{e}^x)-1-x} = 1 \\
&\iff (3 + \mathrm{e}^x) \times \mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^{-x} = 1 \\
&\iff \frac{3}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{\mathrm{e}} = 1 \\
&\iff 3\mathrm{e}^{-x} + 1 = \mathrm{e} \\
&\iff 3 = (\mathrm{e} - 1)\,\mathrm{e}^x \\
&\iff \frac{3}{\mathrm{e}-1} = \mathrm{e}^x \\
&\iff \ln\left(\frac{3}{\mathrm{e}-1}\right) = \ln(\mathrm{e}^x) \\
&\iff \ln\left(\frac{3}{\mathrm{e}-1}\right) = x
\end{aligned}$$

Ainsi $\ell = \ln\left(\dfrac{3}{\mathrm{e}-1}\right)$ obtenu comme unique solution de $f(x) = x$.

5. Proposition 3 : « while U < L - d : »

Exercice 2.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]-3\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2x}{x+3}.$$

On admet que f est dérivable sur $]-3\,;\,+\infty[$.

1. Vérifier, en détaillant les calculs, que pour tout réel x de $]-3\,;\,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{6}{(x+3)^2}$.

   En déduire que f est croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1}=f(u_n)$.

2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier n, on a : $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 1$.
3. En déduire que (u_n) est convergente.

Partie B

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n\neq 0$.
On note (v_n) et (w_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n=\frac{1}{u_n}\quad et\quad w_n=v_n+1.$$

1. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $\quad v_{n+1}=\dfrac{3}{2}v_n+\dfrac{1}{2}$.
2. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera les paramètres.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n=\frac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)^n-1}$$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. **a.** Recopier et compléter le script suivant de telle sorte que la fonction seuil() renvoie le plus petit entier n tel que u_n soit inférieur ou égal à 10^{-3}.

```
1  def seuil():
2    n = 0
3    u = 1
4    while ...:
5      n = n + 1
6      u = ...
7    return ...
```

   b. Quelle est la valeur renvoyée par la fonction `seuil()` ?

Corrigé

Partie A

1. La fonction f est dérivable sur $]-3;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

On a, pour tout réel $x > -3$: $\quad f'(x) = \dfrac{2(x+3)-2x\times 1}{(x+3)^2} = \dfrac{2x+6-2x}{(x+3)^2} = \dfrac{6}{(x+3)^2}$.

Pour tout $x > -3$, $\quad (x+3)^2 > 0 \quad$ donc $\quad f'(x) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]-3;+\infty[$.

2. **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = f(1) = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$.

On vérifie que $0 \leqslant 0{,}5 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Soit n un entier naturel, on suppose que la propriété est vraie pour cet entier n, c'est-à-dire que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$. Il faut démontrer que $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Les nombres 0, u_{n+1}, u_n et 1 appartiennent à $[0;1] \subset]-3;+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction f est croissante.

D'après l'hypothèse de récurrence, et puisque f est croissante sur $[0;1]$:

$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1 \Longrightarrow f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$

$\Longrightarrow 0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}5$

Comme $0{,}5 \leqslant 1$, on a bien $\quad 0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Ainsi la propriété est héréditaire.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

3. D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante ($u_{n+1} \leqslant u_n$) et minorée par 0 : on en déduit, d'après le théorème de convergence monotone, qu'elle est convergente.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{u_n+3}{2u_n} = \dfrac{u_n}{2u_n} + \dfrac{3}{2u_n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{3}{2}v_n + \dfrac{1}{2}$.

2. Pour tout entier naturel n :

$w_{n+1} = v_{n+1} + 1 = \dfrac{3}{2}v_n + \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}v_n + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}\left(v_n + 1\right) = \dfrac{3}{2}w_n$.

De plus $\quad w_0 = v_0 + 1 = \dfrac{1}{u_0} + 1 = 2$.

La suite (w_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{3}{2}$ et de premier terme $w_0 = 2$.

3. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad w_n = w_0 \times q^n = 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \quad$ donc $\quad v_n = w_n - 1 = 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n - 1$.

Comme $\quad u_n = \dfrac{1}{v_n}, \quad$ on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = \dfrac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$.

4. On a : $\quad \dfrac{3}{2} > 1 \quad$ donc $\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty \quad$ et $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n - 1 = +\infty$.

Par limite de l'inverse : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5. a. La boucle doit tourner tant que $u_n > 10^{-3}$, et chaque tour calcule le terme suivant avec $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+3}$. Voici le script Python complété :

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1
    while u > 10**(-3) :
        n = n + 1
        u = 2*u/(u+3)
    return n
```

b. On cherche le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 > 0$, donc :

$$\begin{aligned}
u_n \leqslant 10^{-3} &\iff \frac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1} \leqslant 10^{-3} \\
&\iff 2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \geqslant 1\,000 \\
&\iff \left(\frac{3}{2}\right)^n \geqslant 500{,}5 \\
&\iff n\ln(1{,}5) \geqslant \ln(500{,}5) \quad \text{car la fonction ln est croissante sur }]0;+\infty[\\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(500{,}5)}{\ln(1{,}5)} \quad \text{car } \ln(1{,}5) > 0
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(500{,}5)}{\ln(1{,}5)} \approx 15{,}3$.

(Vérification : $u_{15} \approx 1{,}14 \times 10^{-3} > 10^{-3}$ et $u_{16} \approx 7{,}62 \times 10^{-4} \leqslant 10^{-3}$.)

La fonction `seuil()` renvoie donc 16.

Exercice 3.

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout $x \in [4;10]$ par $f(x) = \ln(8x^3 - 1)$.
On admet que la fonction f est dérivable sur $[4;10]$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Montrer pour tout $x \in [4;10]$, on a :

$$f'(x) = \frac{24x^2}{(2x-1)(4x^2+2x+1)}.$$

2. a. En déduire que f est croissante sur $[4;10]$.

b. Montrer que, pour tout $x \in [4;10]$, on a :

$$4 \leqslant f(x) \leqslant 10.$$

3. On définit la fonction g définie pour tout $x \in [4;10]$ par $g(x) = f(x) - x$.
On admet que g est strictement décroissante sur son ensemble de définition.

a. Montrer que, sur l'intervalle $[4;10]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

b. Déterminer un encadrement à 10^{-3} près de α.

Partie B

On admet qu'on peut définir la suite (u_n) par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction étudiée à la partie A.

1. Donner une valeur approchée de u_1 à 10^{-1} près.

2. a. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. Montrer que la suite (u_n) converge vers le nombre α, défini dans la partie A.

Partie C

Dans cette partie, on admet que $8,4 \leqslant \alpha \leqslant 8,5$.
On a créé, en langage Python, la fonction `alpha` suivante.
On précise qu'en langage Python, l'instruction `log` correspond à ln.

```
def f(x) :
    return log(8*x**3 -
       1)

def alpha(a):
    n = 0
    u = 5
    while u < a:
        u = f(u)
        n = n + 1
    return n
```

1. On admet que `alpha(8.499)` renvoie la valeur 11.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Un utilisateur exécute `alpha(8.6)`.
Expliquer pourquoi aucune valeur n'est alors renvoyée.

Corrigé

Partie A

1. On pourrait justifier que la fonction polynôme $u : x \longmapsto 8x^3 - 1$ est dérivable,
avec $u' : x \longmapsto 24x^2 > 0$ sur l'intervalle $[4;10]$ donc croissante sur cet intervalle.
$u(4) = \ln(511) > 0$, ce qui montre l'existence de la fonction f sur l'intervalle $[4;10]$ et par suite la dérivabilité de cette fonction en tant que fonction composée : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{24x^2}{8x^3-1}$.
Comme $(2x-1)(4x^2+2x+1) = 8x^3 + 4x^2 + 2x - 4x^2 - 2x - 1 = 8x^3 - 1$,
on a bien : $f'(x) = \dfrac{24x^2}{(2x-1)(4x^2+2x+1)}$.

2. a. D'après la question précédente $f'(x) = \dfrac{24x^2}{(2x-1)(4x^2+2x+1)}$.
Or pour $x \geqslant 4$:

- $24x^2 > 0$;
- $2x - 1 > 0$;
- $4x^2 + 2x + 1 > 0$ comme somme de termes supérieurs à zéro sur $[4;10]$,

$f'(x) > 0$: la fonction f est croissante sur $[4;10]$ de $f(4) = \ln 511 \approx 6,236$ à $f(10) = \ln 7999 \approx 8,99 < 10$.

b. En résumé si $4 \leqslant x \leqslant 10$, alors $f(4) \leqslant f(x) \leqslant f(10)$ donc d'après ce qui précède : $4 \leqslant f(x) \leqslant 10$.

3. a. Sur l'intervalle $[4;10]$:

- la fonction g est continue car dérivable sur cet intervalle ;
- g est strictement décroissante ;
- 0 est une valeur comprise entre $\quad g(4) = f(4) - 4 \approx 2,236 \quad$ et $\quad g(10) = f(10) - 10 \approx -1,013$.

D'après le corollaire du théorème sur les valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in [4;10]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

b. La calculatrice donne successivement : $8 < \alpha < 9$; $\quad 8,4 < \alpha < 8,5$;
$8,49 < \alpha < 8,50$; $\quad 8,499 < \alpha < 8,500$ encadrement de α au millième près.

Partie B

1. $u_1 = f(u_0) = f(5) = \ln\left(8 \times 5^3 - 5\right) = \ln 999 \approx 6,91$.

2. a. *Initialisation* :

On a calculé que si $u_0 = 5$, alors $u_1 \approx 6,91$.

On a bien $4 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 10$.

L'encadrement est vrai au rang $n = 0$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$; la fonction f étant croissante sur l'intervalle $[4\,;\,10]$, on a donc

$f(4) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1} \leqslant f(10)$.

Comme $f(4) > 4$, $f(10) < 10$, que $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1} = u_{n+2}$, l'encadrement devient :

$4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 10$: l'encadrement est donc vrai au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang $n = 0$ et s'il est vrai au rang $n \geqslant 0$, il l'est encore au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :

quel que soit $n \in \mathbb{N}$: $\quad 4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

b. L'inégalité centrale montre que la suite (u_n) est croissante et la borne de droite montre que la suite (u_n) est majorée par 10 : croissante et majorée la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \leqslant 10$.

3. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, que f est continue sur $[4\,;\,10]$, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ tel que $\ell = f(\ell) \iff f(\ell) - \ell = 0 \iff g(\ell) = 0$.

Conclusion le nombre ℓ est solution sur $[4\,;\,10]$ de l'équation $g(x) = 0$ résolue à la question **3.** partie B, donc finalement $\ell = \alpha$.

Partie C

1. `alpha(8.499)` renvoie 11 signifie que c'est à partir du rang $n = 11$, que $u_n \geqslant 8,499$.

2. On a vu que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n < 8,6$: donc l'algorithme ne trouvera jamais un rang tel que $u_n > 8,6$: il ne donnera donc aucun rang.

Exercice 4.

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(3x^2+1)$$

On admet que la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

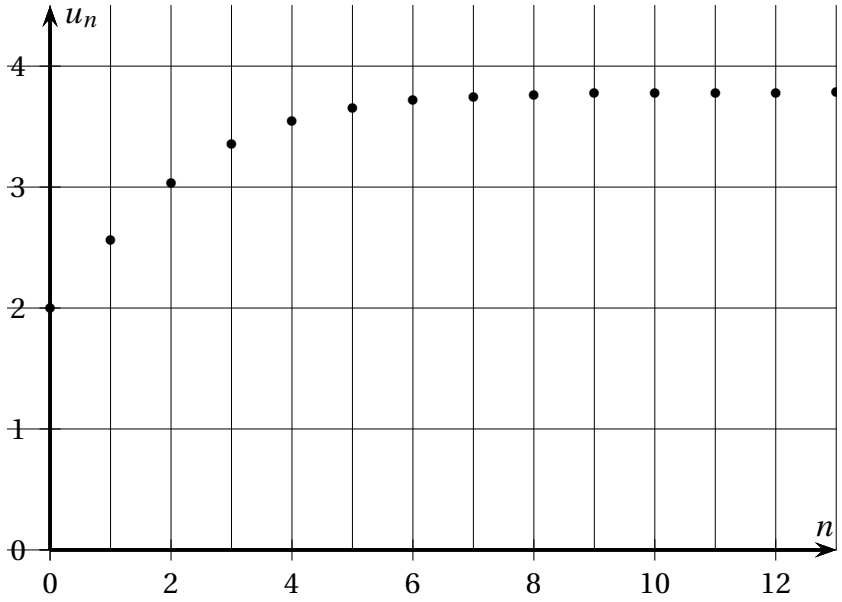
Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier } n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \ln\left(3u_n^2+1\right).$$

1. Calculer u_1.

2. La suite (u_n) est représentée ci-dessous. Émettre des conjectures sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).



3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Partie B

On note ℓ la limite de la suite (u_n).
Le but de cette partie est de trouver une valeur approchée de la limite ℓ.
On considère la fonction g définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(3x^2+1) - x.$$

1. On note g' la fonction dérivée de la fonction g.
Démontrer que pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{-3x^2+6x-1}{3x^2+1}.$$

2. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur $[2\,;\,4]$.

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2\,;\,4]$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. Justifier que $\ell = \alpha$.

Corrigé

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(3x^2+1\right)$.
On admet que la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

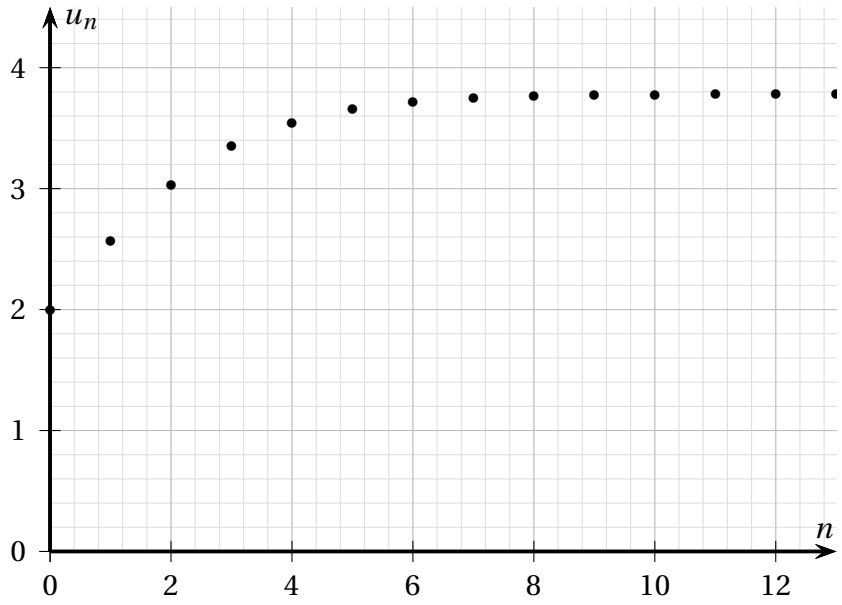
Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2 \quad$ et $\forall\, n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \ln\left(3u_n^2+1\right)$.

1. $u_1 = \ln\left(3u_0^2+1\right) = \ln\left(3\times 2^2+1\right) = \ln(13)$

2. La suite (u_n) est représentée ci-dessous.

Au vu de la représentation graphique de la suite, on peut conjecturer qu'elle est croissante, et qu'elle est convergente vers une limite inférieure ou égale à 4.



3. On va démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

On appelle $\mathscr{P}_n$ cette propriété.

- **Initialisation**

  Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = \ln(13) \approx 2{,}56$.

  Donc $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$; $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité**

  On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire : $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

$$
\begin{aligned}
& 2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4 \\
\iff \quad & 2^2 \leqslant u_n^2 \leqslant u_{n+1}^2 \leqslant 4^2 \\
& \qquad \text{car la fonction carré est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\
\iff \quad & 3 \times 2^2 \leqslant 3u_n^2 \leqslant 3u_{n+1}^2 \leqslant 3 \times 4^2 \qquad \text{on multiplie par 3} \\
\iff \quad & 12 \leqslant 3u_n^2 \leqslant 3u_{n+1}^2 \leqslant 48 \\
\iff \quad & 13 \leqslant 3u_n^2 + 1 \leqslant 3u_{n+1}^2 + 1 \leqslant 49 \qquad \text{on ajoute 1} \\
\iff \quad & \ln(13) \leqslant \ln\left(3u_n^2 + 1\right) \leqslant \ln\left(3u_{n+1}^2 + 1\right) \leqslant \ln(49) \\
& \qquad \text{car la fonction ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
\iff \quad & \ln(13) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \ln(49)
\end{aligned}
$$

$\ln(13) \approx 2,56 \geqslant 2$ et $\ln(49) \approx 3,85 \leqslant 4$ donc on a : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$

ce qui veut dire que la propriété est vraie au rang $n+1$ donc $\mathscr{P}_n \implies \mathscr{P}_{n+1}$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie pour $n = 0$. Elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$. Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

4. D'après la question précédente :

- $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n, donc la suite (u_n) est croissante ;
- $u_n \leqslant 4$ pour tout n, donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

Si on appelle ℓ la limite de la suite (u_n), d'après la question précédente, on peut déduire que $2 \leqslant \ell \leqslant 4$.

Partie B

On considère la fonction g définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \ln(3x^2+1) - x$.

1. Pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{6x}{3x^2+1} - 1 = \frac{6x - 3x^2 - 1}{3x^2+1} = \frac{-3x^2+6x-1}{3x^2+1}$$

2. On détermine le signe de $g'(x)$.

$3x^2 + 1 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $-3x^2+6x-1$. On étudie le signe de ce trinôme.

$\Delta = 6^2 - 4 \times (-3) \times (-1) = 36 - 12 = 24 > 0$ donc ce trinôme admet deux racines :

$$x' = \frac{-6+\sqrt{24}}{2\times(-3)} = \frac{-6+\sqrt{24}}{-6} = \frac{6-\sqrt{24}}{6} \approx 0,18 \text{ et } x'' = \frac{-6-\sqrt{24}}{2\times(-3)} = \frac{6+\sqrt{24}}{6} \approx 1,82$$

On en déduit le signe du trinôme donc de $g'(x)$.

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a		
$-3x^2+6x-1$	$-$	0	$+$	0	$-$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		

Sur l'intervalle $]x''\,;\,+\infty[$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante.

Or $x'' \approx 1,82 < 2$.

Donc l'intervalle $[2\,;\,4]$ est inclus dans $]x''\,;\,+\infty[$, donc $g'(x) < 0$ sur cet intervalle.

On peut donc conclure que g est strictement décroissante sur l'intervalle $[2\,;\,4]$.

3. On a :

- $g(2) \approx 0,56 > 0$;
- $g(4) \approx -0,11 < 0$;
- g est strictement décroissante sur $[2\,;\,4]$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut conclure que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[2\,;\,4]$.

On appelle α cette solution. À la calculatrice on trouve $\alpha \approx 3,78$.

4. La suite (u_n) est définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geqslant 0$.

La fonction f est dérivable donc continue.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(\ell)$

Or la limite d'une suite est unique donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On en déduit que $f(\ell) = \ell$ et donc que ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$ c'est-à-dire $f(x) - x = 0$ ou encore $g(x) = 0$.

On a noté plus haut que $2 \leqslant \ell \leqslant 4$ donc ℓ est une solution de l'équation $g(x) = 0$ appartenant à l'intervalle $[2\,;\,4]$.

On en déduit donc que $\ell = \alpha$.

Exercice 5.

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.
La notice du médicament indique que :

- le traitement doit durer au moins 7 h ;
- lorsque sa quantité, en mg, présente dans le sang est supérieure ou égale à 3 mg, il y a un risque de toxicité.

On s'intéresse à la quantité de médicament présente dans le sang au cours du temps sachant que le patient reçoit une première dose de 1 mg.
Deux protocoles sont étudiés dans les deux parties qui sont indépendantes.

Partie A : étude du premier protocole

Après l'injection de la première dose, une quantité supplémentaire de médicament est administrée régulièrement et de façon continue à un patient mis sous perfusion.
Dans cette partie, on modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient par une fonction q définie sur $[0\,;\,+\infty[$, où $q(t)$ désigne la quantité, en mg, de médicament présente dans le sang du patient, et t représente le temps, en heure, écoulé depuis l'injection initiale. On a ainsi $q(0) = 1$.
On admet que :

- la fonction q est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note q' sa fonction dérivée ;
- la fonction q est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E) :

$$y' = -\frac{3}{10}y + 1$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1. Donner les solutions sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle (E).
2. Montrer que pour tout réel t appartenant à $[0\,;\,+\infty[$, $q(t) = \dfrac{10}{3} - \dfrac{7}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t}$.
3. Déterminer la limite de la fonction q en $+\infty$. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. Étudier les variations de la fonction q sur $[0\,;+\infty[$.
5. Déterminer, en résolvant une inéquation, au bout de combien de temps après l'injection initiale le médicament présente un risque pour le patient. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-1}.
6. D'après ce modèle, le protocole présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Partie B : étude du second protocole

On injecte au patient une première dose de médicament de 1 mg. On admet que la quantité de médicament présente dans le sang du patient baisse de 30 % toutes les heures. Pour compenser cette baisse, on injecte une dose supplémentaire de 0,75 mg de médicament toutes les heures.
On modélise la situation par une suite (u_n), où, pour tout entier naturel n, u_n représente la quantité, en mg, de médicament présente dans le sang du patient au bout de n heures écoulées depuis l'injection initiale.
Sous ces conditions, on a $u_0 = 1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 0,75$.
2. **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
   d. D'après ce modèle, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 2,5$.
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,7^n$.
4. D'après ce modèle, au bout de combien d'injections supplémentaires la quantité de médicament présente dans le sang de ce patient dépasse-t-elle 2,4 mg ?

Corrigé

Partie A : étude du premier protocole

1. L'équation différentielle (E) : $y' = -\dfrac{3}{10}y + 1$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -\dfrac{3}{10}$ et $b = 1$.

   Les solutions sont donc les fonctions de la forme $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{at} - \dfrac{b}{a}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

   or : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{-\dfrac{3}{10}} = -\dfrac{10}{3}$.

   Sur $[0;+\infty[$, les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions de la forme : $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} + \dfrac{10}{3}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2. La fonction q est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E), donc il existe un réel C tel que pour tout réel positif t, $\quad q(t) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} + \dfrac{10}{3}$.

Or on sait $q(0) = 1$ donc $\quad C\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}\times 0} + \dfrac{10}{3} = 1$.

D'où $\quad C + \dfrac{10}{3} = 1 \quad$ soit $\quad C = 1 - \dfrac{10}{3} = -\dfrac{7}{3}$.

Finalement, pour tout réel t appartenant à $[0;+\infty[$, $\quad q(t) = -\dfrac{7}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} + \dfrac{10}{3}$.

3. $\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} -\dfrac{3}{10}t = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0 \end{cases}$ donc, par composition $\quad \lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} = 0$

par produit et somme, on a donc $\quad \lim\limits_{t\to+\infty} -\dfrac{7}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} + \dfrac{10}{3} = \dfrac{10}{3}$.

On a donc : $\quad \lim\limits_{t\to+\infty} q(t) = \dfrac{10}{3}$.

Dans le contexte de l'exercice, à long terme, la quantité de médicament présente dans le sang du patient se stabilisera vers $\dfrac{10}{3}$ mg.

4. Pour étudier les variations de la fonction q sur $[0;+\infty[$, étudions le signe de sa dérivée.

Pour tout réel positif t, $\quad q'(t) = -\dfrac{7}{3} \times \dfrac{-3}{10}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} = \dfrac{7}{10}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t}$.

Or, une exponentielle est toujours strictement positive, donc pour tout réel positif t, $\quad q'(t) > 0$.

La fonction q est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

5. Déterminons au bout de combien de temps après l'injection initiale le médicament présente un risque pour le patient.

On sait qu'il y a un risque lorsque la quantité présente dans le sang est supérieure ou égale à 3 mg.

Nous allons donc résoudre l'inéquation $q(t) \geqslant 3$.

$$\begin{aligned}
q(t) \geqslant 3 &\iff \frac{10}{3} - \frac{7}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} \geqslant 3 \\
&\iff \frac{10}{3} - 3 \geqslant \frac{7}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} \\
&\iff \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} \quad \text{car } \frac{3}{7} > 0 \\
&\iff \ln\left(\frac{1}{7}\right) \geqslant -\frac{3}{10}t \quad \text{car la fonction ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+*} \\
&\iff -\ln(7) \geqslant -\frac{3}{10}t \\
&\iff -\ln(7) \times \frac{-10}{3} \leqslant t \quad \text{car } -\frac{10}{3} < 0 \\
&\iff \frac{10\ln(7)}{3} \leqslant t
\end{aligned}$$

Le médicament présente un risque pour le patient $\dfrac{10\ln(7)}{3}$ heures, soit environ 6,5 heures après l'injection initiale.

6. Le traitement devant durer au moins 7 heures, le protocole présente un risque pour le patient car la concentration dépassera les 3 mg avant la fin du traitement.

Partie B : étude du second protocole

1. La quantité de médicament présente dans le sang du patient baisse de 30 % toutes les heures donc elle est multipliée par $1-\dfrac{30}{100}$ soit 0,7.

Pour compenser cette baisse, on injecte une dose supplémentaire de 0,75 mg de médicament toutes les heures donc on ajoute 0,75.

On a donc, pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1}=0,7\times u_n+0,75$.

2. a. Pour tout entier naturel n, on pose P_n l'affirmation : « $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ ».

- **Initialisation :** Pour $n=0$, on a :
  $u_0=1$ et $u_1=0,7\times u_0+0,75=0,7\times 1+0,75=1,45$
  On a bien $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$
  L'affirmation P_0 est vraie.
- **Hérédité :** soit n un entier naturel ($n \geqslant 0$), on suppose que pour cet entier n, l'affirmation P_n est vraie.
  P_n est vraie $\implies u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$
  $\implies 0,7\times u_n \leqslant 0,7\times u_{n+1} \leqslant 0,7\times 4 \quad$ car $\quad 0,7>0$
  $\implies 0,7\times u_n+0,75 \leqslant 0,7\times u_{n+1}+0,75 \leqslant 0,7\times 4+0,75$
  $\implies u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3,55 \leqslant 4$
  $\implies P_{n+1}$ est vraie
- **Conclusion :** la propriété P_0 est vraie, et pour n entier naturel, la véracité de P_n est héréditaire, donc par principe de récurrence :
  Pour tout entier naturel n, P_n est vraie, c'est-à-dire : $\quad u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

b. Pour tout entier naturel n : $\quad u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n : $\quad u_n \leqslant 4$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente vers une limite ℓ telle que $1 \leqslant \ell \leqslant 4$.

c. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=0,7x+0,75$, $\quad$ une fonction affine, donc continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ.

D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est donc solution de l'équation $\quad f(x)=x$.

Résolvons l'équation : $\quad x=0,7x+0,75 \iff x-0,7x=0,75$

$$\iff 0,3x=0,75$$
$$\iff x=\frac{0,75}{0,3}$$
$$\iff x=2,5$$

La suite (u_n) a pour limite $\ell=2,5$.

d. La suite (u_n) est croissante donc elle est majorée par sa limite : pour tout entier n, $\quad u_n \leqslant 2,5$.

D'après ce modèle, le traitement ne présente donc pas de risque pour le patient, car, quelle que soit la durée du traitement, la quantité de médicament sera toujours inférieure ou égale à 2,5 mg soit en dessous de la quantité toxique.

3. a. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n-2,5$.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2,5$

$$\begin{aligned} &= 0,7u_n + 0,75 - 2,5 \\ &= 0,7 \times (v_n + 2,5) - 1,75 \\ &= 0,7 \times v_n + 1,75 - 1,75 \\ &= 0,7v_n. \end{aligned}$$

On reconnaît la relation de récurrence d'une suite géométrique : la suite (v_n) est donc une suite géométrique, de raison $q = 0,7$ et de terme initial $v_0 = u_0 - 2,5 = 1 - 2,5 = -1,5$.

b. Par propriété des suites géométriques, le terme général de la suite (v_n) est donc : $v_n = v_0 \times q^n$

Donc, pour tout entier naturel n, $v_n = -1,5 \times 0,7^n$.

D'où $u_n = v_n + 2,5 = -1,5 \times 0,7^n + 2,5$.

On a bien, pour tout entier naturel n, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,7^n$.

4. La quantité de médicament présente dans le sang de ce patient dépassera 2,4 mg lorsque $u_n > 2,4$.

Résolvons cette inéquation : $u_n > 2,4$

$$\begin{aligned} &\iff 2,5 - 1,5 \times 0,7^n > 2,4 \\ &\iff 2,5 - 2,4 > 1,5 \times 0,7^n \\ &\iff \frac{0,1}{1,5} > 0,7^n \\ &\iff \ln\left(\frac{1}{15}\right) > \ln\left(0,7^n\right) \\ &\iff -\ln(15) > n\ln(0,7) \\ &\iff \frac{-\ln(15)}{\ln(0,7)} < n \quad \text{car } \ln(0,7) < 0. \end{aligned}$$

or $\frac{-\ln(15)}{\ln(0,7)} \approx 7,59$, donc, d'après ce modèle, la quantité de médicament présente dans le sang de ce patient dépassera 2,4 mg au bout de 8 injections supplémentaires.

Exercice 6.

On étudie le fonctionnement d'un système de chauffage installé dans une pièce.
Ce système se déclenche automatiquement dès que la température de la pièce est inférieure ou égale à 18 °C (degrés Celsius), et s'éteint lorsqu'elle atteint 20 °C.

Partie A : Phase de chauffage

Pour une température de la pièce variant de 18 °C à 20 °C, le système de chauffage fonctionne en continu. La température de la pièce augmente progressivement.
Dans cette partie, on modélise la température de la pièce, en degré Celsius, à l'instant t, exprimé en dizaines de minutes, par une fonction T définie sur $[0;+\infty[$.
On admet que la fonction T est :

- dérivable sur $[0;+\infty[$;
- solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' = -0,035y + 0,91$$

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

On note T' la fonction dérivée de la fonction T.
On suppose qu'au début de l'étude, la température de la pièce est de 18 °C.
Ainsi $T(0) = 18$.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0; +\infty[$.
2. En déduire que, pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :
$$T(t) = 26 - 8\,\mathrm{e}^{-0,035t}.$$
3. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps la pièce atteindra la température de 20 °C.
On exprimera le résultat en heures et minutes arrondi à la minute.
4. Si une panne du système de chauffage l'empêche de s'éteindre lorsque la température de la pièce atteint 20 °C, la température de la pièce pourra-t-elle dépasser 28 °C selon ce modèle ?
Justifier.

Partie B : Phase de refroidissement

Lorsque la pièce atteint la température de 20 °C, le système de chauffage s'éteint et la pièce refroidit.
On modélise la température de la pièce par la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07\,\mathrm{e}^{-0,1n},$$
où n est un nombre entier exprimant le temps écoulé en dizaines de minutes.

1. Montrer que $u_1 = 19,72$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a
$$u_n > 10.$$

On admet que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
   a. Justifier que cette limite est solution de l'équation
   $$x = 0,965x + 0,35.$$
   b. Déterminer ℓ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. On rappelle que le système de chauffage se met en marche automatiquement dès que la température de la pièce, est inférieure ou égale à 18 °C.
   a. Recopier et compléter les lignes 4,5 et 6 du programme écrit en langage Python ci-dessous, afin qu'il renvoie le nombre de dizaines de minutes à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

```
1. def marche() :
2.   n = 0
3.   u = 20
4.   while ...:
5.     u = ...
6.     n = ...
7.   return n
```

   b. Déterminer le temps, en dizaines de minutes, à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

Corrigé

Partie A : Phase de chauffage

1. On a une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$, où a et b sont des réels non nuls.

La solution particulière constante de l'équation (E) est : $t \longmapsto \dfrac{-b}{a}$.

Or $\dfrac{-0,91}{-0,035} = 26$.

La solution particulière constante de (E) sur $[0;+\infty[$ est donc : $t \longmapsto 26$.

Par propriété, les solutions générales de (E) sur $[0;+\infty[$ sont de la forme : $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-0,035t} + 26$,

où C est un réel quelconque.

2. La fonction T est donc une de ces solutions, donc on connaît sa forme générale, établie ci-avant.

Pour déterminer la constante C, on va utiliser la condition initiale : $T(0) = 18$.

$$\begin{aligned} T(0) = 18 &\iff C\,\mathrm{e}^{-0,035\times 0} + 26 = 18 \\ &\iff C\,\mathrm{e}^{0} = 18 - 26 \\ &\iff C \times 1 = -8 \\ &\iff C = -8 \end{aligned}$$

Cela confirme bien que, pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, on a :

$$T(t) = 26 - 8\,\mathrm{e}^{-0,035t}.$$

3. Selon ce modèle, le temps au bout duquel la pièce atteindra la température de 20 °C est la solution de l'équation : $T(t) = 20$.

Résolvons cette équation : $T(t) = 20$

$$\begin{aligned} &\iff 26 - 8\,\mathrm{e}^{-0,035t} = 20 \\ &\iff -8\,\mathrm{e}^{-0,035t} = -6 \\ &\iff \mathrm{e}^{-0,035t} = 0,75 \\ &\iff -0,035\,t = \ln(0,75) \\ &\iff t = \frac{\ln(0,75)}{-0,035} \end{aligned}$$

$\dfrac{\ln(0,75)}{-0,035} \approx 8,22$.

Le temps est exprimé en dizaine de minutes. 8,22 dizaines de minutes, correspondent, à la minute près à 82 minutes, soit 1 heure et 22 minutes.

À la minute près, il faut donc 1 heure et 22 minutes pour que la température atteigne les 20 °C.

4. Pour les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ avec un coefficient a strictement négatif (ce qui est le cas ici, $a = -0,035$), on sait par propriété que les courbes de fonctions vont admettre comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ la droite représentant la solution particulière constante, soit ici la droite d'équation $y = 26$.

De plus, on sait aussi que les solutions sont strictement monotones.

Or, ici, on a $T(0) = 18 < \lim\limits_{t\to+\infty} T(t) = 26$

donc la fonction T est strictement monotone et ne peut pas être décroissante : elle est croissante (logique, en phase de chauffage, la température monte).

T est donc une fonction strictement croissante, tendant vers 26 : elle est donc majorée par 26.

Si une panne du système de chauffage l'empêche de s'éteindre lorsque la température de la pièce atteint 20 °C, la température de la pièce ne pourra donc pas dépasser 26 °C, et donc encore moins 28 °C.

Remarque : On peut aussi, plus simplement dire que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives et donc, pour tout réel t positif :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-0,035t} > 0 &\Longrightarrow -8\,\mathrm{e}^{-0,035t} < 0 \quad \text{car } -8 < 0 \\ &\Longrightarrow 26 - 8\,\mathrm{e}^{-0,035t} < 26 \\ &\Longrightarrow T(t) < 26 \end{aligned}$$

Et donc la température est majorée par 26 °C, ce qui permet de conclure aussi.

Partie B : Phase de refroidissement

1. D'après la relation de récurrence, appliquée avec $n = 0$:

$u_1 = u_{0+1} = 0,965u_0 + 0,35 + 0,07\,\mathrm{e}^{-0,1\times 0} = 0,965 \times 20 + 0,35 + 0,07 \times 1 = 19,3 + 0,35 + 0,07 = 19,72$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose P_n l'affirmation : « $u_n > 10$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 20 > 10$.
  L'affirmation P_0 est vraie.
- **Hérédité :** soit n un entier naturel ($n \geqslant 0$), on suppose que pour cet entier n, l'affirmation P_n est vraie.

  $$\begin{aligned} P_n \text{ est vraie} &\Longrightarrow u_n > 10 \\ &\Longrightarrow 0,965u_n > 9,65 \quad \text{car} \quad 0,965 > 0 \\ &\Longrightarrow 0,965u_n + 0,35 > 9,65 + 0,35 \\ &\Longrightarrow 0,965u_n + 0,35 > 10 \\ &\Longrightarrow 0,965u_n + 0,35 + 0,07\,\mathrm{e}^{-0,1n} > 10 \quad \text{car} \quad 0,07\,\mathrm{e}^{-0,1n} > 0 \\ &\Longrightarrow u_{n+1} > 10 \\ &\Longrightarrow P_{n+1} \text{ est vraie} \end{aligned}$$

- **Conclusion :** la propriété P_0 est vraie, et pour n entier naturel, elle est héréditaire, donc par principe de récurrence :
  Pour tout entier naturel n, P_n est vraie, c'est-à-dire : $u_n > 10$.

Autrement dit la suite (u_n) est strictement minorée par 10.

3. La suite est décroissante (admis) et minorée par 10, donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite supérieure ou égale à 10, notée ℓ.

4. **a.** On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

La suite de terme général (u_{n+1}), avec les mêmes termes, mais décalés d'un rang, aura la même limite ℓ.

Mais comme pour tout n naturel, on a : $u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07\,\mathrm{e}^{-0,1n}$, on a aussi :

- Par limite du produit et de la somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,965u_n + 0,35 = 0,965\ell + 0,35$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} -0,1n = -\infty$ et donc, par composition : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,1n} = \lim\limits_{y\to-\infty} \mathrm{e}^{y} = 0$;

Ainsi, par limite de la somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,965u_n + 0,35 + 0,07\,\mathrm{e}^{-0,1n} = 0,965\ell + 0,35$.

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0,965\ell + 0,35$.

Or on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.

Par unicité de la limite, on doit donc avoir : $\ell = 0,965\ell + 0,35$.

La limite ℓ est donc solution de l'équation $x = 0,965x + 0,35$.

Remarque : ici, on a l'esprit du théorème du point fixe, mais on ne peut pas l'appliquer directement, car la relation de récurrence de la suite (u_n) fait intervenir à la fois le terme précédent, mais aussi son indice.

Il n'y a donc pas une fonction f unique qui permettrait d'écrire $u_{n+1} = f(u_n)$, cette fonction dépendant aussi de n.

b. Résolvons l'équation :
$$\begin{aligned} x = 0,965x + 0,35 &\iff x - 0,965x = 0,35 \\ &\iff 0,035x = 0,35 \\ &\iff x = \frac{0,35}{0,035} \\ &\iff x = 10 \end{aligned}$$

L'équation n'a qu'une solution, 10, donc la suite tend vers 10.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'avec une durée sans chauffage très longue, la température de la pièce se rapproche de et se stabilise aux environs de 10 °C.

5. **a.** Le programme va utiliser la variable `n` pour stocker les indices et `u` pour stocker le terme correspondant de la suite (u_n).

Tant que le terme est supérieur strictement à 18, alors la température ne nécessite pas de remettre en route le chauffage, et donc on calcule le terme et l'indice suivant.

Cela donne :

```
1. def marche() :
2.   n = 0
3.   u = 20
4.   while u > 18 :
5.     u = 0.965*u+0.35 +
   0.07*exp(-0.1*n)
6.     n = n+1
7.   return n
```

Remarque : pour que ce programme fonctionne, il faut d'abord invoquer la fonction exponentielle, fournie par la librairie `math`, avec la ligne `from math import exp`.

b. On explore à la calculatrice les premiers termes de la suite.

On constate que $u_8 \approx 17,87$ quand les termes précédents sont tous strictement supérieurs à 18.

La fonction va renvoyer 8, donc il faudra huit dizaines de minutes (arrondi par excès) pour que le système de chauffage se remettra en marche.

Exercice 7.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. On considère l'équation différentielle suivante où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$(E) : \quad y' + y = 2\cos(x)$$

Affirmation 1 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4\,\mathrm{e}^{-x} + \cos(x) + \sin(x)$ est solution de l'équation différentielle (E).

2. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ et $g(x) = \sin(x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère et $\mathscr{C}_g$ celle de la fonction g.
Affirmation 2 : Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un seul point d'intersection.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{2n + \sin(n)}{n+1}$$

Affirmation 3 : La suite (v_n) diverge.

4. On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1$$

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 on a $u_n = n^2$.

5. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \mathrm{e}^{-n}$.
On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
Affirmation 5 : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$

Corrigé

1. L'affirmation 1 est vraie
Pour tout réel x, $f'(x) = -4\,\mathrm{e}^{x} - \sin(x) + \cos(x)$
Donc pour tout réel x, $f'(x) + f(x) = -4\,\mathrm{e}^{x} - \sin(x) + \cos(x) + 4\,\mathrm{e}^{-x} + \cos(x) + \sin(x) = 2\cos(x)$
donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4\,\mathrm{e}^{-x} + \cos(x) + \sin(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = 2\cos(x)$.

2. L'affirmation 2 est vraie
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ et $g(x) = \sin(x)$.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - g(x) = 2x - \sin(x)$.
On aura $f(x) = g(x)$ si et seulement si $h(x) = 0$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a $h'(x) = 2 - \cos(x)$.

Or pour tout réel x, $\cos(x) \leqslant 1$ donc $h'(x) > 0$.

On en déduit que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

De plus $h(0) = 2 \times 0 - \sin(0) = 0 - 0 = 0$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution qui sera unique d'après la stricte monotonie..

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un seul point d'intersection, le point d'abscisse 0.

3. L'affirmation 3 est fausse

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{2n + \sin(n)}{n+1}$$

Pour tout entier n :

$$\begin{aligned}
-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1 &\Longrightarrow 2n - 1 \leqslant 2n + \sin(n) \leqslant 2n + 1 \\
&\Longrightarrow \frac{2n-1}{n+1} \leqslant \frac{2n+\sin(n)}{n+1} \leqslant \frac{2n+1}{n+1} \quad \text{car } n+1 > 0 \\
&\Longrightarrow \frac{2n+2-3}{n+1} \leqslant \frac{2n+\sin(n)}{n+1} \leqslant \frac{2n+2-1}{n+1} \\
&\Longrightarrow 2 - 3 \times \frac{1}{n+1} \leqslant v_n \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc, par somme et produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - 3 \times \dfrac{1}{n+1} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{n+1} = 2$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$

La suite (v_n) converge vers 2.

4. L'affirmation 4 est vraie

Pour tout entier naturel non nul n, posons P_n l'affirmation : « $u_n = n^2$ ».

Démontrons par récurrence que les affirmations P_n sont toutes vraies.

- **Initialisation :** On a d'une part : $u_1 = 1$;
  et d'autre part : $1^2 = 1$.
  On constate donc que l'affirmation P_1 est vraie.
- **Hérédité :** Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie.
  $$\begin{aligned}
  P_n \text{ est vraie} &\Longrightarrow u_n = n^2 \\
  &\Longrightarrow u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 \\
  &\Longrightarrow u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 \quad \text{en utilisant la relation de récurrence de } (u_n) \\
  &\Longrightarrow u_{n+1} = (n+1)^2 \\
  &\Longrightarrow P_{n+1} \text{ est vraie.}
  \end{aligned}$$
- **Conclusion :** On a montré que l'affirmation P_1 est vraie, et que pour un n entier naturel non nul, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.
  En vertu du principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel non nul n, l'affirmation est vraie, et donc on a établi une expression explicite du terme général de la suite (u_n) :
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n^2$$

Autre démonstration

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $v_n = n^2$.

- $v_1 = 1^2 = 1$
- $v_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = v_n + 2n + 1$

Les suites (u_n) et (v_n) ont le même premier terme $u_1 = v_1 = 1$, et verifient la même relation de récurrence, donc elles sont identiques. On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $u_n = n^2$.

5. L'affirmation 5 est vraie

Pour tout entier naturel n, par $u_n = \mathrm{e}^{-n} = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$, donc la suite u est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

S_n est donc la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique.

On a donc, pour tout entier n, $S_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \dfrac{1-\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \times \left(1-\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{n+1}\right)$

Or $0 < \mathrm{e}^{-1} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{n+1} = 0$

donc, par somme et produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$

Exercice 8.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty; \dfrac{3}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$$

1. Justifier tous les éléments du tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$
f	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

2. En déduire que pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$f(x) \in [0;1].$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n - 3}, \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. En utilisant la fonction f, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

En admettant que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0;1]$, montrer que $\ell = 1$.

4. On donne ci-dessous une fonction `seuil` écrite en langage Python.

```
def seuil(h):
  n = 0
  u = 0
  while u < 1-h:
    n = n+1
    u = (u-2)/(2*u-3)
  return n
```

L'appel `seuil(0.0001)` renvoie la valeur 5 000.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

5. **a.** Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n) sous forme de fractions irréductibles.

b. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n et démontrer cette conjecture.

Corrigé

Partie A

1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-2}{2x-3}$ est dérivable sur $]-\infty\,;\,\frac{3}{2}[$ en tant que quotient de fonctions polynomiales, le dénominateur étant non nul. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (2x-3) - (x-2) \times 2}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{2x - 3 - 2x + 4}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{1}{(2x-3)^2} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]-\infty\,;\,\frac{3}{2}[$, $(2x-3)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$. La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\frac{3}{2}[$.

Étudions les limites de f aux bornes de son ensemble de définition :

- Limite en $-\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-2}{2x-3} \\ &= \frac{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(2-\dfrac{3}{x}\right)} \\ &= \frac{1-\frac{2}{x}}{2-\frac{3}{x}}, \end{aligned}$$

donc puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$ (quotient de limites)

- Limite en $\frac{3}{2}$, $x < \frac{3}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to\frac{3}{2}\\ x<\frac{3}{2}}} x-2 = -\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{\substack{x\to\frac{3}{2}\\ x<\frac{3}{2}}} 2x-3 = 0^- \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x\to\frac{3}{2}\\ x<\frac{3}{2}}} f(x) = +\infty \text{ (quotient de limites)}$$

On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$+$	
f	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Sur l'intervalle $[-\infty\,;\,\frac{3}{2}]$, donc a fortiori sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ la fonction f est strictement croissante. Ainsi :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant 1 &\Longrightarrow f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) \\ &\Longrightarrow \frac{-2}{-3} \leqslant f(x) \leqslant \frac{-1}{-1} \\ &\Longrightarrow \frac{2}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1 \end{aligned}$$

Puisque $\frac{2}{3} \geqslant 0$, on en déduit que pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\,;\,1]$.

Partie B

1. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = \frac{2}{3}$. On a bien $0 \leqslant 0 \leqslant \frac{2}{3} \leqslant 1$, soit $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$. La propriété est initialisée.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$
  La fonction f étant strictement croissante sur $[0\,;\,1]$, elle conserve l'ordre, on a donc :

$$\begin{array}{rl} & 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 \\ \Longrightarrow & f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1) \\ \Longrightarrow & \frac{2}{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1 \end{array}$$

  Comme $0 \leqslant \frac{2}{3}$, on obtient $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$. L'encadrement est vrai au rang $n+1$.
- **Conclusion :** L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang supérieur ou égal à 0, il l'est aussi au rang suivant : par le principe de récurrence :
  Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

2. Le résultat précédent montre :
– que $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc que la suite (u_n) est croissante et
– majorée par 1 puisque tous ses termes le sont.
D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite réelle ℓ vérifiant $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

3. La fonction f étant continue, la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x-2}{2x-3} = x & \iff & x-2 = x(2x-3) \\ & \iff & x-2 = 2x^2-3x \\ & \iff & 2x^2-4x+2 = 0 \\ & \iff & 2(x-1)^2 = 0 \\ & \iff & (x-1)^2 = 0 \\ & \iff & (x-1) = 0 \\ & \iff & x = 1 \end{array}$$

On en déduit que $\ell = 1$ et donc que la suite (u_n) converge vers 1.

4. La fonction `seuil(0.0001)` renvoie la plus petite valeur de l'entier n telle que $u_n \geqslant 1 - 0{,}000\,1$, c'est-à-dire $u_n \geqslant 0{,}999\,9$. La valeur 5 000 signifie que c'est à partir du rang $n = 5\,000$ que les termes de la suite dépassent 0,999 9.

5. **a.** Les premiers termes sont :

$$\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & \frac{2}{3} \\ u_2 & = & \frac{\frac{2}{3}-2}{2\left(\frac{2}{3}\right)-3} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{5} \\ u_3 & = & \frac{\frac{4}{5}-2}{2\left(\frac{4}{5}\right)-3} = \frac{-\frac{6}{5}}{-\frac{7}{5}} = \frac{6}{7} \end{array}$$

b. On peut conjecturer que $u_n = \dfrac{2n}{2n+1}$.
Démontrons-le par récurrence :

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, $\frac{2\times 0}{2\times 0+1} = \frac{0}{1} = 0 = u_0$. La propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_n = \frac{2n}{2n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f(u_n) = \frac{\frac{2n}{2n+1}-2}{2\left(\frac{2n}{2n+1}\right)-3} \\ &= \frac{\frac{2n-2(2n+1)}{2n+1}}{\frac{4n-3(2n+1)}{2n+1}} \\ &= \frac{2n-4n-2}{4n-6n-3} \\ &= \frac{-2n-2}{-2n-3} \\ &= \frac{2n+2}{2n+3} \\ &= \frac{2n+2}{2n+2+1} \\ u_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} \end{aligned}$$

  La relation est vraie au rang $n+1$.
- La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \geqslant 0$, elle l'est aussi au rang $n+1$. Par le principe de récurrence on a donc montré que :

$$\text{quel que soit } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2n}{2n+1}$$

Exercice 9.

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

2. a. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que, pour tout réel x,on a $f'(x) = \dfrac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

3. Le but de cette question est de retrouver par une autre méthode les résultats de la question **2.** de la **partie B**.

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2}$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4 dont on précisera le premier terme.

b. En déduire une expression de v_n en fonction de n puis que $u_n = \sqrt{\dfrac{1,5\times 4^n}{1+0,5\times 4^n}}$ pour tout entier naturel n.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_{n-1}^2$.

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci permette de lister les p premiers termes de la suite (S_n).

```
from math import*

def termes(p) :
    u = ...
    S=0
    L= [ ]
    for i in range(p) :
        S=...
        u= ...
        L.append(S)
    return L
```

Remarque : on rappelle qu'en langage Python,

- la commande L= [ ] crée une liste vide ;
- la commande L.append (S) ajoute, à la fin de la liste L, l'élément supplémentaire S.

2. On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a $1 \leqslant u_k \leqslant \sqrt{3}$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $n \leqslant S_n \leqslant 3n$.

3. En déduire les limites respectives de S_n et de $\dfrac{S_n}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Corrigé

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. On résout l'équation $f(x) = x$.

$$f(x) = x \iff \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = x \iff x\left(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right) = 0 \iff x\left(\frac{2-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right) = 0$$

Soit $x = 0$, soit $\dfrac{2-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 0$.

$$\frac{2-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \iff 2-\sqrt{1+x^2} = 0 \iff 2 = \sqrt{1+x^2} \iff 4 = 1+x^2 \iff 3 = x^2$$
$$\iff x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

L'équation $f(x) = x$ a pour ensemble solution $S = \{-\sqrt{3}\,;\,0\,;\,\sqrt{3}\}$.

2. a. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La dérivée de la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$, soit $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2} - 2x \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\frac{2\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 - 2x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{2+2x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$$

b. Pour tout réel x, $1+x^2 > 0$ et $\sqrt{1+x^2} > 0$, donc $f'(x) > 0$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On veut démontrer par récurrence que, pour tout n, la propriété $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$ est vraie.

- **Initialisation**

  $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = \dfrac{2\times 1}{\sqrt{1+1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < \sqrt{3}$

  Donc la propriété $1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 < \sqrt{3}$ est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité**

  On suppose que la propriété est vraie au rang n, c'est-à-dire : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$.

  La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc : $f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) < f\left(\sqrt{3}\right)$

  $f(1) = \sqrt{2} > 1$; $f(u_n) = u_{n+1}$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et

  $f\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \sqrt{3}$

  Donc on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < \sqrt{3}$, et donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout n, on a : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$.

2.
- Pour tout n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, on a : $u_n < \sqrt{3}$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, on peut déduire que la suite (u_n) est convergente.

On appelle ℓ la limite de (u_n). Comme pour tout n, $1 \leqslant u_n < \sqrt{3}$, on a : $1 \leqslant \ell \leqslant \sqrt{3}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et on sait que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue ; on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(\ell)$.
- La limite d'une suite est unique, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$.

On en déduit que $\ell = f(\ell)$ et donc que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

La seule solution vérifiant $1 \leqslant \ell \leqslant \sqrt{3}$ est $\sqrt{3}$ (voir **A.1**), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = \dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

On admet que la suite (v_n) est bien définie.

a. • $u_0 = 1$ donc $v_0 = \dfrac{u_0^2}{3-u_0^2} = \dfrac{1^2}{3-1^2} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

• $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2} = \dfrac{\left(\frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)^2}{3-\left(\frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)^2} = \dfrac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{3-\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}} = \dfrac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{\frac{3(1+u_n^2)-4u_n^2}{1+u_n^2}}$

$= \dfrac{4u_n^2}{1+u_n^2} \times \dfrac{1+u_n^2}{3+3u_n^2-4u_n^2} = \dfrac{4u_n^2}{3-u_n^2} = 4 \times \dfrac{u_n^2}{3-u_n^2} = 4v_n$

Donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 0,5$ et de raison $q = 4$.

b. • La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 0,5$ et de raison $q = 4$ donc, pour tout n, on a : $v_n = v_0 \times q^n = 0,5 \times 4^n$.

On en déduit que, pour tout n, $v_n > 0$.

• $v_n = \dfrac{u_n^2}{3-u_n^2} \iff v_n(3-u_n^2) = u_n^2 \iff 3v_n - v_n \times u_n^2 = u_n^2 \iff 3v_n = u_n^2(1+v_n)$

$\iff \dfrac{3v_n}{1+v_n} = u_n^2$

$v_n > 0$ donc $1+v_n > 0$ donc $\dfrac{3v_n}{1+v_n} > 0$ et donc $\sqrt{\dfrac{3v_n}{1+v_n}}$ existe.

De plus on sait que $1 \leqslant u_n < \sqrt{3}$ donc $u_n > 0$.

On a donc : $u_n = \sqrt{\dfrac{3v_n}{1+v_n}}$.

On en déduit que pour tout n, on a : $u_n = \sqrt{\dfrac{3 \times 0,5 \times 4^n}{1+0,5 \times 4^n}} = \sqrt{\dfrac{1,5 \times 4^n}{1+0,5 \times 4^n}}$

c. $u_n = \sqrt{\dfrac{1,5 \times 4^n}{1+0,5 \times 4^n}} = \sqrt{\dfrac{1,5 \times 4^n}{4^n\left(\frac{1}{4^n}+0,5\right)}} = \sqrt{\dfrac{1,5}{\frac{1}{4^n}+0,5}}$

D'après les propriétés des suites géométriques, on sait que si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

4>1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1,5}{\frac{1}{4^n}+0,5} = \dfrac{1,5}{0,5} = 3$

Par continuité de la fonction racine carrée, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_{n-1}^2$.

1. On complète le script Python ci-dessous afin que celui-ci permette de lister les p premiers termes de la suite (S_n).

```
from math import*

def termes(p) :
    u = 1
    S = 0
    L = [ ]
    for i in range(p) :
        S = S+u**2
        u = 2*u/sqrt(1+u**2)
        L.append(S)
    return L
```

2. On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a $1 \leqslant u_k \leqslant \sqrt{3}$. Donc : $1 \leqslant u_k^2 \leqslant 3$.
S_n est la somme de n termes compris entre 1 et 3 ; donc $n \times 1 \leqslant S_n \leqslant n \times 3$ donc $n \leqslant S_n \leqslant 3n$.

3. Calculs de limites

- $n \leqslant S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
- $n \leqslant S_n \leqslant 3n$ donc $\dfrac{n}{n^2} \leqslant \dfrac{S_n}{n^2} \leqslant \dfrac{3n}{n^2}$ donc $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{S_n}{n^2} \leqslant \dfrac{3}{n}$.
  $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n^2} = 0$.

Exercice 10.

La perche-soleil est une espèce de poisson envahissante. Un plan de lutte contre la prolifération de cette espèce est mis en place et on étudie dans cet exercice deux modèles d'évolution de la population de perches-soleil dans un étang naturel. On estime que, dans cet étang, le nombre de perches-soleil s'élève à 4 000 individus au 1er janvier 2025.

: étude d'un modèle discret

Dans cette partie, on modélise le nombre de perches-soleil dans l'étang par une suite (u_n).
Pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de perches-soleil, exprimé en millier, dans l'étang au 1er janvier de l'année $2025 + n$.
La suite (u_n) est définie par :

— $u_0 = 4$.

— pour tout entier naturel n : $\quad u_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{u_n}$.

On admet que cette suite est bien définie et qu'en particulier pour tout entier n, $\quad u_n > 0$.

1. Calculer le nombre de perches-soleil au 1er janvier 2026 donné par ce modèle.

2. On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $\quad h(x) = 4 - \dfrac{4}{x}$.

a. Justifier que la fonction h est croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

d. Justifier que $\ell = 2$.

e. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?

3. On considère le script Python ci-dessous.

a. Soit s un réel appartenant à l'intervalle $]2;4[$.

Recopier et compléter ce script de sorte qu'il renvoie, après exécution, le plus petit entier n tel que $u_n < s$.

```
def population(s) :
  u=4
  n=0
  while... :
    u=...
    n=...
  return n
```

b. Quelle valeur renvoie la commande `population(2.2)` ?

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

: étude d'un modèle continu

On note t le temps écoulé, exprimé en année, à partir du 1er janvier 2025. L'évolution du nombre de perches-soleil, exprimé en millier, est modélisée par la fonction p telle que :

— la fonction p est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$;

— $p(0) = 4$;

— la fonction p est solution de l'équation différentielle (E) $\quad y' + y = 2 \quad$ où y est une fonction de la variable réelle t.

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).

2. En déduire que l'expression de la fonction p sur l'intervalle $[0;+\infty[$ est $\quad p(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + 2$.

3. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?

Corrigé

: étude d'un modèle discret

1. $u_1 = 4 - \dfrac{4}{u_0} = 4 - \dfrac{4}{4} = 4 - 1 = 3$.

Le nombre de perches-soleil au 1er janvier 2026 donné par ce modèle sera de 3 000.

2. a. La fonction h est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et pour tout réel strictement positif x on a :

$h'(x) = 0 - 4 \times \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{4}{x^2} > 0$

Donc h' est une fonction à valeurs strictement positives sur $]0\ ;\ +\infty[$, cela implique que la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

b. On remarque que la fonction h introduite dans la question est la fonction de récurrence de la suite, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $\quad h(u_n) = u_{n+1}$.

Pour tout entier naturel n, on pose l'affirmation P_n : « $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$. »

Initialisation : pour $n = 0$, on a, d'après la définition de la suite $u_0 = 4$ et d'après la question précédente $u_1 = 3$.

Donc $2 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 4$. Donc l'affirmation P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0$ et $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$ vraie (c'est l'hypothèse de récurrence P_n)

Par croissance de la fonction h démontrée à la question **2. a.** les images de ces quatre nombres sont rangées dans le même ordre que leurs antécédents, soit

$h(2) \leqslant h(u_{n+1}) \leqslant h(u_n) \leqslant h(4)$.

Or $h(2) = 4 - \dfrac{4}{2} = 4 - 2 = 2$, $h(u_{n+1}) = u_{n+2}$, $h(u_n) = u_{n+1}$ et $h(4) = 4 - \dfrac{4}{4} = 4 - 1 = 3$.

On a donc $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ et comme $3 < 4$, on a finalement

$2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$: P_{n+1} est vraie.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \geqslant 0$, elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.$$

c. D'après la question précédente, on a :

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant u_n \leqslant 4$: la suite est minorée par 2 et majorée par 4 ;

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite est décroissante ;

La suite est donc décroissante et minorée, elle est donc convergente, vers une limite $\ell \geqslant 2$.

d. La suite u est définie par récurrence, sa fonction de récurrence h est continue car dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, et la suite est convergente. D'après le théorème du point fixe, on en déduit que la limite ℓ de la suite (u_n) doit vérifier l'équation $h(\ell) = \ell \iff 4 - \dfrac{4}{\ell} = \ell$.

En multipliant chaque membre par $\ell \neq 0$, on obtient $\ell^2 = 4\ell - 4 \iff \ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \iff (\ell - 2)^2 = 0 \iff \ell - 2 = 0 \iff \ell = 2$.

L'unique solution de l'équation étant 2, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

e. Ce modèle prévoit une stabilisation de la population à 2 000 perches-soleil, et ne prévoit donc pas une élimination à long terme de l'espèce envahissante.

3. a. Soit s un réel appartenant à l'intervalle $]2\,;\,4[$.

Le script qui renvoie, après exécution, le plus petit entier n tel que $u_n < s$ est :

```
def population(s) :
  u = 4
  n = 0
  while u >= s :
    u = 4 - 4/u
    n = n + 1
  return n
```

La variable `u` va stocker la valeur d'un terme de la suite, tandis que la variable `n` va stocker la valeur de l'indice correspondant.

Pour que la boucle `while` s'arrête dès que $u_n < s$, il faut qu'elle continue tant que cette condition n'est pas réalisée, c'est-à-dire tant que `u` contient une valeur qui n'est pas strictement inférieure à s.

Et tant que c'est le cas, les deux instructions à répéter sont : de remplacer la valeur stockée dans `u` par la valeur suivante, en appliquant la relation de récurrence, et donc d'augmenter de 1 la valeur de l'indice stocké dans `n`, pour garder la correspondance.

b. L'algorithme donne :

- $u_9 = 2,2$ et
- $u_{10} \approx 2,182 < 2,2$, donc la commande `population(2.2)` renvoie 10.

La population sera inférieure à 2 200 perches-soleil à partir de 2035 (2025 + 10).

: étude d'un modèle continu

1. (E) $y' + y = 2$ soit $y' = -y + 2$.
Cette équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -1$ et $b = 2$.
Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :
$f(t) = ke^{-t} - \dfrac{2}{-1} = ke^{-t} + 2$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2. p est solution de l'équation (E) donc il existe un réel k tel que $p(t) = ke^{-t} + 2$
On sait que $p(0) = 4$ donc : $p(0) = 4 \iff 4 = ke^0 + 2$
$\iff 2 = k$
L'expression de la fonction p sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est donc bien : $p(t) = 2e^{-t} + 2$.

3. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$, par limite de produit par 2 puis limite de somme $\lim\limits_{t \to +\infty} 2e^{-t} + 2 = 2$
Donc ce modèle ne prévoit pas non plus une élimination à long terme de l'espèce envahissante, il prévoit une stabilisation à 2 000 perches-soleil. Ce qui est cohérent avec le modèle étudié à la partie **A**.

Exercice 11.

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right)$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln(9)$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $f(2\ln(2)) = 2\ln(2)$.

3. Montrer que $u_1 = \ln(5)$.

4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

5. En déduire que la suite (u_n) converge.

6. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - X - 2 = 0$.

b. En déduire l'ensemble des solutions sur R de l'équation :

$$e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$$

c. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = x$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right).$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln(9)$, et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\boxed{f'(x) = \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + 2}}.$$

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^{\frac{x}{2}} > 0$, on on déduit que $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} > 0$ et $e^{\frac{x}{2}} + 2 > 0$.

Les deux termes du quotient sont supérieurs à zéro, donc $f'(x)$ est supérieur à zéro sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. On sait que si $u > 0$, alors $\ln(e^u) = u$, donc en particulier

$$f(2\ln(2)) = \ln\left(e^{\frac{2\ln(2)}{2}} + 2\right) = \ln\left(e^{\ln(2)} + 2\right) = \ln(2+2) = \ln(4) = \ln\left(2^2\right) = \boxed{2\ln(2)}.$$

3. $u_1 = f(u_0) = \ln\left(e^{\frac{\ln(9)}{2}} + 2\right) = \ln\left(e^{\ln\left(9^{\frac{1}{2}}\right)} + 2\right) = \ln\left(e^{\ln(3)} + 2\right) = \ln(3+2) = \boxed{\ln(5)}$

4. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation**

  La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\ln(4) \leqslant \ln(5) \leqslant \ln(9)$ c'est-à-dire $2\ln(2) \leqslant u_1 \leqslant u_0$. La propriété est donc vérifiée pour $n = 0$.
- **Hérédité**

  Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait $2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

  On sait que la fonction f est strictement croissante donc :

  $$2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \iff f(2\ln(2)) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \iff 2\ln(2) \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$

  Le propriété est donc bien héréditaire.
- **Conclusion**

  La propriété est vérifiée pour $n = 0$, et elle est héréditaire pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc d'après le principe de récurrence, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

5. D'après la question précédente on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geqslant 2\ln(2)$, donc la suite (u_n) est minorée.

Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite supérieure ou égale à $2\ln(2)$.

6. **a.** On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - X - 2 = 0$

Calcul du discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = \boxed{9}.$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$X_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1-3}{2} = -1 \quad ; \quad X_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1+3}{2} = 2.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{-1\,;\,2\}}$$

b. $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 \iff \mathrm{e}^{\frac{2x}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 \iff \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$

Posons $X = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$. On a alors :

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 \iff X^2 - X - 2 = 0$$

D'après la question précédente, les solutions de l'équation $X^2 - X - 2 = 0$ sont $X_1 = -1$ et $X_2 = 2$. On a donc :

- $\mathrm{e}^{\frac{x_1}{2}} = -1$ (impossible car $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > 0$)
- $\mathrm{e}^{\frac{x_2}{2}} = 2 \iff \dfrac{x_2}{2} = \ln(2) \iff x_2 = 2\ln(2)$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{2\ln(2)\}}$$

c. On a vu à la question **5.** que la suite (u_n) converge. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Comme f est une fonction continue, d'après le théorème du point fixe, on a ℓ qui vérifie $f(\ell) = \ell$.

On considère donc l'équation $f(x) = x$:

$$f(x) = x \iff \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 2\right) = x \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 2 = \mathrm{e}^x \iff \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2 = 0.$$

D'après la question précédente la solution de cette équation est $x = 2\ln(2)$, donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 2\ln(2)}.$$

Exercice 12.

On considère n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{1-x}.$$

On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et on note f_n' sa fonction dérivée.

Partie A

Dans cette partie on étudie le cas où $n = 1$.
On étudie donc la fonction f_1 définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{1-x}.$$

1. Montrer que $f_1'(x)$ est strictement positive pour tout réel x de $[0\,;\,1[$.

2. En déduire le tableau de variations de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0\,;\,1]$

3. En déduire que l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;\,1]$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

On admet que $u_1 = \mathrm{e} - 2$.

1. **a.** Justifier que pour tout $x \in [0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$$

.

b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

b. On considère le script Python ci-dessous définissant la fonction `suite()` :

```
from math import exp

def suite():
  u = ...
  for n in range (1, ...):
      u = ...
  return
```

Recopier et compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction `suite()` renvoie la valeur de $\displaystyle\int_0^1 x^8 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$.

3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Corrigé

On considère n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $f_n(x) = x^n\,\mathrm{e}^{1-x}$.

Partie A

1. $f_1(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x}$ donc $f_1'(x) = 1\times\,\mathrm{e}^{1-x} + x\times\left(-\mathrm{e}^{1-x}\right) = \boxed{(1-x)\,\mathrm{e}^{1-x}}$

On sait que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $\mathrm{e}^{1-x} > 0$, donc $f_1'(x)$ est du signe de $1-x$. Or, $1-x\geqslant 0 \iff x\leqslant 1$. Donc, pour tout $x\in[0\,;\,1[$, $f_1'(x)$ est strictement positif.

2.

x	0		1
Signe de $f_1(x)$		$+$	
Variations de f_1	0	↗	1

$f_1(0) = 0\times\,\mathrm{e}^{1-0} = 0$

$f_1(1) = 1\times\,\mathrm{e}^{1-1} = \mathrm{e}^0 = 1$

3. La fonction f_1 est continue (puisque dérivable) et strictement croissante sur $[0\,;\,1]$, avec $f_1(0) = 0 < 0,1$ et $f_1(1) = 1 > 0,1$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une solution unique dans $[0\,;\,1]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

On admet que $u_1 = \mathrm{e}-2$.

1. **a.** Pour $x\in[0\,;\,1]$, on a : $0\leqslant x\leqslant 1$.
$x\geqslant 0$ donc $x^n\geqslant 0$; on multiplie l'inégalité précédente par x^n :
$0\times x^n\leqslant x\times x^n\leqslant 1\times x^n \iff 0\leqslant x^{n+1}\leqslant x^n$
On a donc démontré que pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{0\leqslant x^{n+1}\leqslant x^n}$$

b. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{1-x} > 0$, donc, d'après la question précédente :

$$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n \iff 0 \leqslant x^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\,\mathrm{e}^{1-x}.$$

Donc, d'après la positivité de l'intégration :

$$0 \leqslant x^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\,\mathrm{e}^{1-x} \Longrightarrow 0 \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \iff \boxed{0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n}$$

c. D'après la question précédente, puisque $u_{n+1} \leqslant u_n$ la suite (u_n) est décroissante.
De plus, puisque $0 \leqslant u_n$, elle est minorée par 0.
Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite positive ou nulle.

2. **a.** On sait que pour u et v dérivables on a : $\displaystyle\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$.
Posons $u'(x) = \mathrm{e}^{1-x}$ et $v(x) = x^{n+1}$. Alors $u(x) = -\mathrm{e}^{1-x}$ et $v'(x) = (n+1)x^n$.
On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-x^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n\left(-\mathrm{e}^{1-x}\right)\mathrm{d}x \\
&= -1^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-1} - \left(-0^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-0}\right) - (n+1)\int_0^1 -x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -1 + (n+1)\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{u_{n+1} = (n+1)\,u_n - 1}.$$

b. On complète le script Python en bleu ci-dessus pour que la fonction `suite()` renvoie la valeur de $\displaystyle\int_0^1 x^8\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$.

```
from math import exp

def  suite() :
     u = exp(1)-2
     for n in range (1,8):
         u = (n+1) * u - 1
     return u
```

3. **a.** On se place dans l'intervalle d'intégration : soit $x \in [0\,;\,1]$, donc

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow 1-x \leqslant 1 \Longrightarrow \mathrm{e}^{1-x} \leqslant \mathrm{e} \quad \text{(croissance de la fonction exponentielle)}$$
$$\Longrightarrow x^n \mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n \times \mathrm{e} \quad (x^n \geqslant 0)$$
$$\Longrightarrow \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \times \mathrm{e}\,\mathrm{d}x \quad \text{(craoissance de l'intégration)}$$
$$\Longrightarrow \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \Longrightarrow u_n \leqslant \mathrm{e}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$
$$\Longrightarrow u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

b. On sait que pour tout n, on a : $0 \leqslant u_n$; donc $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Exercice 13.

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 &= \ln(4) \\ v_{n+1} &= \ln(-1+2\mathrm{e}^{v_n}) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad w_n = -1+\mathrm{e}^{v_n}.$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie et strictement positive.

1. Donner les valeurs exactes de v_1 et w_0.

2. **a.** Une partie d'une feuille de calcul où figurent les indices et les termes des suites (v_n) et (w_n) est reproduite ci-contre.

Parmi les trois formules ci-dessous, choisir la formule qui, saisie dans la cellule B3 puis recopiée vers le bas, permettra d'obtenir les valeurs de la suite (v_n) dans la colonne B.

Formule 1	LN(−1 + 2 * EXP(B2))
Formule 2	= LN(−1 + 2 * EXP(B2))
Formule 3	= LN(−1 + 2 * EXP(A2))

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (v_n).

c. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, valider votre conjecture concernant le sens de variation de la suite (v_n).

	A	B	C
1	n	v_n	w_n
2	0	1,386 294 36	3
3	1	1,945 910 15	6
4	2	2,564 949 36	12
5	3	3,218 875 82	24
6	4	3,891 820 3	48
7	5	4,574 710 98	96
8	6	5,262 690 19	192
9	7	5,953 243 33	384
10	8	6,645 090 97	768
11	9	7,337 587 74	1 536
12	10	8,030 409 56	3 072
13	11	8,723 394 02	6 144
14	12	9,416 459 83	12 288
15	13	10,109 566 3	24 576
16	14	10,802 693 2	49 152
17	15	11,495 830 2	98 304
18	16	12,188 972 3	196 608
19	17	12,882 116 9	393 216

3. **a.** Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n = \ln(1+3\times 2^n)$.

c. Déterminer la limite de la suite (v_n).

4. Justifier que l'algorithme suivant écrit en langage Python renvoie un résultat quel que soit le choix de la valeur du nombre S.

```
from math import*
def seuil(S):
    V=ln(4)
    n=0
    while V < S :
      n=n+1
      V=ln(2*exp(V)-1)
    return(n)
```

Corrigé

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 &= \ln(4) \\ v_{n+1} &= \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_n}\right) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad w_n = (-1+\mathrm{e}^{v_n}.$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie et strictement positive.

1. • $v_1 = \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_0}\right) = \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{\ln 4}\right) = \ln(-1+2\times 4) = \ln(-1+8) = \ln 7$ (valeur approchée ligne 4 colonne 3)

• $w_0 = -1+\mathrm{e}^{v_0} = -1+\mathrm{e}^{\ln 4} = -+4 = 3$ (valeur ligne 3 colonne 4)

2. **a.** Il faut saisir la formule 2.

b. On peut penser que la suite (v_n) est croissante

c. Démonstration par récurrence :

Initialisation : on a $v_0 = \ln 4$ et $v_1 = \ln 7$: la croissance de la fonction ln assure que $v_0 < v_1$.

Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n < v_{n+1}$, alors :

$\mathrm{e}^{v_n} < \mathrm{e}^{v_{n+1}}$ par croissance de la fonction exponentielle

$2\mathrm{e}^{v_n} < 2\mathrm{e}^{v_{n+1}}$ la multiplication par +2 respecte l'ordre

$-1+2\mathrm{e}^{v_n} < -1+2\mathrm{e}^{v_{n+1}}$ l'addition respecte l'ordre

$\ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_n}\right) < \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_{n+1}}\right)$ par croissance de la fonction logarithme népérien (on a supposé que la suite (v_n) est bien définie donc que tous les nombres de la forme $-1+2\mathrm{e}^{v_n}$ sont supérieurs à zéro) ; soit finalement

$v_{n+1} < v_{n+2}$: l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang suivant : d'après le principe de récurrence :

$$\text{quel que soit } n \in \mathbb{N}, \quad v_n < v_{n+1}$$

La suite (v_n) est croissante.

3. **a.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -1+\mathrm{e}^{v_n}$, donc

$w_{n+1} = -1+\mathrm{e}^{v_{n+1}} = -1+\mathrm{e}^{\ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_n}\right)} = -1-1+2\mathrm{e}^{v_n} = -2+2\mathrm{e}^{v_n} = 2\left(-1+\mathrm{e}^{v_n}\right)$: finalement

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2w_n$: cette égalité montre que la suite w_n est géométrique de raison 2 avec pour premier terme $w_0 = 3$.

b. On sait qu'alors le terme général w_n est égal à :

$$w_n = 3 \times 2^n$$

Or par définition $w_n = -1 + \mathrm{e}^{v_n} = 3 \times 2^n \iff \mathrm{e}^{v_n} = 1 + 3 \times 2^n$.

Par croissance de la fonction logarithme népérien : $v_n = \ln(1 + 3 \times 2^n)$ pour tout entier naturel.

c. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 \times 2^n = +\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + 3 \times 2^n = +\infty$ et enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(1 + 3 \times 2^n\right) = +\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

4. L'algorithme permet de calculer les termes de la suite v_n à partir de v_0. On vient de démontrer que la suite (v_n) n'est pas majorée. Donc quel que soit le choix du nombre S, il existe un rang p, tel que $v_p > S$ et l'algorithme donnera ce rang p.

Exercice 14.

Le but de cet exercice est d'étudier les convergences de deux suites vers une même limite.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[2\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{3x - 2}.$$

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

x	2		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	$+\infty$

On admet que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On appelle ℓ la limite de (u_n).

On admet qu'elle est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer la valeur de ℓ.

4. On considère la fonction `rang` écrite ci-dessous en langage Python.

On rappelle que sqrt(x) renvoie la racine carrée du nombre x.

```
from math import *

def rang(a) :
  u = 6
  n=0
  while u > = a :
    u = sqrt(3*u - 2)
    n = n+1
  return n
```

a. Pourquoi peut-on affirmer que `rang(2.000001)` renvoie une valeur?

b. Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction `rang(a)` renvoie-t-elle un résultat?

Partie B

On admet que la suite (v_n) vérifiant $v_0 = 6$ et, pour tout n, entier naturel, $v_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{v_n}$ est bien définie.

1. Calculer v_1.

2. Pour tout n entier naturel, on admet que $v_n \neq 2$ et on pose :

$$w_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2}$$

a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2 et préciser son premier terme w_0.

b. On admet que, pour tout n entier naturel,

$$w_n - 1 = \frac{1}{v_n - 2}.$$

En déduire que, pour tout n entier naturel,

$$v_n = 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1}$$

c. Calculer la limite de (v_n).

3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $v_n < 2,01$ en résolvant l'inéquation.

Partie C

À l'aide des parties précédentes, déterminer le plus petit entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, les termes v_n et u_n appartiennent à l'intervalle $]1,99\,;\,2,01[$.

Corrigé

Partie A

1. Pour $x \geqslant 2$: donc $3x \geqslant 6$, puis $3x-2 \geqslant 4 > 0$ donc f est bien définie et dérivable.

$\forall x \in [2\,;\,+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}} > 0$ comme quotient de nombres positifs non nuls.

f' est à valeurs strictement positives sur $[2\,;\,+\infty[$, donc f est strictement croissante sur cet intervalle.

On a : $f(2) = \sqrt{3\times 2-2} = \sqrt{4} = 2$

Et : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-2 = +\infty$,

donc, par composition (avec $y = 3x-2$) : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x-2} = \lim\limits_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty$.

2. **a.** *Initialisation :* Pour $n = 0$, $u_0 = 6 \geqslant 2$.

de plus : $u_1 = f(6) = \sqrt{3\times 6-2} = \sqrt{16} = 4 \geqslant 2$.

Donc on a bien : $2 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 6$: l'inégalité est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que, pour un entier n naturel donné, l'inégalité est vraie, c'est-à-dire : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.

Montrons que l'inégalité suivante est vraie, c'est-à-dire : $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.

Par hypothèse de récurrence : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.

Comme f est croissante sur $[2\,;\,+\infty[$: $f(2) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(6)$

D'après la relation de récurrence de (u_n) : $\sqrt{3\times 2-2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{3\times 6-2}$.

En effectuant les calculs : $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

Enfin, comme $4 \leqslant 6$, ce qui précède implique : $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.

Si l'inégalité est vraie pour un entier naturel n donné, alors on prouve qu'elle est aussi vraie pour l'indice suivant, $n+1$.

Conclusion : L'inégalité est vraie pour l'indice $n = 0$, et pour tout n entier naturel, elle est héréditaire. Par application du principe de récurrence, on peut affirmer que, pour tout n entier naturel, on a : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.

b. De la question précédente on tire :

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante ;

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant u_n$: la suite (u_n) est minorée par 2 ;

(u_n) est décroissante et minorée par 2, donc elle converge vers une limite ℓ qui vérifie : $2 \leqslant \ell$.

3. Soit x un réel supérieur à 2 :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \sqrt{3x-2} = x \\ &\iff 3x-2 = x^2 \quad \text{car } x \geqslant 2 \text{ donc } 3x-2 \geqslant 0 \\ &\iff x^2-3x+2 = 0 \\ &\iff (x-1)(x-2) = 0 \end{aligned}$$

Le trinôme du second degré a donc deux racines 1 et 2.

Comme ℓ vérifie $\ell \geqslant 2$, seule la racine 2 peut être égale à ℓ.

On a donc $\ell = 2$.

4. **a.** La suite (u_n) converge vers 2, donc tout intervalle ouvert contenant 2 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Un intervalle ouvert contenant 2 est de la forme $]b\,;\,a[$, avec $a > 2$, ou a qui est $+\infty$. Donc pour tout $a > 2$, il existe un rang N_0 à partir duquel $u_n < a$.

La boucle `while` se termine donc après N_0 itérations, et `rang(2.000001)` renvoie la valeur N_0.

Le seul risque que l'algorithme ne se termine pas avec un $a > 2$ serait que le réel a soit trop proche de 2, et que les algorithmes utilisés par python donnent une valeur approchée trop peu précise des différents termes u_n pour que la boucle se termine.

b. D'après ce que l'on a expliqué précédemment, l'instruction renvoie un résultat si et seulement si $a > \ell = 2$.

Donc pour $a > 2$.

Partie B

1. On a : $v_1 = 3 - \dfrac{2}{v_0} = 3 - \dfrac{2}{6} = 3 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3}$.

2. **a.** Soit n un entier naturel quelconque. Déterminons la relation de récurrence de la suite (w_n).

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{v_{n+1}-1}{v_{n+1}-2} \\ &= \frac{3-\dfrac{2}{v_n}-1}{3-\dfrac{2}{v_n}-2} \\ &= \frac{2-\dfrac{2}{v_n}}{1-\dfrac{2}{v_n}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{\dfrac{2v_n-2}{v_n}}{\dfrac{v_n-2}{v_n}} \\ &= \frac{2v_n-2}{v_n-2} \\ &= \frac{2(v_n-1)}{v_n-2} \\ &= 2w_n \end{aligned}$$

Au vu de sa relation de récurrence, (w_n) est géométrique de raison 2.

Son premier terme est : $w_0 = \dfrac{v_0-1}{v_0-2} = \dfrac{6-1}{6-2} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$.

b. Puisque (w_n) est géométrique, de premier terme $w_0 = 1{,}25$ et de raison $q = 2$, par propriété, on en déduit que, pour tout entier n naturel, on a : $w_n = 1{,}25 \times 2^n$.

On admet la relation $w_n - 1 = \dfrac{1}{v_n - 2}$.

Avec un premier terme strictement positif et une raison strictement supérieure à 1, la suite (w_n) est strictement croissante, et donc elle est minorée par son premier terme : 1,25. Le nombre $w_n - 1$ sera donc toujours non nul.

Donc en inversant la relation admise, on a : $v_n - 2 = \dfrac{1}{w_n - 1} = \dfrac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}$.

Ce qui implique : $v_n = 2 + \dfrac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}$.

c. Comme $w_0 = 1{,}25 > 0$ et $q = 2 > 1$, par propriété : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}25 \times 2^n = +\infty$.

Par limite de la somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}25 \times 2^n - 1 = +\infty$.

Puis, par limite de l'inverse : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} = 0$.

Finalement, par limite de la somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$.

3. Résolvons : $v_n < 2{,}01$:

$$
\begin{aligned}
v_n < 2{,}01 &\iff 2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} < 2{,}01 \\
&\iff \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} < 0{,}01 \\
&\iff 1 < 0{,}01(1{,}25 \times 2^n - 1) \quad \text{car, pour tout } n \text{ naturel, on a : } \quad 1{,}25 \times 2^n - 1 > 0 \\
&\iff 1 < 0{,}0125 \times 2^n - 0{,}01 \\
&\iff 1{,}01 < 0{,}0125 \times 2^n \\
&\iff \frac{1{,}01}{0{,}0125} < 2^n \quad \text{car } 0{,}0125 > 0 \\
&\iff 80{,}8 < 2^n \\
&\iff \ln(80{,}8) < n\ln(2) \quad \text{car la fonction ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\
&\iff \frac{\ln(80{,}8)}{\ln(2)} < n \quad \text{car } \ln(2) > 0 \\
&\iff n > \frac{\ln(80{,}8)}{\ln(2)}
\end{aligned}
$$

$\frac{\ln(80{,}8)}{\ln(2)} \approx 6{,}34$. Le plus petit entier n vérifiant $v_n < 2{,}01$ est donc $n = 7$.

Partie C

Comme on a démontré dans la **partie A** que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, on explore les premiers termes de la suite à la calculatrice. On constate que $u_{16} \approx 2{,}012 \geqslant 2{,}01$, alors que $u_{17} \approx 2{,}009 < 2{,}01$.
On a donc, pour tout entier n supérieur ou égal à 17 : $1{,}99 < 2 < u_n \leqslant u_{17} < 2{,}01$
et donc, en particulier : $n \geqslant 17 \implies u_n \in]1{,}99\,;\,2{,}01[$.
D'après la **partie B**, on a pour tout n entier naturel :
$1{,}25 \times 2^n \geqslant 1{,}25$, donc $1{,}25 \times 2^n - 1 \geqslant 0{,}25 > 0$, on en déduit : $\frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} > 0$.
Finalement, on a : $v_n = 2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} > 2$.
D'après la dernière question de la **partie B**, on a : $n \geqslant 7 \implies v_n < 2{,}01$.
Ainsi, on a : $n \geqslant 7 \implies 1{,}99 < 2 < v_n < 2{,}01$.
Donc les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle à partir de l'indice 7.
Pour que les deux conditions soient réunies, il faut donc que l'indice soit simultanément supérieur à 7 et à 17, donc, en conclusion, c'est à partir de l'indice $N = 17$ que les termes v_n et u_n sont dans l'intervalle $]1{,}99\,;\,2{,}01[$.

Exercice 15.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2 + \ln\left(u_n^2 - 3\right).$$

On admet que cette suite est bien définie.

Partie A : Exploitation de programmes Python

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour que `suite(k)` qui prend en paramètre un entier naturel `k`, renvoie la liste des k premières valeurs de la suite (u_n).

Remarque : On précise que, pour tout réel strictement positif `a`, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de `a`.

```
def suite(k):
  L = []
  u = 5
  for i in range(......):
    L.append(u)
    u=............
  return(......)
```

2. On a exécuté `suite(9)` ci-dessous. Émettre deux conjectures : l'une sur le sens de variation de la suite (u_n) et l'autre sur son éventuelle convergence.

```
>>> suite(9)
[ 5, 5.091042453358316, 5.131953749864703,
5.150037910978289, 5.157974010229213, 5.1614456706362954,
5.162962248594583, 5.163624356938671, 5.163913344065642]
```

3. On a ensuite créé la fonction `mystere(n)` donnée ci-dessous et exécuté `mystere(10000)`, ce qui a renvoyé `1`.
Cet affichage contredit-il la conjecture émise sur le sens de variation de la suite (u_n) ? Justifier.

```
def mystere(n):
  L = suite(n)
  c = 1
  for i in range(n - 1):
    if L[i] > L[i + 1]:
      c = 0
  return c
```

```
>>> mystere(10000)
1
```

Partie B : Étude de la convergence de la suite (u_n)

On considère la fonction g définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right)$$

On admet que g est dérivable sur $[2\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction g est croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie C : Étude de la valeur de la limite

On considère la fonction f définie sur $[\,2\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right) - x.$$

On admet que f est dérivable sur $[2\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On donne le tableau de variations de f suivant. On ne demande aucune justification.

x	2		3		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$\ln(6)-1$	↘	$-\infty$

1. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[2\,;\,+\infty[$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.
   b. Donner la valeur exacte de α et une valeur approchée à 10^{-3} près de β.
2. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
   Justifier que $f(\ell) = 0$ et déterminer ℓ.

Corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout n : $u_{n+1} = 2 + \ln\left(u_n^2 - 3\right)$

Partie A : Exploitation de programmes Python

1. On complète le script Python ci-dessous pour que `suite(k)` renvoie la liste des k premières valeurs de la suite (u_n).

```
def suite(k):
  L = []
  u = 5
  for i in range(k):
    L.append(u)
    u = 2 + log( u**2 - 3
  return(L)
```

2. On a exécuté `suite(9)` ci-dessous.

```
>>> suite(9)
[ 5, 5.091042453358316, 5.131953749864703,
5.150037910978289, 5.157974010229213, 5.1614456706362954,
5.162962248594583, 5.163624356938671, 5.163913344065642]
```

La suite (u_n) semble croissante, mais on ne peut pas se prononcer sur sa limite.

3. On a ensuite créé la fonction `mystere(n)` donnée ci-dessous et exécuté `mystere(10000)`, ce qui a renvoyé 1.

```
def mystere(n):
  L = suite(n)
  c = 1
  for i in range(n - 1):
    if L[i] > L[i + 1]:
      c = 0
  return c
```

La fonction `mystere` renvoie 0 s'il existe un indice i pour lequel `L[i] > L[i+1]`, c'est-à-dire $u_n > u_{n+1}$. Comme `mystere(10000)` renvoie 1, cela veut dire que pour tout $i \leqslant 9999$, on a : $u_i \leqslant u_{i+1}$.
Cela ne contredit pas la conjecture faite sur la croissance de la suite (u_n).

Partie B : Étude de la convergence de la suite (u_n)

On considère la fonction g définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right)$.

1. $g'(x) = 0 + \dfrac{2x}{x^2-3} = \dfrac{2x}{x^2-3}$
Sur $[2\,;\,+\infty[$, $2x > 0$ et $x^2 > 4$ donc $x^2 - 3 > 1 > 0$; donc $g'(x) >$ sur $[2\,;\,+\infty[$, ce qui prouve que la fonction g est croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

2. **a.** On démontre par récurrence que la propriété $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation**
  $u_0 = 5$ et $u_1 = 2 + \ln\left(5^2 - 3\right) = 2 + \ln(22) \approx 5,09$
  Donc $4 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6$; la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.
  D'après la définition de la fonction g, on a $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout n.
  On sait que la fonction g est croissante sur $[2\,;\,+\infty[$; donc de l'inégalité $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$, on déduit $g(4) \leqslant g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(6)$.
  $g(4) \approx 4,56$; $g(u_n) = u_{n+1}$; $g(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $g(6) \approx 5,5$
  On a donc $4,5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 5,5$, ce qui entraine $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 6$.
  La propriété est donc héréditaire.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$ donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout n : $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.

b. D'après la question précédente, pour tout n, on a :

- $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante ;
- $u_n \leqslant 6$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente.

Partie C : Étude de la valeur de la limite

On considère la fonction f définie sur $[\,2\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = 2 + \ln\left(x^2-3\right) - x$.
On donne le tableau de variations de f suivant.

x	2		3		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$\ln(6)-1$	↘	$-\infty$

1. **a.** D'après le tableau de variations de f, on voit que $f(2) = 0$.
On complète le tableau :

x	2		3		β		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$\ln(6)-1$	↘	0	↘	$-\infty$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$ que l'on notera $\alpha = 2$ et $\beta \in \left[3\,;+\infty\right[$

b. On a vu que $\alpha = 2$.

À la calculatrice, on trouve successivement :

- $f(5) < 0 < f(6)$ donc $\beta \in \left[5\,;6\right]$;
- $f(5,1) < 0 < f(5;2)$ donc $\beta \in \left[5,1\,;5,2\right]$;
- $f(5,16) < 0 < f(5;17)$ donc $\beta \in \left[5,16\,;5,17\right]$;
- $f(5,164) < 0 < f(5;165)$ donc $\beta \in \left[5,164\,;5,165\right]$.

Donc 5,164 une valeur approchée à 10^{-3} près de β.

2. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

$f(x) = g(x) - x$ donc $g(x) = x \iff f(x) = 0$

Pour tout n, on a $g(u_n) = u_{n+1}$ donc, par passage à la limite on a $g(\ell) = \ell$, ce qui équivaut à $f(\ell) = 0$.

$u_0 = 5$ et la suite (u_n) est croissante donc $\ell \geqslant 5$.

$\ell \geqslant 5$ et ℓ vérifie $f(\ell) = 0$; d'après les questions précédentes, on peut en déduire que $\ell = \beta$.

Exercice 16.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{1+5^n}{2+3^n}.$$

Affirmation 1 : La suite (u_n) converge vers $\frac{5}{3}$.

2. On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n, w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3.$$

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant n$.

3. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée dans un repère orthonormé sur la figure (Fig. 1) en page suivante.
On précise que :

- T est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 8 ;
- L'axe des abscisses est la tangente horizontale à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

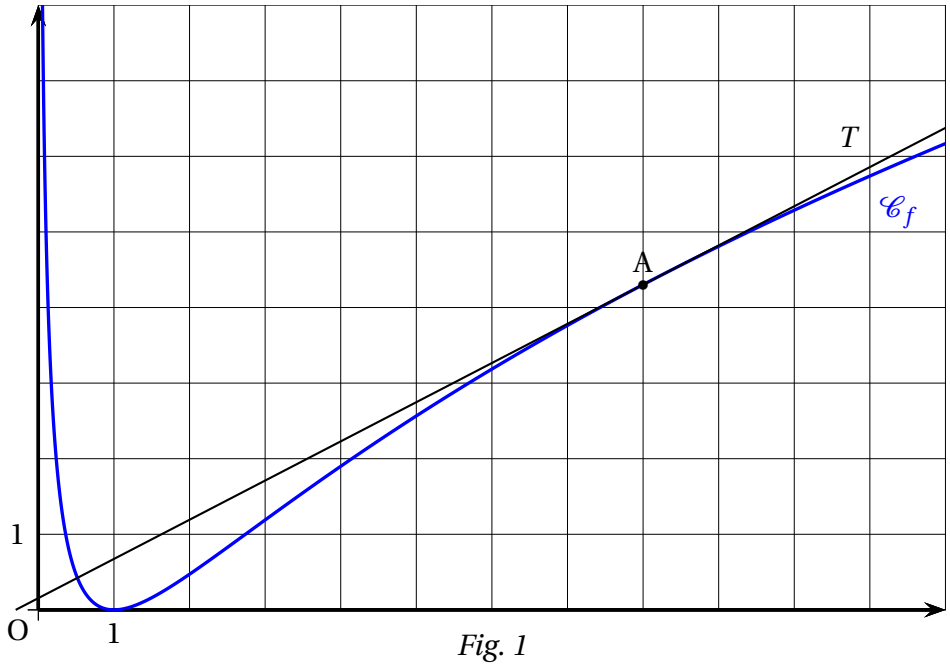


Fig. 1

Affirmation 3 : D'après le graphique, la fonction f est convexe sur son ensemble de définition.

4. **Affirmation 4 :** Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) - x + 1 \leqslant 0$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Corrigé

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{1+5^n}{2+3^n}.$$

Affirmation 1 : La suite (u_n) converge vers $\frac{5}{3}$. FAUSSE

En écrivant $u_n = \dfrac{1+5^n}{2+3^n} = \dfrac{\frac{1}{5^n}+1}{\frac{2}{5^n}+\left(\frac{3}{5}\right)^n}$ et en remarquant que :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{5^n} = 0$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{5^n} = 0$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$ car $0 < \dfrac{3}{5} < 1$;

Donc par somme de limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{5^n}+1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{5^n}+\left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n, w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3.$$

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant n$.

Raisonnement par récurrence :

Initialisation : $w_0 = 0 \geqslant 0$: l'inégalité est vraie au rang 0 ;

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $w_n \geqslant n$, alors

$3w_n \geqslant 3n \iff 3w_n - 2n \geqslant 3n - 2n$ ou $3w_n - 2n \geqslant n$ et enfin $3w_n - 2n + 3 \geqslant n + 3$.

Or $n + 3 = n + 1 + 2$, donc $n + 3 > n + 1$ et $3w_n - 2n + 3 = w_{n+1}$.

On a donc $w_{n+1} \geqslant n + 3 > n + 1$, soit par transitivité : $w_{n+1} \geqslant n + 1$: l'inégalité est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang n, elle l'est aussi au rang $n + 1$; d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant n$: l'affirmation 2 est vraie.

3. L'affirmation est fausse car si f était convexe sur $]0\ ;\ +\infty[$, elle le serait au point d'abscisse 8 et sa courbe représentative serait au dessus de sa tangente au point A. C'est le contraire d'après le graphique : Affirmation 3 : fausse.

4. Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - x + 1$.

Comme somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$, f est dérivable sur cet =intervalle et $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.

On a de façon immédiate :

- $f'(x) = 0 \iff x = 1$;
- $f'(x) > 0 \iff x < 1$, donc sur $]0\,;1[$, f est croissante de moins l'infini à $f(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$.
- $f'(x) < 0 \iff x > 1$, donc f est décroissante sur $]1\ ;\ +\infty[$ de 0 à moins l'infini.

Donc cette fonction est négative puisque son maximum est 0 en $x = 1$: l'affirmation 4 est vraie.

Exercice 17.

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.
La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n, on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024+n$. Ainsi, $u_0 = 1$.
Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n.$$

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.
2. On note h la fonction définie sur $[0\,;20]$ par

$$h(x) = -0,02x^2 + 1,3x.$$

On admet que h est croissante sur $[0\,;20]$.

   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.
   b. En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.
   c. Justifier que $L = 15$.

3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.

   a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.
   b. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil():
  n=0
  u= 1
  while ..... :
    n=.....
    u=.....
  return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.
Dans ce modèle, pour une durée t, en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est solution sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_1) : \quad y' = 0,02y(15-y).$$

On admet qu'une telle fonction f existe ; le but de cette partie est d'en déterminer une expression. On note f' la fonction dérivée de f.

1. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.
   Montrer que g est solution de l'équation différentielle
   $$(E_2) : \quad y' = -0,3y + 0,02.$$
2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2).
3. En déduire que pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$:
   $$f(t) = \frac{15}{14\mathrm{e}^{-0,3t} + 1}.$$
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

Partie A : étude d'un modèle discret

1. Le premier juillet 2025 étant le premier juillet 2024 + 1, on demande ici de calculer : $u_1 = u_{0+1} = -0,02u_0^2 + 1,3u_0 = -0,02 \times 1^2 + 1,3 \times 1 = 1,3 - 0,02 = 1,28$.
   D'après ce modèle, au premier juillet 2025, la posidonie recouvrera une superficie de 1,28 ha.
2. On remarque que la fonction h introduite dans la question est la fonction de récurrence de la suite, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $h(u_n) = u_{n+1}$.
   Pour tout entier naturel n, on pose l'affirmation P_n : « $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$. »
   Initialisation : pour $n = 0$, on a, d'après la définition de la suite $u_0 = 1$ et d'après la question précédente $u_1 = 1,28$.
   On constate donc que l'affirmation P_0 est vraie.
   Hérédité : On suppose que, pour un entier naturel n, l'affirmation P_n est vraie.
   Par hypothèse, on a donc :
   $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20 \implies h(1) \leqslant h(u_n) \leqslant h(u_{n+1}) \leqslant h(20)$
   car h est supposée croissante sur $[0\,;\,20]$
   $\implies 1,28 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 18$ car $h(1) = 1,28$ et $h(20) = 18$.
   $\implies 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 20$ car $1 \leqslant 1,28$ et $18 \leqslant 20$.
   Si P_n est vraie, alors P_{n+1} est donc vraie aussi.
   Conclusion : On a établi que la propriété était vraie au rang 0, et que, pour n naturel n, P_n est vraie alors P_{n+1} l'est aussi, donc d'après le principe de récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.
3. D'après la question précédente, on a :
   - $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant 20$: la suite est bornée par 1 et 20 ;
   - $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$: la suite est croissante ;

La suite est donc croissante et majorée, elle est donc convergente, vers une limite L.

Comme la suite est bornée par 1 et 20, on en déduit que la limite L est donc un réel de l'intervalle $[1\ ;\ 20]$.

4. La suite u est définie par récurrence, sa fonction de récurrence étant continue (la fonction h est un polynôme de degré 2, donc continue sur son ensemble de définition) ; la suite est également convergente. D'après le théorème du point fixe, on en déduit que la limite de la suite (u_n) doit être une solution à l'équation $h(x) = x$.

Résolvons cette équation : $h(x) = x$

$$\begin{aligned}
&\iff -0,02x^2 + 1,3x = x \\
&\iff -0,02x^2 + 0,3x = 0 \\
&\iff -0,02x\left(x + \frac{0,3}{-0,02}\right) = 0 \\
&\iff -0,02x(x-15) = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou bien } x = 15
\end{aligned}$$

L'équation a deux solutions, 0 et 15, et parmi ces deux solutions, seule 15 est dans l'intervalle $[1\ ;\ 20]$, dont on a établi qu'il contient la limite L.

La limite de la suite est donc bien $L = 15$.

5. **a.** Puisque la suite converge vers 15, tout intervalle ouvert contenant 15 doit contenir tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang.

L'intervalle $]14\ ;\ +\infty[$ est un tel intervalle, donc il existe un rang N_0 à partir duquel les termes de la suite sont dans l'intervalle $]14\ ;\ +\infty[$, et sont donc supérieurs à 14.

Il existe donc une année à partir de laquelle la posidonie recouvrira une surface dépassant les 14 ha.

b. Il s'agit ici d'un algorithme de seuil classique, `n` et `u` sont initialisées à 0 et u_0 respectivement. Tant que le terme stocké dans la variable `u` restera inférieur ou égal à 14, alors on mettra à jour ces deux variables pour qu'elles contiennent respectivement l'indice suivant et le terme suivant dans la suite.

Cela donne :

```
def seuil():
  n=0
  u=1
  while u < = 14 :
    n= n+1
    u= -0.02*u**2 + 1.3*u
  return n
```

Remarque : Il y a une légère ambigüité sur l'interprétation de l'expression « dépassera les 14 hectares ». On a choisi dans ce corrigé de le comprendre comme « devenant strictement supérieur à 14 hectares ».

Si on interprète comme « devenant supérieur ou égal à 14 hectares », alors la quatrième ligne de l'algorithme devient : `while u < 14 :` Les deux versions renvoient le même résultat, de toutes façons, car aucun terme de la suite n'est égal à 14.

L'appel `seuil()` renvoie ici 18, car $u_{17} \approx 13,8$ et $u_{18} \approx 14,1$. Il faudra donc 18 ans pour que la posidonie recouvre une surface dépassant les 14 hectares.

Partie B : étude d'un modèle continu

1. Si on a, pour tout réel positif t, $g = \dfrac{1}{f(t)}$, alors pour tout réel t positif, on a :

$g'(t) = \dfrac{-f'(t)}{f(t)^2}$

On aura alors : $-0,3g(t) + 0,02 = \dfrac{-0,3}{f(t)} + 0,02$

$= \dfrac{-0,3 + 0,02f(t)}{f(t)}$

Et, par ailleurs : $g'(t) = \dfrac{-f'(t)}{f(t)^2}$

$= \dfrac{-\left[0,02f(t)(15 - f(t))\right]}{f(t)^2}$ car f est solution de (E_1)

$= \dfrac{-\left[0,02(15 - f(t))\right]}{f(t)}$ en simplifiant par $f(t)$

on rappelle que f ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$

$= \dfrac{-0,3 + 0,02f(t)}{f(t)}$ en développant

$= -0,3g(t) + 0,02$

On constate bien que g est une solution de l'équation différentielle (E_2).

2. Les solutions de l'équation (E_2) sont, d'après une propriété du cours, les fonctions de la forme : $t \longmapsto Ce^{-0,3t} + \dfrac{-0,02}{-0,3}$, où $C \in \mathbb{R}$.

C'est-à-dire, les fonctions de la forme $t \longmapsto Ce^{-0,3t} + \dfrac{1}{15}$, où $C \in \mathbb{R}$.

3. Comme on sait que $f(0) = 1$, on en déduit $g(0) = \dfrac{1}{f(0)} = 1$.

Donc $g(0) = 1 \iff Ce^{-0,3\times 0} + \dfrac{1}{15} = 1$

$\iff C + \dfrac{1}{15} = 1$

$\iff C = 1 - \dfrac{1}{15}$

$\iff C = \dfrac{14}{15}$

La seule fonction solution de (E_2) vérifiant $g(0) = 1$ est donc

$g : t \longmapsto \dfrac{14}{15}e^{-0,3t} + \dfrac{1}{15}$.

On en déduit donc que, pour tout t réel positif, on a : $f(t) = \dfrac{1}{g(t)}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{14}{15}e^{-0,3t} + \dfrac{1}{15}}$

$= \dfrac{15}{14e^{-0,3t} + 1}$

On arrive bien à l'expression annoncée.

4. On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} -0,3t = -\infty$, donc par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,3t} = \lim\limits_{y\to-\infty} \mathrm{e}^{y} = 0$

Par limite du produit et de la somme, on a alors : $\lim\limits_{t\to+\infty} 14\mathrm{e}^{-0,3t} + 1 = 1$.

Finalement, par limite du quotient : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{15}{14\mathrm{e}^{-0,3t}+1} = 15$.

La fonction f tend vers 15 quand t tend vers $+\infty$. Le modèle continu rejoint la conclusion du modèle discret : la posidonie tendra à occuper une surface de 15 hectares.

5. Soit t un réel positif. Résolvons :

$$\begin{aligned}
f(t) > 14 &\iff \frac{15}{14\mathrm{e}^{-0,3t}+1} > 14\\
&\iff 15 > 14(14\mathrm{e}^{-0,3t}+1) \quad \text{car } 14\mathrm{e}^{-0,3t}+1 > 0\\
&\iff 15 > 196\mathrm{e}^{-0,3t} + 14\\
&\iff 1 > 196\mathrm{e}^{-0,3t}\\
&\iff \frac{1}{196} > \mathrm{e}^{-0,3t} \quad \text{car } 196 > 0\\
&\iff \ln\left(\frac{1}{196}\right) > -0,3t \quad \text{car ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+\\
&\iff -\ln(196) > -0,3t \quad \text{par proriété de la fonction ln}\\
&\iff \frac{\ln(196)}{0,3} < t \quad \text{car } -0,3 < 0
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle $\left]\dfrac{\ln(196)}{0,3}\,;\,+\infty\right[$.

Comme $\dfrac{\ln(196)}{0,3} \approx 17,6$, cela signifie qu'il faudra environ 17,6 années (soit 17 ans et un peu plus de 7 mois) pour que la posidonie occupe un espace strictement supérieur à 14 hectares. Là encore, le modèle continu a des conclusions cohérentes avec celles du modèle discret.

Exercice 18.

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.
Au 1er janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.
On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 0,93.
Pour tout entier naturel n, u_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025+n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.
On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n.$$

Pour tout entier naturel n, v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = -0,05x^2 + 1,1x.$$

2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,11]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6.$$

4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ.
5. **a.** Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ.
   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.
3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.
4. On considère le programme Python ci-contre.
   a. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.
   b. Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

```
n=0
u = 6
v = 6
while ... :
    u = ...
    v= ...
    n = n+1
print (2025 + n)
```

Corrigé

Partie A

1. $u_1 = u_0 \times 0,93 = 6 \times 0,93 = 5,58$.
2. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $q = 0,93$ donc pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 6 \times 0,93^n$.
3. La raison q vérifiant $q \in]-1\ ;\ 1[$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,93^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   Interprétation : ceci signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années la population animale dans le milieu A va aller à l'extinction.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n$.
En particulier $v_1 = -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6 = -1,8 + 6,6 = 4,8$.
Il y aura donc 4 800 individus au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = -0,05x^2 + 1,1x$.

2. La fonction f est dérivable donc continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
$\forall x \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = -0,1x + 1,1$.
$f'(x) \geqslant 0 \iff -0,1x + 1,1 \geqslant 0 \iff x \leqslant \dfrac{1,1}{0,1} \iff x \leqslant 11$.
Donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,11]$.

3. Nous savons que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$. Montrons par récurrence que : $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.

— **Initialisation :** $v_0 = 6$ et $v_1 = 4,8$ donc $2 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 6$. La proposition est vraie au rang 0.

— **Hérédité :** on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.
Comme $v_n \in [0\,;\,11]$, $v_{n+1} \in [0\,;\,11]$, et que f est croissante sur $[0\,;\,11]$ d'après le résultat précédent, les images des quatre nombres de l'encadrement sont rangées dans le même ordre croissant, soit
$f(2) \leqslant f[v_{n+1}] \leqslant f[v_n] \leqslant f(6) \iff 2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n_1} \leqslant 4,8$ (car $f(2) = -0,05 \times 2^2 + 2,2 = -0,2 + 2,2 = 2$).
On a donc $2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 6$. La proposition est vraie au rang $n+1$.

— **Conclusion :** La proposition est vraie au rang $n = 0$ et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, pour tout entier naturel n,

$$2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6.$$

4. Le résultat précédent montre deux résultats : pour tout entier naturel n,

— $v_{n+1} \leqslant v_n$ donc la suite (v_n) est décroissante ;

— $2 \leqslant v_n$ donc la suite (v_n) est minorée par 2.

D'après le théorème de la convergence monotone, la suite (v_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 2$.

5. **a.** La fonction f est continue, $(f([2\,;\,6]) \subset [2\,;\,6])$ et la suite (v_n) converge, donc d'après le théorème du point fixe, ℓ est l'unique solution sur $[2\,;\,6]$ de l'équation $f(x) = x$.

b. On résout l'équation $\ell = f(\ell)$:
$\ell = f(\ell) \iff \ell = -0,05\ell^2 + 1,1\ell \iff 0,05\ell^2 - 0,1\ell = 0 \iff 0,05\ell(\ell - 2) = 0$
On obtient deux solutions : $\ell = 0 \notin [2\,;\,6]$ et $\ell = 2$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$.
Ceci signifie qu'au bout d'un certain nombre d'années la population va se rapprocher de 2 000 individus, soit le tiers du nombre initial.

Partie C

1. En milieu A, on utilise la suite (u_n). On cherche à résoudre $u_n < 3$.

$u_n < 3 \iff 6 \times 0{,}93^n < 3 \iff 0{,}93^n < \dfrac{1}{2}$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

donc $0{,}93^n < \dfrac{1}{2} \iff \ln(0{,}93^n) < \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \iff n \times \ln(0{,}93) < -\ln(2)$

$\iff n > -\dfrac{\ln(2)}{\ln(0{,}93)}$ car $\ln(0{,}93) < 0$.

Or $-\dfrac{\ln(2)}{\ln(0{,}93)} \approx 9{,}55$ donc $n \geqslant 10$ soit en 2035.

À partir de 2035, le nombre d'individus en milieu A sera inférieur à 3 000.

2. On sait que (v_n) est décroissante. Avec la calculatrice, on trouve $v_5 \approx 3{,}14$ et $v_6 \approx 2{,}96$. Donc pour $n \geqslant 6$.

Ce sera donc à partir de 2031.

3. La suite (u_n) converge vers 0, et (v_n) converge vers 2. Les deux suites étant décroissantes en partant de $u_0 = v_0 = 6$, il existera un rang N tel que $v_N > u_N$.

4. Le script complété :

```
n=0
u = 6
v = 6
while u >= v :
    u = 0.93*u
    v= -0.05*v**2+1.1*v
    n = n+1
print (2025 + n)
```

5. Le script affiche 2038. Avec la calculatrice : $u_{12} \approx 2{,}51$ et $v_{12} \approx 2{,}41$; $u_{13} \approx 2{,}34$ et $v_{13} \approx 2{,}36$. Donc $N = 13$.

Exercice 19.

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$.
Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$,
3. Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n). Justifier la réponse.

Partie B

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$$

1. Montrer que $w_1 = 44,5$.

On souhaite écrire une fonction suite, en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée. On donne ci-dessous une proposition pour cette fonction suite.

```
1  def suite(n) :
2      U=30
3      W=45
4      for i in range (1,n+1) :
5          U=U/2+10
6          W=W/2+U/2+7
7      return W
```

2. L'exécution de suite(1) ne renvoie pas le terme w_1. Comment modifier la fonction suite afin que l'exécution de suite(n) renvoie la valeur du terme w_n ?
3. **a.** Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n on a :

$$w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

b. On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a : $0 \leqslant 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{10}{n}$.
Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?

Corrigé

Partie A

1. $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 10 = \frac{1}{2} \times 30 + 10 = 15 + 10 = 25$ et $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 10 = \frac{1}{2} \times 25 + 10 = 12,5 + 10 = 22,5$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = \left(\frac{1}{2}u_n + 10\right) - 20 = \frac{1}{2}u_n - 10 = \frac{1}{2}(u_n - 20) = \frac{1}{2}v_n$.

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 20 = 30 - 20 = 10$.
3. Pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$
4. Pour tout entier n, $u_n = v_n + 20 = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 20 = 20 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (q^n , avec $0 < q < 1$) donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 20$

Partie B

1. $w_1 = \frac{1}{2} \times u_0 + \frac{1}{2} \times 30 + 7 = \frac{1}{2} \times 45 + 15 + 7 = 22,5 + 22 = 44,5$
2. La fonction Python donnée ne calcule pas correctement w_1 car elle calcule u_1 avant de calculer w_1 il faut modifier l'ordre des opérations :

```
def suite(n):
    U = 30
    W = 45
    for i in range(1, n+1):
        W = W/2 + U/2 + 7
        U = U/2 + 10
    return W
```

3. (a)

   Initialisation : Pour $n = 0$, $w_0 = 45$ et $10 \times 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 34 = 11 + 34 = 45$

   donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$.

   Alors $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 = \frac{1}{2}\left[10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34\right] + \frac{1}{2}\left[20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + 7$

   donc $w_{n+1} = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 17 + 10 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 7 =$

   $10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34$

   donc l'égalité est vraie au rang $n+1$.

   Conclusion : l'égalité est vraie pour $n = 0$ et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$ donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Pour tout entier naturel n, $w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$. (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{10}{n} = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 4$, $0 \leqslant 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{10}{n}$ donc d'après le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (q^n avec $0 < q < 1$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 34$

Exercice 20.

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 ml d'un médicament.
On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en ml présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.
On a $u_1 = 2$ et

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif : } u_{n+1} = 2 + 0{,}8u_n.$$

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1. Calculer la valeur u_2.
2. Montrer par récurrence que :

$$u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1} \text{ pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif.}$$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geqslant 10$ admet-elle des solutions ? Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL. Justifier votre démarche.

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.
On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2.
2. Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n.$$

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

4. On donne la fonction mystere suivante, écrite en langage Python :

```
1  def mystere(k) :
2      n = 1
3      s = 2
4      while s < k :
5          n = n + 1
6          s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
7      return n
```

Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie `mystere(9)` ?

5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

Corrigé

Partie A

1. On a : $u_2 = 2 + 0,8u_1 = 2 + 0,8 \times 2 = 2 + 1,6 = 3,6$.
Après deux prises du médicament, le patient a 3,6 mL de médicament dans son organisme.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose P_n, l'affirmation : « $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$ ».
Initialisation : On a, d'une part : $u_1 = 2$, d'après l'énoncé.
Et, d'autre part : $10 - 8 \times 0,8^{1-1} = 10 - 8 \times 0,8^0 = 10 - 8 \times 1 = 2$.
On constate que pour $n = 1$, l'affirmation P_1 est vraie.
Hérédité : Pour n entier naturel non nul, on suppose l'affirmation P_n vraie, c'est-à-dire : « $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$ ».
On veut montrer que cela implique que l'affirmation P_{n+1} est vraie.
On a : $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$ par définition de la suite (u_n)

$$\begin{aligned}
&= 2 + 0,8\left(10 - 8 \times 0,8^{n-1}\right) \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= 2 + 0,8 \times 10 - 0,8 \times 8 \times 0,8^{n-1}\\
&= 2 + 8 - 8 \times 0,8 \times 0,8^{n-1}\\
&= 10 - 8 \times 0,8^{n} \quad \text{c'est l'égalité } P_{n+1}
\end{aligned}$$

Conclusion : L'affirmation est vraie au rang 1, et, pour tout rang naturel non nul n, si P_n est vraie alors P_{n+1} l'est aussi, donc, en vertu du principe de démonstration par récurrence, on a donc démontré que P_n est vraie pour tout entier naturel n non nul, autrement dit, on a établi une expression explicite du terme général de la suite.

3. Par connaissance des limites des suites géométriques, comme on a $-1 < 0,8 < 1$, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} -8 \times 0,8^{n-1} = 0$.
Par limite de la somme, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} = 10 + 0 = 10$.
La suite (u_n) converge donc vers 10.
Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'au bout d'un nombre important de prises de ce médicament, l'organisme du patient contiendra une quantité de médicament qui tend vers les 10 mL.

4. Soit N un entier naturel non nul, étudions l'inéquation :

$u_N \geqslant 10 \iff 10 - 8 \times 0,8^{N-1} \geqslant 10$

$\iff -8 \times 0,8^{N-1} \geqslant 0$

Le membre de gauche est un réel strictement négatif (car 8 et 0,8 sont strictement positifs) et ne peut être supérieur ou égal à 0.

L'inéquation n'admet donc pas de solution.

Dans le contexte de l'exercice, cela peut s'interpréter sur le comportement de la suite, qui est donc majorée (strictement) par 10, ou par la quantité de médicament dans l'organisme de l'individu qui est toujours strictement inférieure à 10 mL, quel que soit le nombre de prises du médicament enchaînées.

5. On résout une inéquation différente, avec n un entier naturel non nul :

$u_n > 9 \iff 10 - 8 \times 0,8^{n-1} > 9$

$\iff -8 \times 0,8^{n-1} > -1$

$\iff 0,8^{n-1} < \dfrac{1}{8}$ car $-8 < 0$

$\iff \ln\left(0,8^{n-1}\right) < \ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$ la fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

$\iff (n-1)\ln(0,8) < -\ln(8)$ d'après les propriétés de la fonction ln

$\iff n - 1 > -\dfrac{\ln(8)}{\ln(0,8)}$ car $\ln(0,8) < 0$

$\iff n > 1 - \dfrac{\ln(8)}{\ln(0,8)}$

Or, $1 - \dfrac{\ln(8)}{\ln(0,8)} \approx 10,3$.

Comme on résout pour n entier naturel non nul, les solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 11.

C'est à partir de 11 prises successives du médicament que la quantité de celui-ci dans l'organisme du patient dépasse strictement les 9 mL.

Partie B

1. On a $S_2 = \dfrac{u_1 + u_2}{n} = \dfrac{2 + 3,6}{2} = 2,8$.

2. Pour donner l'expression explicite de la somme, on utilisera l'expression explicite du terme général de la suite (u_n), établi à la question **A. 2.**.

La somme est une somme de n termes consécutifs, de u_1 à u_n :

$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 10 - 8 \times 0,8^0 + 10 - 8 \times 0,8^1 + \cdots + 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$

$= 10 + 10 + \cdots + 10 - 8 \times \left(0,8^0 + 0,8^1 + \cdots + 0,8^{n-1}\right)$

$= 10 \times n - 8 \times 1 \times \dfrac{1 - 0,8^n}{1 - 0,8}$ formule connue

$= 10n - \dfrac{8}{0,2} \times \left(1 - 0,8^n\right)$

$= 10n - 40 \times \left(1 - 0,8^n\right)$

$= 10n - 40 + 40 \times 0,8^n$ en développant

On arrive donc bien à l'expression annoncée.

3. On déduit de la question précédente que, pour tout n entier naturel non nul, on a : $S_n = 10 - \dfrac{40}{n} + \dfrac{40}{n} \times 0,8^n$.

On a donc, par limite du quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{40}{n} = 0$,

de plus, par limite des suites géométriques, comme $-1 < 0,8 < 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$.

Ainsi, par limite de la somme et du produit, on en déduit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 10 - \dfrac{40}{n} + \dfrac{40}{n} \times 0,8^n = 10$.

La quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du patient tend elle aussi vers 10 mL.

4. La fonction mystère est une fonction de seuil : elle détermine l'indice seuil pour lequel la valeur de S_n franchit le seuil `k` pour la première fois.

`mystere(9)` renvoie donc le premier nombre entier naturel non nul n pour lequel la quantité moyenne de médicament dans l'organisme du patient depuis le début de la prise devient supérieure ou égale à 9 mL.

5. Cette valeur est donc nécessairement strictement supérieure à 10, puisque l'on a établi à la fin de la **partie A** que c'est seulement à la onzième prise du médicament que la quantité **à ce moment là** dans le corps du patient dépasse les 9 mL.

Avant $n = 11$, les valeurs de la suite (u_n) sont donc toutes inférieures strictement à 9, et donc leur moyenne le sera aussi.

Il est donc impossible que S_n soit supérieur à 9 pour tout entier naturel non nul n, pour n inférieur ou égal à 10.

La fonction `mystère` doit donc renvoyer une valeur (un indice) strictement supérieur à 10. Elle renverra en réalité 40 (on a $S_{39} \approx 8,974$ et $S_{40} \approx 9,000\,1$).

Exercice 21.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4} u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$			

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. Calculer w_0.
2. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.
3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.
   Déterminer la limite de la suite (u_n).

Corrigé

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Voici le tableau complété (on peut calculer rapidement les termes à la main, puis vérifier à la calculatrice) :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$

2. Par exploration à la calculatrice, les termes de la suite semblent décroitrent, tout en restant strictement positifs, on a $u_{100} \approx 8 \times 10^{-29}$, et $u_{1000} \approx 9 \times 10^{-299}$.
   On suppose que la suite converge vers 0.

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

1. On a : $\quad w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$.

2. On va établir la relation de récurrence de (w_n). Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{(n+1)+1} - \frac{1}{2}u_{(n+1)} \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } (n+1) \\ &= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1} \quad \text{en appliquant la relation de récurrence de } u. \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ &= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) \\ &= \frac{1}{2}w_n \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } n \end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$.

Cette relation de récurrence établit que (w_n) est une suite géométrique, de raison $q = \frac{1}{2}$, et de premier terme $w_0 = \frac{1}{2}$.

3. Puisque la suite est géométrique, on a la propriété classique :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = w_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

4. Soit n un entier naturel. On reprend la définition de (w_n) :

$$\begin{aligned} w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n &\iff \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après l'expression explicite de } w_n \\ &\iff u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \end{aligned}$$

On arrive bien à la relation de récurrence demandée.

5. Pour tout n entier naturel, on pose : P_n l'affirmation : « $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation : On a d'une part $u_0 = 0$ et, d'autre part : $0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \times 1 = 0$.

L'affirmation est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Pour un entier naturel n donné, on suppose que la propriété P_n est vraie, c'est-à-dire : $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \quad u_{n+1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après la relation de récurrence de la question } \textbf{B. 4} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times n\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1+n) \end{aligned}$$

$u_{n+1} = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ c'est l'affirmation P_{n+1}

Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel n, la véracité de l'affirmation P_n est héréditaire, donc, par principe de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Soit n un entier naturel non nul, donc supérieur ou égal à 1 :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{d'après la question } \textbf{B. 5.} \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times 2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \big((n+1) - 2n\big) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1-n) \end{aligned}$$

La différence $u_{n+1} - u_n$ est égale au produit de deux nombres de signe contraire, car, pour n entier naturel supérieur ou égal à 1 :

— $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ est positif strictement ;

— $(1-n)$ est négatif ou nul

La différence $u_{n+1} - u_n$ est donc négative ou nulle pour tout n supérieur ou égal à 1, on en déduit donc que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2. L'expression du terme général de la suite (u_n) permet d'affirmer que la suite est minorée par 0, car chaque terme est le produit de n, entier naturel, donc positif et de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, strictement positif, car $\frac{1}{2}$ est strictement positif.

De plus, la suite est décroissante, à partir du rang $n = 1$.

La suite est donc décroissante (à partir du rang $n = 1$) et minorée par 0 : on en déduit qu'elle converge, vers une limite ℓ dont on sait que $\ell \geqslant 0$.

3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.

Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned} \ell = \ell - \frac{1}{4}\ell &\iff \ell = \frac{3}{4}\ell \\ &\iff \ell - \frac{3}{4}\ell = 0 \\ &\iff \frac{1}{4}\ell = 0 \\ &\iff \ell = 0 \quad \text{car } \frac{1}{4} \neq 0 \end{aligned}$$

L'équation ayant une unique solution, puisque la limite doit être une solution de l'équation, on a donc la limite de la suite (u_n) qui est 0, l'unique solution de l'équation.

Cela vient confirmer notre conjecture de la **partie A**.

Exercice 22.

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel ln(2), en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au XVI^{e} siècle.

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

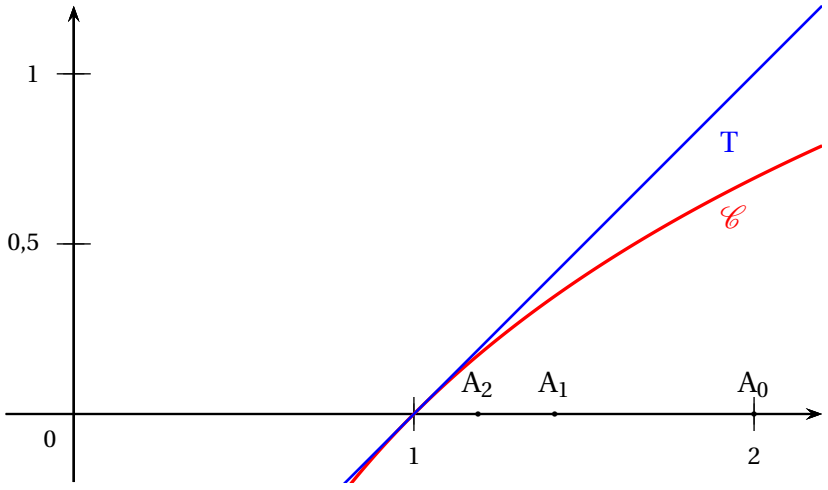
Partie A

1. **a.** Donner la valeur exacte de u_1 et de u_2.
   b. Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.
2. **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c. Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.
   d. Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n).

Partie B

On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

1. **a.** Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\quad \ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction ln et la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
   Une équation de la droite T est $y = x - 1$.
   Les points A_0, A_1, A_2 ont pour abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 et pour ordonnée 0.



   On décide de prendre $x-1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0{,}99\ ;\ 1{,}01[$.

a. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0,99\ ;\ 1,01[$ et donner une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.

b. En déduire une approximation de $\ln(u_k)$.

c. Déduire des questions **1. c.** et **2. b.** de la **partie B** une approximation de $\ln(2)$.

3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.

Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel `Briggs(a)` renvoie une approximation de $\ln(a)$.

On rappelle que l'instruction en langage Python `sqrt(a)` correspond à $\sqrt{a}$.

```
from math import*
def Briggs(a):
  n = 0
  while a >= 1.01:
    a = sqrt(a)
    n = n+1
  L =...
return L
```

Corrigé

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Partie A

1. **a.** $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{2}$

$u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt{\sqrt{2}}$.

b. À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que la suite est décroissante et converge vers 1.

2. **a.** Posons, pour tout entier naturel n, l'affirmation P_n : « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».

Initialisation : On a calculé $u_1 = \sqrt{2} \approx 1,414$ et $u_0 = 2$

On a donc bien $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.

L'affirmation P_0 est donc vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Montrons que l'affirmation P_{n+1} est vraie, c'est à dire que $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \implies \sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}$

car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$

$\implies 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

Si, pour n naturel, P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie également.

Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel non nul n, la véracité de l'affirmation est héréditaire : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

b. D'après la question précédente, pour tout entier n, $1 \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 1.

Et pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Or toute suite décroissante et minorée est convergente donc, la suite (u_n) est convergente vers une limite $\ell \geqslant 1$.

c. Soit $x \in [0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} = x &\iff x = x^2 \text{ car } x \geqslant 0\\ &\iff x^2 - x = 0\\ &\iff x(x-1) = 0\\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 1\end{aligned}$$

L'équation $\sqrt{x} = x$ admet deux solutions sur $[0\,;\,+\infty[$: 0 et 1.

d. La suite (u_n) est convergente vers ℓ et est définie par récurrence par :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction racine carrée qui est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Nous avons résolu cette équation à la question précédente, les solutions sont 0 et 1, or d'après la question **A. 1. b.**, $\ell \geqslant 1$ donc $\ell = 1$.

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Partie B

1. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \ln(u_{n+1})\\ &= \ln\left(\sqrt{u_n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln(u_n)\\ &= \frac{1}{2}v_n\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$.

b. On a donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = \ln(2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{\ln(2)}{2^n}$.

c. Or, pour tout entier naturel n, $v_n = \ln(u_n)$ donc $\dfrac{\ln(2)}{2^n} = \ln(u_n)$ c'est à dire : $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.

2. **a.** À l'aide de la calculatrice on trouve que pour tout $k < 7$, $u_k > 1{,}01$ et $u_7 \approx 1{,}005\,43$ donc $k = 7$.

b. On décide de prendre $x - 1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0{,}99\,;\,1{,}01[$ donc $\ln(u_7) \approx u_7 - 1 \approx 0{,}005\,43$.

c. D'après les questions **1. c.** et **2. b.** de la **partie B** une approximation de $\ln(2)$ est $2^7 \ln(u_7)$ soit $2^7 \times 0{,}005\,43$ c'est à dire 0,695.

3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.

```
from math import*
def Briggs(a):
  n = 0
  while a >= 1.01:
    a = sqrt(a)
    n = n+1
  L =2**n *(a-1)
return L
```

Exercice 23.

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1.
2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n, par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

   a. Calculer a_0 et a_1.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.
   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$a_n \geqslant 3n - 1$$

   d. En déduire la limite de la suite (a_n).

3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).
   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$.
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).
4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.
   On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
1  def algo(p):
2    u=2
3    n=0
4    while u-1>p:
5      u=(2*u+1)/(u+2)
6      n=n+1
7    return (n,u)
```

a. Interpréter les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` dans le contexte de l'exercice.

b. Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0,001$.

Corrigé

Pour cet exercice, on admet que les deux suites (a_n) et (u_n) sont bien définies, ce qui équivaut à admettre que les termes de la suite (u_n) sont tous différents de -2 (pour que la suite (u_n) soit bien définie) et de 1 (pour que (a_n) soit bien définie).

1. On a : $u_1 = \dfrac{2u_0+1}{u_0+2} = \dfrac{2\times 2+1}{2+2} = \dfrac{5}{4} = 1,25$.

2. **a.** On a : $a_0 = \dfrac{u_0}{u_0-1} = \dfrac{2}{2-1} = 2$

et $a_1 = \dfrac{u_1}{u_1-1} = \dfrac{1,25}{1,25-1} = \dfrac{1,25}{0,25} = 5$.

b. Soit n un entier naturel.

On a, d'une part : $a_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \dfrac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-1} = \dfrac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-\dfrac{u_n+2}{u_n+2}}$

$$= \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1-u_n-2}{u_n+2}} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}$$

$$= \frac{2u_n+1}{u_n-1}$$

et, d'autre part : $3a_n - 1 = 3\times\dfrac{u_n}{u_n-1} - 1 = \dfrac{3u_n}{u_n-1} - \dfrac{u_n-1}{u_n-1} = \dfrac{3u_n-(u_n-1)}{u_n-1}$

$$= \frac{2u_n+1}{u_n-1}$$

On constate donc bien que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

Autre méthode :

Soit n un entier naturel.

$$a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \frac{u_{n+1}-1+1}{u_{n+1}-1} = 1 + \frac{1}{u_{n+1}-1}$$

$$= 1 + \frac{1}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2} - \dfrac{u_n+2}{u_n+2}} = 1 + \frac{1}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}$$

$$= 2 + \frac{u_n+2}{u_n-1} - 1$$

$$= \frac{2(u_n-1)+u_n+2}{u_n-1} - 1 = \frac{2u_n-2+u_n+2}{u_n-1} - 1$$

$$= \frac{3u_n}{u_n-1} - 1$$

$$= 3a_n - 1$$

c. Posons, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'affirmation P_n :

« $a_n \geqslant 3n-1$ ».

Initialisation : On a calculé $a_1 = 5$ et donc on a bien $5 \geqslant 3 \times 1 - 1 = 2$.

L'affirmation P_1 est donc vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire que $a_n \geqslant 3n-1$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
a_n \geqslant 3n-1 &\Longrightarrow 3a_n \geqslant 3(3n-1) \quad \text{car } 3>0\\
&\Longrightarrow 3a_n - 1 \geqslant 9n-3-1\\
&\Longrightarrow a_{n+1} \geqslant 9n-4 \quad \text{d'après la question } \textbf{2. b.}\ 3an-1 = a_{n+1}\\
&\Longrightarrow a_{n+1} \geqslant 3n+6n+3-7\\
&\Longrightarrow a_{n+1} \geqslant 3(n+1)+6k-7\\
&\Longrightarrow a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1+6n-6\\
&\Longrightarrow a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1+6(n-1)\\
&\Longrightarrow a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1 \quad \text{car } 6(n-1) \geqslant 0
\end{aligned}$$

Si, pour un entier n naturel non nul (ce qui garantit $(n-1) \geqslant 0$), P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie également.

Conclusion : L'affirmation P_1 est vraie, et, pour tout entier naturel non nul n, la véracité de l'affirmation est héréditaire : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n, on a : $a_n \geqslant 3n-1$.

d. Comme $3>0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n-1 = +\infty$.

Par comparaison, puisque pour tout n non nul, on a $a_n \geqslant 3n-1$, on en déduit que la suite (a_n) diverge vers $+\infty$.

3. **a.** Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{u_n}{u_n-1} &\iff a_n \times (u_n-1) = u_n \quad \text{car } u_n - 1 \neq 0\\
&\iff a_n \times u_n - a_n - u_n = 0\\
&\iff (a_n-1)\times u_n - a_n = 0\\
&\iff (a_n-1)\times u_n = a_n\\
&\iff u_n = \frac{a_n}{a_n-1}
\end{aligned}$$

Pour la dernière étape, la division par $a_n - 1$ est légitime, puisque a_n est un quotient de deux nombres différents, car le dénominateur est égal au numérateur moins 1, donc a_n ne peut pas être égal à 1, donc $a_n - 1$ est non nul.

Ainsi, on a bien exprimé u_n en fonction de a_n avec la relation annoncée dans le question.

b. Avec les questions **2. a.** on a $a_0 = 2$ et avec **2. c.**, pour n naturel non nul, on a $a_n \geqslant 3n-1>0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, a_n est non nul.

On déduit donc de la question précédente que, pour tout n naturel, on a : $u_n = \dfrac{a_n}{a_n-1} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a_n}}$.

Enfin, puisque (a_n) diverge vers $+\infty$, par limite du quotient, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$,

puis, par limite de la somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{a_n}=1$,

enfin, par limite du quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a_n}} = 1$.

La suite (u_n) converge donc vers 1.

4. Puisqu'on admet que la suite (u_n) est décroissante, cela signifie que la suite est minorée par sa limite et donc que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 1$ donc $u_n - 1 \geqslant 0$.

a. Cette fonction python initialise la variable `u` à 2, ce qui est la valeur de u_0 et la variable `n` à 0, ce qui est l'indice correspondant.

Puis, à chaque exécution de la boucle `while`, `u` se voit affecter le terme suivant dans la suite (u_n) et `n` se voit affecter l'entier suivant, donc l'indice correspondant au terme dont la valeur est stockée dans la variable `u`.

Cette boucle `while` tourne tant que l'écart entre le terme stocké dans la variable `u` et la limite 1 est strictement supérieur à la valeur `p`, qui est l'argument choisi pour invoquer la fonction.

Les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` correspondent donc respectivement à l'indice et à la valeur du premier terme de la suite pour lequel l'écart entre le terme et la limite de la suite est inférieur ou égal à la valeur `p` choisie.

b. On parcourt la suite à la calculatrice, et on constate que $u_5 \approx 1{,}002\,7$, donc $u_5 - 1 > 0{,}001$ et $u_6 \approx 1{,}000\,9$, donc $u_6 - 1 \leqslant 0{,}001$.

La valeur de n pour $p = 0{,}001$ est donc 6 (et la valeur renvoyée pour `u` est donc une valeur approchée de u_6).

On peut aussi programmer la fonction python sur la calculatrice et faire l'appel `algo(0.001)`, qui renvoie `(6, 1,000 914 913 083 257)`

Exercice 24.

Cet exercice contient 5 affirmations.
Pour chaque affirmation, répondre par VRAI ou FAUX en justifiant la réponse.
Toute absence de justification ou justification incorrecte ne sera pas prise en compte dans la notation.

Partie 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 10 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

1. **Affirmation 1** : La suite (u_n) est décroissante minorée par 0.
2. **Affirmation 2** : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. **Affirmation 3** : La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$ est géométrique.

Partie 2

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \dfrac{3}{2}y + 2$ d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

1. **Affirmation 4** : Il existe une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).
2. Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$ on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 0$.
3. **Affirmation 5** : La tangente au point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}_f$ a pour coefficient directeur $2e^{\frac{3}{2}}$.

Corrigé

Partie 1

$$u_0 = 10 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

1. **Affirmation 1** : Vraie Démonstration par récurrence :
   soit P_n la proposition : « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».
   Initialisation : $I_0 = 10$ et $I_1 = \dfrac{1}{3} \times 10 + 2 = \dfrac{10}{3} + \dfrac{6}{3} = \dfrac{16}{3} < \dfrac{30}{3}$, soit $0 \leqslant I_1 \leqslant I_0$: la proposition est vraie au rang 0 ;
   Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$; il en résulte par produit par le réel positif $\dfrac{1}{3}$ que $\quad 0 \leqslant \dfrac{1}{3}u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{3}u_n$ puis par somme avec 2 :
   $2 \leqslant \dfrac{1}{3}u_{n+1} + 2 \leqslant \dfrac{1}{3}u_n + 2$, soit finalement :
   $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: la proposition est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence quel que soit $n \in \mathbb{N}$,
   $0 < 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, autrement dit la suite est décroissante et minorée par 0.
2. **Affirmation 2** : Fausse
   En effet dans la question précédente on a montré au moment de l'hérédité que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant 2$, donc pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2 > 0$: la limite de la suite ne peut être nulle.
3. **Affirmation 3** : Vraie .
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \dfrac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \dfrac{1}{3}u_n - 1 = \dfrac{1}{3}(u_n - 3) = \dfrac{1}{3}v_n$.
   L'égalité $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$ vraie pour tout naturel n montre que le suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 10 - 3 = 7$.
   On sait qu'alors pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$ (avec q raison de la suite), soit $v_n = 7 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
   Comme $0 < \dfrac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ et il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$, ce qui améliore le résultat de la question précédente.

Partie 2

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{3}{2}y + 2$ d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

1. **Affirmation 4** : Vraie. Il existe une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).
   Soit g la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = K$, avec $K \in \mathbb{R}$; alors $g'(x) = 0$.
   g est donc solution de l'équation différentielle si
   $g'(x) = \frac{3}{2}g(x) + 2 \iff 0 = \frac{3}{2} \times K + 2 \iff \frac{3}{2}K = -2 \iff K = -\frac{4}{3}$.
2. Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$ on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 0$.
3. **Affirmation 5** : Vraie La tangente au point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}_f$ a pour coefficient directeur $2e^{\frac{3}{2}}$.
   Soit f une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E), alors :
   $f'(x) = \frac{3}{2}f(x) + 2$. Or on a vu que $g'(x) = \frac{3}{2}g(x) + 2$, d'où par différence membre à membre de ces deux égalités :
   $f'(x) - g'(x) = \frac{3}{2}f(x) - \frac{3}{2}g(x) \iff f'(x) - g'(x) = \frac{3}{2}(f(x) - g(x)) \iff$
   $((f-g)'(x) = \frac{3}{2}(f(x) - g(x))$ par linéarité de la dérivation : ceci signifie que la fonction $f - g$ est solution de l'équation $y' = \frac{3}{2}y$ dont les solutions sont les fonctions $x \longmapsto Ke^{\frac{3}{2}x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
   On a donc $f(x) - g(x) = f(x) - \left(-\frac{4}{3}\right) = Ke^{\frac{3}{2}x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
   Finalement les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ke^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3}$.
   En particulier la fonction f_1 telle que $f_1(0) = 0$ vérifie $Ke^0 - \frac{4}{3} \iff K = \frac{4}{3}$, donc
   $f_1(x) = \frac{4}{3}e^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3}$.
   Puisque f_1 est une solution de (E), on a $f_1'(1) = \frac{3}{2}f(1) + 2 = \frac{3}{2}\left[\frac{4}{3}e^{\frac{3}{2}\times 1} - \frac{4}{3}\right] + 2 =$
   $2e^{\frac{3}{2}} - 2 + 2 = 2e^{\frac{3}{2}}$. Le nombre dérivé en 1 est égal à la pente de la tangente à la courbe représentative de f_1 au point d'abscisse 1.

Exercice 25.

Répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes et justifier votre réponse.
Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans la notation.
Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par

$$u_n = \frac{25+(-1)^n}{n}.$$

Affirmation 1 : La suite (u_n) est divergente.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} w_0 &= 1 \\ w_{n+1} &= \dfrac{w_n}{1+w_n} \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n, $w_n > 0$.

On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \dfrac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.

Affirmation 2 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \ln(1+v_n) \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n, $v_n > 0$.

Affirmation 3 : La suite (v_n) est décroissante.

4. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} [\ln(x)]^n \,\mathrm{d}x$.

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.

Corrigé

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout n non nul par $u_n = \dfrac{25+(-1)^n}{n}$.

Affirmation 1 : La suite (u_n) est divergente.

Pour tout n non nul, on a : $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant +1$ donc $25-1 \leqslant 25+(-1)^n \leqslant 25+1$ donc $24 \leqslant 25+(-1)^n \leqslant 26$ donc $\dfrac{24}{n} \leqslant \dfrac{25+(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{26}{n}$ donc $\dfrac{24}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{26}{n}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{24}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{26}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Affirmation 1 fausse

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} w_0 &= 1 \\ w_{n+1} &= \dfrac{w_n}{1+w_n} \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n, $w_n > 0$n et on considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \dfrac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.

Affirmation 2 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.

Pour tout n, on a : $t_{n+1} = \dfrac{k}{w_{n+1}} = \dfrac{k}{\frac{w_n}{1+w_n}} = \dfrac{k(1+w_n)}{w_n} = \dfrac{k+kw_n}{w_n} = \dfrac{k}{w_n} + k = t_n + k$

Donc la suite (t_n) est arithmétique de raison k.

De plus, $k > 0$ donc la suite (t_n) est strictement croissante.

Affirmation 2 vraie

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \ln(1+v_n) \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n, $v_n > 0$,

Affirmation 3 : La suite (v_n) est décroissante.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $v_n > v_{n+1}$.

On va démontrer par récurrence que cette propriété est vraie pour tout n.

- **Initialisation**

  $v_0 = 1$ et $v_1 = \ln(1+v_0) = \ln(2) \approx 0,69$; donc $v_0 > v_1$.

  La propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité**

  On suppose que $v_n > v_{n+1}$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  $v_n > v_{n+1}$ donc $1 + v_n > 1 + v_{n+1}$

  Or la fonction ln est croissante sur $]0 ; +\infty[$ donc $\ln(1+v_n) > \ln(1+v_{n+1})$, ce qui veut dire que $v_{n+1} > v_{n+2}$. La propriété est donc héréditaire.
- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0. Elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a démontré que, pour tout $n \geqslant 0$, on avait : $v_n > v_{n+1}$; donc la suite (v_n) est décroissante.

Affirmation 3 vraie

4. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \left[\ln(x)\right]^n \mathrm{d}x$.

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1) I_n$.

$I_{n+1} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \left[\ln(x)\right]^{n+1} \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} 1 \times \left[\ln(x)\right]^{n+1} \mathrm{d}x$

On va calculer I_{n+1} au moyen d'une intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$

On pose $u'(x) = 1$ donc $u(x) = x$, et $v(x) = \left[\ln(x)\right]^{n+1}$ donc $v'(x) = (n+1) \times \dfrac{1}{x} \times \left[\ln(x)\right]^n$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[x \times \left[\ln(x)\right]^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times (n+1) \times \frac{1}{x} \times \left[\ln(x)\right]^n \mathrm{d}x \\ &= \left(\mathrm{e}\left[\ln(\mathrm{e})\right]^{n+1} - 1\left[\ln(1)\right]^{n+1}\right) - (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} \left[\ln(x)\right]^n \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - (n+1)\, I_n \end{aligned}$$

Affirmation 4 vraie

Exercice 26.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ t_{n+1} = -0,8t_n + 18.$$

Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

2. On considère une suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul :

$$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4.$$

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \frac{S_n}{n}$.
Affirmation 2 : La suite (u_n) converge.

3. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n}.$$

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^n - n$.
Affirmation 4 : La suite (u_n) converge.

5. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n.

```
def u(n) :
    valeur = 2
    for k in range(n) :
        valeur = 0.5 * (valeur + 2/valeur)
    return valeur
```

On admet que (u_n) est décroissante et vérifie pour tout entier naturel n :

$$\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2.$$

Affirmation 5 : La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Corrigé

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :
pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = -0,8t_n + 18$.

Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

Pour tout n : $w_{n+1} = t_{n+1} - 10 = -0,8t_n + 18 - 10 = -0,8t_n + 8 = -0,8(t_n - 10)$
$= -0,8w_n$

Donc la suite (w_n) est géométrique de raison $-0,8$.

Affirmation 1 vraie

2. Soit la suite (S_n) qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4$.

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \dfrac{S_n}{n}$.

Affirmation 2 : La suite (u_n) converge.

$n > 0$ donc
$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4$. entraîne $\dfrac{3n-4}{n} \leqslant \dfrac{S_n}{n} \leqslant \dfrac{3n+4}{n}$ c'est-à-dire $3 - \dfrac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{4}{n}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \dfrac{4}{n} = 3$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \dfrac{4}{n} = 3$
- Pour tout $n > 0$: $3 - \dfrac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{4}{n}$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Affirmation 2 vraie

3. Soit la suite (v_n) définie par : $v_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{v_n}$.

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.

On va démontrer cette propriété par récurrence.

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$: $v_1 = 2$ et $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1+1}{1} = 2$. Donc la propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $v_n = \dfrac{n+1}{n}$ (hypothèse de récurrence).
  $v_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{v_n} = 2 - \dfrac{1}{\frac{n+1}{n}} = 2 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2(n+1)-n}{n+1} = \dfrac{2n+2-n}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$
  $= \dfrac{(n+1)+1}{n+1}$
  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 1, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$. Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Affirmation 3 vraie

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^n - n$.

Affirmation 4 : La suite (u_n) converge.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x - x$. Donc $u_n = f(n)$ pour tout n.

Pour $x > 0$, $f(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right)$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1 = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right) = +\infty$.

On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$n ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Affirmation 4 fausse

5. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n.

```
def u(n) :
    valeur = 2
    for k in range(n) :
        valeur = 0.5 * (valeur + 2/valeur)
    return valeur
```

On admet que (u_n) est décroissante et vérifie pour tout n : $\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

Affirmation 5 : La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

D'après le script Python, (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= 0,5\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \text{ pour tout } n \end{cases}$

- La suite (u_n) est décroissante.
- Pour tout n, on a : $\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2$ donc la suite est minorée par $\sqrt{2}$.
- D'après le théorème de la convergence monotone, on peut dire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ tel que $\ell \geqslant \sqrt{2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$

De l'égalité $u_{n+1} = 0,5\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$, on déduit : $\ell = 0,5\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right)$.

On résout cette équation.

$\ell = 0,5\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right) \iff 2\ell = \ell + \dfrac{2}{\ell} \iff \ell = \dfrac{2}{\ell} \iff \ell^2 = 2 \iff \ell = \sqrt{2}$ ou $\ell = -\sqrt{2}$

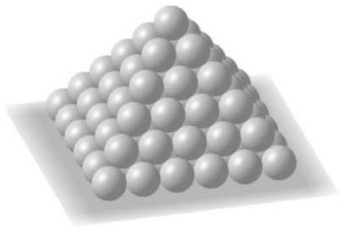
On a vu que $\ell \geqslant \sqrt{2}$ donc $\ell = \sqrt{2}$.

Affirmation 5 vraie

Exercice 27.

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :

- le 1er étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule ;
- le 2e étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules ;
- le 3e étage possède 9 boules ;
- ...
- le n-ième étage possède n^2 boules.



Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n-ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages.

2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

a. Calculer S_5 et interpréter ce résultat.

b. On considère la fonction `pyramide` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python.

Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n, l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1, n+1) :
        S = ...
    return ...
```

c. Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges. Combien d'oranges utilise-t-il pour construire la plus grande pyramide possible ?

Corrigé

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :

- le 1er étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule ;
- le 2e étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules ;
- le 3e étage possède 9 boules ;
- ...
- le n-ième étage possède n^2 boules.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n-ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages est :
$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$.

2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

a. $S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \left(u_1 + u_2 + u_3 + u_4\right) + u_5 30 + 5^2 = 55$
Le nombre total de boules d'une pyramide de 5 étages est : $S_5 = 55$.

b. On complète la fonction `pyramide` ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n, l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1, n+1) :
        S = S + i**2
    return S
```

c. Pour tout entier naturel n :

- $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(2n^2+n)}{6} + \dfrac{6(n+1)^2}{6}$
$= \dfrac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{8}$
$= \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$
- $\dfrac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \dfrac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6}$
$= \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

Donc $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$

d. On démontre par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Initialisation**
Pour $n = 1$, on a $S_1 = 1$ et $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = \dfrac{1\times 2\times 3}{6} = 1$
Donc la propriété est vraie au rang 1.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang n, avec $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
  C'est l'hypothèse de récurrence.

  $$\begin{aligned} S_{n+1} &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} = \left(u_1 + u_2 + \cdots + u_n\right) + u_{n+1} \\ &= S_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6} \text{ (d'après la question précédente)} \\ &= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} \end{aligned}$$

  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 1, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$.
  Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges.

Il faut donc trouver le plus grand entier n tel que $S_n \leqslant 200$.

On calcule : $S(7) = \dfrac{7(7+1)(2\times 7+1}{6} = 140 < 200$ et $S(8) = \dfrac{8(8+1)(2\times 8+1)}{6} = 204 > 200$.

Le marchand utilise donc 140 oranges pour construire une pyramide à 7 étages.

Exercice 28.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et pour tout entier naturel} \quad n, \quad u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1. **a.** Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2.

b. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python. On admet que, pour tout réel strictement positif `a`, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de `a`.

```
def mystere(k) :
    u = 8
    S = 0
    for i in range(k) :
        S = S + u
        u = u - log( u / 4 )
    return S
```

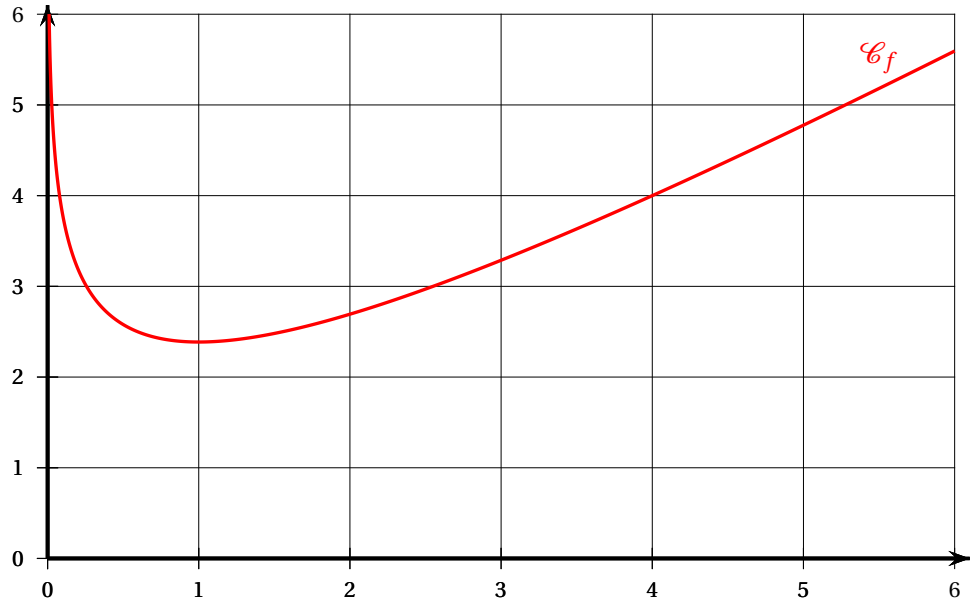
L'exécution de `mystere(10)` renvoie `58.44045206721732`. Que représente ce résultat ?

c. Modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

On donne ci-dessous une représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f pour les valeurs de x comprises entre 0 et 6.



Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle.
On note ℓ la valeur de cette limite

c. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

d. En déduire la valeur de ℓ.

Corrigé

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et pour tout entier naturel} \quad n, \quad u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1. **a.**

- $u_1 = 8 - \ln 2 \approx 7{,}31$;
- $u_2 = 8 - \ln 2 \ln 8 - \ln 24 - \approx 6{,}70$.

b. `mystere(10)` donne la somme des premiers termes de la suite de u_0 à u_9, soit $u_0 + u_1 + \ldots + u_9 = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

c. Il suffit en ligne 7 de remplacer S par (S /k)

2.
$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

La fonction f somme de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle en posant $u(x) = \frac{x}{4}$, d'où $u'(x) = \frac{1}{4}$,

$f'(x) = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{x}{4}} = 1 - \frac{1}{4} \times 4\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1$:

- si $0 < x < 1$, alors $x - 1 < 0$: la fonction f est décroissante sur $]0\ ;\ 1[$;
- si $x > 1$, alors $x - 1 > 0$: la fonction f est croissante sur $-1\ ;\ +\infty[$
- si $x = 1$, alors $f'(1) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln\frac{1}{4} = 1 - (-\ln 4) = 1 + \ln 4$ est le minimum de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. **a.** *Initialisation* : on a vu que $u_1 \approx 7{,}3$ et comme $u_0 = 8$, on a donc :

$$1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$$

l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

On sait que sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ la fonction f est croissante, donc on a

$f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$.

Or $f(1) = 1 - \ln\frac{1}{4} \approx 2{,}39$, donc $f(1) \geqslant 1$ et on a

$1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$ il l'est encore au rang suivant : d'après le principe de récurrence :

pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

b. L'encadrement précédent montre que : pour tout naturel n

- $u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante ;
- $1 \leqslant u_n$: la suite (u_n) est minorée par 1.

On sait qu'alors la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 1$

c. $f(x) = x \iff x - \ln\left(\frac{x}{4}\right) = x \iff 0 = \ln\left(\frac{x}{4}\right) \iff \frac{x}{4} = 1 \iff x = 4.$

d. Par continuité de la fonction f (car elle est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$), la relation $u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right)$, donne puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$:

$\ell = \ell - \ln\left(\frac{\ell}{4}\right)$: d'après la question précédente $\ell = 4$.

Exercice 29.

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre réel a.

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$

1. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$.
2. Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.
   a. En utilisant un raisonnement par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n < 2$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$

1. On donne ci-contre la fonction `u` écrite en langage Python.
   Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit `u(2,1)` et `u(2,2)` dans la console Python.

```
def u(a,n) :
    u=a
    for k in range(n) :
      u=u**2-2*u+2
    return u
```

2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite (u_n) dans le cas où $a = 2$?
   On admettra ce résultat sans démonstration.

Partie C : étude dans le cas général

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de a.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)}$.
2. Déterminer, suivant les valeurs du réel a strictement supérieur à 1, la limite de la suite (u_n).

Corrigé

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre réel a.

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$

1. **a.** D'après la définition : pour tout entier naturel n

$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \iff u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n \iff u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.

b. *Méthode* 1 : d'après la définition : pour tout entier naturel n

$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \iff u_{n+1} = (u_n-1)^2 - 1 + 2 \iff u_{n+1} = (u_n-1)^2 + 1 \iff u_{n+1} - u_n = (u_n-1)^2 + 1 - u_n \iff u_{n+1} - u_n = (u_n-1)^2 - 1(u_n-1) \iff u_{n+1} - u_n = (u_n-1)(u_n-1-1) \iff u_{n+1} - u_n = (u_n-1)(u_n-2)$

Méthode 2 : Soit $P_n = u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2$; en posant $u_n = x$, on obtient

$P_n = x^2 - 3x + 2$: ce trinôme a deux racines (car $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 = 1$) :

$x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1$.

Donc $P_n = (x-1)(x-2) = (u_n-1)(u_n-2)$.

2. **a.** *Initialisation* : $u_0 = a$ et $1 < a < 2$, donc $u_0 < 2$: l'inégalité est vraie au rang 0 ;

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < 2$.

$u_n < 2 \iff u_n - 2 < 0$ et on a admis que $u_n > 1 \iff u_n - 1 > 0$, donc d'après le **1 b.** $(u_n-1)(u_n-2) < 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n < 0 \iff u_{n+1} < u_n < 2$, d'où par transitivité : $u_{n+1} < 2$: l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$, donc par le principe de récurrence :

pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.

b. On a vu dans la question précédente que $1 < u_{n+1} < u_n < 2$ qui montre :

- que la suite (u_n) est décroissante ;
- que la suite (u_n) est minorée par 1.

La suite (u_n) est monotone décroissante et minorée par le 1 : elle converge donc vers un réel $\ell \geqslant 1$.

Par continuité de la fonction polynôme $x \longmapsto x^2 - 2x + 2$, la relation de récurrence donne à la limite en plus l'infini :

$$\ell = \ell^2 - 2\ell + 2 \iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \iff \begin{cases} \ell - 1 = 0 \\ \text{ou} \\ \ell - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ell = 1 \\ \text{ou} \\ \ell = 2 \end{cases}$$

$\ell = 2$ n'est pas possible puisque (u_n) étant strictement décroissante :

$\ell < u_0 = a < 2$, d'où $\ell < 2$, donc $\ell = 1$.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$

1. u(2,1) renvoie 2 et u(2,2) renvoie 2

2. On peut conjecturer que la suite (u_n) est constante : $u_n = 2$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$

Partie C : étude dans le cas général

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.

a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1\right) = \ln\left[(u_n-1)^2\right] = 2\ln(u_n - 1)$ car on sait que $u_n > 1 \iff u_n - 1 > 0$.

Finalement : $v_{n+1} = 2\ln(u_n - 1) = 2v_n$.

L'égalité $v_{n+1} = 2v_n$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 de premier terme $v_0 = \ln a - 1)$

b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n = 2^n \ln(a-1)$.
On peut écrire $v_n = \ln(a-1)^{2^n} = \ln(u_n - 1)$ soit par croissance de la fonction logarithme népérien :
$(a-1)^{2^n} = u_n - 1 \iff u_n = 1 + (a-1)^{2^n} = 1 + \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)}$.

2.

• Si $1 < a < 2$, alors $0 < a-1 < 1 \Rightarrow \ln(a-1) < 0$ (par croissance de la fonction logarithme népérien).
On a donc $2^n \ln(a-1) < 0$ et on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

• Si $a = 2$, $\ln(a-1) = \ln 1 = 0$, donc $2^n \ln(a-1) = 0$ et $u_n = 1+1 = 2$. u est constante et on peut écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

• Si $a > 2$, $a-1 > 1$, donc $\ln(a-1) > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La suite est divergente.

Exercice 30.

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que 1 $\mathrm{m}^3 = 1\,000$ L.
Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.
Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $\mathrm{mg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et $3\,\mathrm{mg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$.
Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.
Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à $0,01\,\mathrm{mg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de $0,70\,\mathrm{mg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$.

Partie A : étude d'un modèle discret.

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de $0,3\,\mathrm{mg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$.

2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore, en $\mathrm{mg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0,7$.
On admet que pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = 0,92\,v_n + 0,3.$$

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.

4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-après écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

```
def alerte_chlore(s) :
    n = 0
    u = 0.7
    while ... :
        n = ...
        u = ...
    return n
```

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu.

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.
Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$, dans la piscine.
On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -0,08y + \dfrac{q}{50}$, où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = Ce^{-0,08x} + \dfrac{q}{4}$ où C est une constante réelle.

2. **a.** Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.

b. On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à $0,7\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.
On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de $2\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$. Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

Corrigé

Partie A : étude d'un modèle discret.

1. Ajouter 15 g, soit 15 000 mg, de chlore, dans une piscine de $50\,\text{m}^3$, soit 50 000 L, c'est donc faire augmenter la concentration de : $\dfrac{15000}{50000} = \dfrac{15}{50} = \dfrac{3}{10} = 0,3\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.

2. *Remarque :* la relation de récurrence peut s'interpréter, en disant que sous l'action du milieu ambiant, 8 % du chlore présent dans la piscine disparaît chaque jour (et donc 92 % du chlore présent une journée est encore présent le jour suivant).

a. *Initialisation :* on a $v_0 = 0,7$
d'après la relation de récurrence : $v_1 = 0,92v_0 + 0,3 = 0,944$.
On a donc bien : $v_0 \leqslant v_1 \leqslant 4$.
L'inégalité souhaitée est donc vérifiée au rang 0.

Hérédité : soit n naturel donné, tel que l'inégalité est vraie au rang n, c'est-à-dire que : $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.
Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4 &\Longrightarrow 0,92v_n \leqslant 0,92v_{n+1} \leqslant 0,92\times 4 \qquad \text{car } 0,92 > 0 \\ &\Longrightarrow 0,92v_n + 0,3 \leqslant 0,92v_{n+1} + 0,3 \leqslant 3,68 + 0,3 \\ &\Longrightarrow v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 3,98 \\ &\Longrightarrow v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 4 \end{aligned}$$

La véracité de l'inégalité est donc héréditaire.

Conclusion : L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il l'est encore au rang $n+1$, donc en vertu du principe de récurrence, pour tout entier n naturel, on a : $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

b. De la question précédente, on retient :

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leqslant v_{n+1}$ donc la suite (v_n) est croissante ;

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leqslant 4$ donc la suite (v_n) est majorée par 4.

D'après le théorème de croissance monotone la suite (v_n) est donc convergente, vers une limite ℓ inférieure ou égale à 4.

De plus, la suite (v_n) est définie par récurrence, et la fonction de récurrence : $x \longmapsto 0,92x+0,3$ est continue sur $\mathbb{R}$, puisque c'est une fonction affine, donc la suite ne peut converger que vers un point fixe de la fonction de récurrence

ℓ est donc une solution de l'équation : $x = 0,92x+0,3 \iff 0,08x = 0,3$

$$\iff x = \frac{0,3}{0,08}$$

$$\iff x = 3,75$$

L'équation n'a qu'une solution, donc la suite (v_n) converge vers 3,75.

3. À long terme, le taux de chlore ne sera pas conforme à la préconisation des piscinistes, car si la limite est 3,75 alors tout intervalle ouvert contenant 3,75 contiendra tous les termes à partir d'un certain rang. Notamment l'intervalle $]3\ ;\ 5[$.

Il existe donc un rang à partir duquel les termes de la suite seront dans l'intervalle $]3\ ;\ 5[$, et donc la concentration en chlore dépassera strictement la limite supérieure de $3\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$ recommandée par les piscinistes.

4. C'est un algorithme de seuil classique, on va calculer les termes de la suite, les uns après les autres. Pour s'arrêter dès qu'un terme est strictement supérieur au seuil s, il faut continuer tant que (while) les termes ne sont pas strictement supérieurs, donc tant que les termes sont inférieurs ou égaux au seuil s.

Le programme complété est donc :

```
def alerte_chlore(s) :
    n = 0
    u = 0.7
    while u <= s :
        n = n + 1
        u = 0.92*u + 0.3
    return n
```

5. En saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)`, le programme renvoie 17 (en effet, $v_{16} \approx 2,95 \leqslant 3$ et $v_{17} \approx 3,01 > 3$).

Dans le contexte de l'exercice, cela veut dire que si Alain applique cette méthode, 17 jours après le 19 juin, le taux de chlore dans sa piscine serait trop élevé, par rapport aux recommandations des piscinistes.

Partie B : étude d'un modèle continu.

1. Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$, où a et b sont des réels (a non nul), ont pour solutions les équations de la forme $x \longmapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

Ici, avec $a = -0,08$ et $b = \dfrac{q}{50}$, cela conduit à :

$$x \longmapsto Ce^{-0,08x} - \frac{\frac{q}{50}}{-0,08} = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{50 \times 0,08}.$$

On arrive donc bien à une solution f de la forme $f(x) = Ce^{-0,08x} + \dfrac{q}{4}$ où C est une constante réelle.

2. **a.** Puisque $-0,08 < 0$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} -0,08x = -\infty$

donc, par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0,08x} = \lim\limits_{y \to -\infty} e^{y} = 0$

puis, par limite du produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} Ce^{-0,08x} = 0$

enfin, par limite de la somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{q}{4}$.

b. Si on veut que le taux de chlore se stabilise autour de $2\,\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, il faut que la limite de la fonction f soit 2, donc on veut :

$\dfrac{q}{4} = 2 \iff q = 8$.

Pour cet objectif à long terme, Alain devra donc ajouter 8 grammes de chlore par jour dans sa piscine.

À l'instant $t = 0$, on avait donc un taux de $0,7\,\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, donc $f(0) = 0,7$.

$$\begin{aligned} f(0) = 0,7 &\iff Ce^{-0,08\times 0} + \frac{8}{4} = 0,7 \\ &\iff C + 2 = 0,7 \\ &\iff C = -1,3 \end{aligned}$$

La fonction f donnant l'évolution du taux de chlore dans la piscine d'Alain est donc : $f : x \longmapsto -1,3e^{-0,08x} + 2$.

Exercice 31.

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.
Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}.$$

Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n):
    u = ...
    for i in range(n) :
        ...
    return u
```

2. L'exécution de `suite(2)` renvoie 1.3333333333333333.
   Effectuer un calcul pour vérifier et expliquer cet affichage.
3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.000000000005457
```

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{5 - x}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.$$

3. **a.** Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
Prouver l'équivalence suivante :

$$f(x) = x \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$$

b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.

4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
Déterminer sa limite.

5. Le comportement de la suite serait-il identique en choisissant comme terme initial $u_0 = 4$ au lieu de $u_0 = 3$?

Corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{4}{5 - u_n}$.

Partie A

1. On complète la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n):
    u = 3
    for i in range(n) :
        u = 4/(5 - u)
    return u
```

2. À la première boucle on trouve $u_1 = \dfrac{4}{5-3} = \dfrac{4}{2} = 2$.
À la seconde on trouve $u_2 = \dfrac{4}{5-2} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}333$.

3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.000000000005457
```

Les affichages successifs sont des approximations de u_2, u_5, u_{10}, u_{20} et leur examen laisse à conjecturer que la la limite de la suite est égale à 1.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$ par : $f(x) = \dfrac{4}{5-x}$.
Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. La fonction f quotient de fonctions dérivables sur $]-\infty\,;\,5[$, de dénominateur non nul puisque $x \neq 5$, est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = \dfrac{0-4\times(-1)}{(5-x)^2} = \dfrac{4}{(5-x)^2}$

Quotient de deux carrés cette dérivée est strictement positive, donc la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,5[$.

2. Soit la propriété : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.

Initialisation : on a vu que $u_1 = 2$ et on a $u_0 = 3$, donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 4$.

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$: ces nombres étant rangés dans l'ordre croissant leur images par f fonction strictement croissante pour des réels plus petits que 4, sont rangées dans le même ordre, soit $f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(4)$.

Comme $f(1) = \dfrac{4}{5-1} = 1$ et $f(4) = \dfrac{4}{5-4} = 4$, on obtient $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.

3. **a.** Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.

On a pour $x < 5$:

$f(x) = x \iff \dfrac{4}{5-x} = x \iff 4 = x(5-x) \iff 4 = 5x - x^2 \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$

b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$, revient d'après la question précédente à résoudre l'équation du second degré $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Les racines de cette équation 1 et 4 sont évidentes (sinon on calcule le discriminant), donc :

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \iff (x-1)(x-4) = 0 \iff \left[\begin{array}{rcl} x-1 & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ x-4 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ & \text{ou} & \\ x & = & 4 \end{array}\right.$$

La solution 4 est vraisemblable puisque $x \leqslant 4$, on a donc $S = \{1\,;\,4\}$.

4. L'encadrement démontré par récurrence montre deux choses : pour tout $n \in \mathbb{N}$

- $u_{n+1} \leqslant u_n$ signifie que la suite (u_n) est décroissante;
- $1 \leqslant u_n$ signifie que la suite (u_n) est minorée par 1.

La suite (u_n) décroissante et minorée par 1 est donc convergente vers un réel $\ell \geqslant 1$.

Par continuité de la fonction trinôme la limite ℓ est solution de l'équation précédente et cette solution est 1 ou 4, mais on a vu que $u_0 = 3$ et la suite étant décroissante la solution 4 est à rejeter..

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

La suite (u_n) converge vers 1.

5. Avec $u_0 = 4$, on a $u_1 = \dfrac{4}{5-4} = \dfrac{4}{1} = 4$ et donc en répétant le calcul $u_n = 4$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Dans ce cas la suite est constante : tous ses termes sont égaux à 4, elle converge vers 4.

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Montrer que pour tout nombre réel x, on a :
   $$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :
   $$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$
3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) &= u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire la convergence de la suite (u_n).
4. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.
5. a. Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leqslant h$, où h est un nombre réel strictement positif.

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
    n = 0
    u =7
    while ... :
        n = n+1
        u = ...
    return n
```

b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit seuil(0.01) dans la console Python. Justifier la réponse.

Partie C : calcul intégral

1. Étudier le signe de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Interpréter graphiquement l'intégrale :

$$I = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2\,;\,4]$, on a l'encadrement :

$$0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25.$$

En déduire l'encadrement :

$$1 \leqslant I \leqslant 2.$$

Corrigé

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$,
où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. **a.** En posant $u(x) = x^2+1$ et avec $u'(x) = 2x$, on obtient :
$\left[\ln(u)\right]' = \dfrac{u'}{u}$ donc $\left[\ln(x^2+1)\right]' = \dfrac{2x}{x^2+1}$, et donc :
pour tout nombre réel x, $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

b. Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+1 \geqslant 1$ donc $x^2+1 > 0$.
Comme $(x-1)^2 \geqslant 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a par quotient $f'(x) \geqslant 0$: la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout nombre réel $x > 0$n on a :
$f(x) = x - \ln\left[x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right] = x - \ln(x^2) - \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

3. On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x^2} = 1$, puis par composition
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = \ln 1 = 0$.
- $x - 2\ln(x) = x\left(1 - 2\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.
On sait (puissances comparées) que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, donc
$\lim\limits_{x\to+\infty} x - 2\ln(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Soit la propriété « $u_n \geqslant 0$ ».

Initialisation On a $u_0 = 7 \geqslant 0$: la propriété est vraie au rang 0 ;

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_n \geqslant 0$: la fonction f étant croissante on a donc $u_n \geqslant 0 \Rightarrow f(u_n) \geqslant f(0)$; or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(0) = 0$, donc $u_{n+1} \geqslant 0$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $u_n \geqslant 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

2. De la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right)$ on déduit :

$u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2+1\right)$.

$u_n^2 \geqslant 0 \Rightarrow u_n^2 + 1 \geqslant 1 \Rightarrow \ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant \ln(1)0$ par croissance de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}^*$.

$\ln(1) = 0$ donc $\ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant 0$ et donc $-\ln\left(u_n^2+1\right) \leqslant 0$.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \iff u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par zéro ; d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.

4. La fonction f est continue car dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc la relation de récurrence donne par limite en plus l'infini :

$\ell = \ell - \ln\left(\ell^2+1\right) \iff \ln\left(\ell^2+1\right) = 0 \iff \ell^2+1 = 1 \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0$

5. **a.** On complète le script ci-dessous écrit en langage Python : afin qu'il

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
    n = 0
    u = 7
    while u > h :
        n = n + 1
        u = u – ln(u**2+1)
    return n
```

b. La calculatrice donne $u_{96} \approx 0{,}010\,03$ et $u_{97} \approx 0{,}009\,9$

Le programme Python renverra la valeur 97 ; à partir du 98e les termes seront inférieurs à un centième.

Partie C : calcul intégral

1. f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, donc, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0)$.

Or $f(0) = 0$ donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Soit l'intégrale : $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

f étant positive sur $\mathbb{R}^+$ l'est sur l'intervalle $[2;4]$, donc I est égale (en unités d'aire) à l'aire de la surface limitée par la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x=2$ et $x=4$.

3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2\,;\,4]$, on a l'encadrement : $0,5x-1 \leqslant f(x) \leqslant 0,25x+0,25$.

Sur l'intervalle $[2\,;\,4]$, l'intégration conserve l'ordre donc :

$$\begin{aligned}
0,5x-1 \leqslant f(x) \leqslant 0,25x+0,25 &\Longrightarrow \int_2^4 (0,5x-1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 (0,25x+0,25)\,\mathrm{d}x \\
&\Longrightarrow \left[\frac{x^2}{4}-x\right]_2^4 \leqslant I \leqslant \left[\frac{x^2}{8}+0,25x\right]_2^4 \\
&\Longrightarrow 4-4-(1-2) \leqslant I \leqslant 2+1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) \\
&\Longrightarrow 1 \leqslant I \leqslant 2
\end{aligned}$$

Exercice 33.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}$.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Affirmation 1 :
L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe C_f.

Affirmation 2 :
La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' + y = 5\mathrm{e}^{-x}$.

2. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n), telles que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1 .

Affirmation 3 :
La suite (v_n) converge vers un nombre réel ℓ appartenant à l'intervalle $[-1;1]$.

On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.

Affirmation 4 :
Pour tout entier naturel n, on a alors : $\quad u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

Corrigé

1. On sait que $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$: géométriquement l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la représentation graphique de f au voisinage de plus l'infini. L'affirmation 1 est vraie.
   On a $f'(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x} = e^{-x}(5-5x) = 5e^{-x}(1-x)$.
   $f'(x) + f(x) = 5e^{-x}(1-x) + 5xe^{-x} = 5e^{-x}$, donc f vérifie l'équation différentielle (E) : l'affirmation 2 est vraie.
2. La suite (v_n) est minorée et majorée mais on ne sait rien de sa monotonie, rien sur sa convergence : l'affirmation 3 est fausse.
   Exemple : $u_n = -1 - \dfrac{1}{n}$, $v_n = (-1)^n$ et $w_n = 1 + \dfrac{1}{n}$: on ne peut rien dire de la suite (v_n).
   Si (u_n) est croissante et (w_n) décroissante, on a donc
   $u_0 \leqslant u_1 \leqslant \ldots u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant w_1 \leqslant w_0$: on a bien l'encadrement considéré : l'affirmation 4 est vraie.

Exercice 34.

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
   On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g.
   Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.
   Résoudre, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$
2. Justifier que la suite (u_n) converge.
   On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
3. Déterminer la valeur de ℓ.

Corrigé

Partie A :

1. • Limite en 0 :
   $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et, d'après la propriété des croissances comparées : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$
   Par limite de la somme, on a donc : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 - x\ln(x) = 0$
   • Limite en $+\infty$:
   $f(x) = x^2 - x\ln(x) = x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$
   Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc, par limite de la somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 1$
   De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc, par limite du produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$
2. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f'(x) = 2x - 1 \times \ln(x) - x \times \dfrac{1}{x} = 2x - 1 - \ln(x)$.
3. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f''(x) = 2 - 0 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-1}{x}$.
4. Déterminons le signe de $2x - 1$:
   $2x - 1 > 0 \iff 2x > 1$
   $\iff x > \dfrac{1}{2}$
   L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)
   $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \times \dfrac{1}{2} - 1 - \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - 1 + \ln(2) = \ln(2)$
   On a donc :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $2x-1$	‖	$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$	‖	$+$	
signe de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f'	‖	↘	$\ln(2)$	↗	

5. Le minimum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$ est donc $\ln(2)$ qui est strictement positif, donc, sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)>0$ et donc, la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B :

1. Pour tout réel x strictement positif, on a : $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

Déterminons le signe de $x-1$:

$x-1>0 \iff x>1$

L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)

$g(1)=1-\ln(1)=1-0=1$

On a donc :

x	0		1		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$	‖	$+$	
signe de $g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de g	‖	↘	1	↗	

2. $f(x)=x \iff x=x^2-x\ln(x)$

$\iff 0=x^2-x-x\ln(x)$

$\iff 0=x(x-1-\ln(x))$

$\iff 0=x-1-\ln(x)$ car $x>0$ donc $x\neq 0$

$\iff 1=x-\ln(x)$

$\iff 1=g(x)$

$\iff x=1$

L'équation $f(x)=x$ admet une unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$, cette solution est $x=1$.

Partie C :

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad \dfrac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

Initialisation : Calculons u_1. $u_1=f(u_0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\ln(2)}{2}\approx 0,597$.

On constate que l'inégalité est vraie pour $n=0$, on a bien : $\quad \dfrac{1}{2}\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Montrons que l'inégalité est vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 \implies f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$$

car f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

$$\implies f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$$

car f est la fonction de récurrence de la suite (u_n)

$$\implies \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$$

car $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}60 > \frac{1}{2}$

Ceci montre que les inégalités sont vraies au rang $n+1$.

Conclusion : Les inégalités sont vraies au rang 0, et si elle sont vraies au rang n naturel, elles sont vraies au rang suivant $n+1$, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$

2. On a notamment :

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$. La suite (u_n) est donc bornée par $\frac{1}{2}$ et 1.

La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est convergente, vers une limite ℓ vérifiant $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $]0\,;\,+\infty[$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

D'après la question **2.** de la **Partie B**, cette équation n'a qu'une solution dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$: 1.

La suite (u_n) converge donc vers $\ell = 1$.

Exercice 35.

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.
Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. **Affirmation 1** : Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
2. On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n,on a $u_n \leqslant \dfrac{-9^n+3^n}{7^n}$.
   Affirmation 2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. On considère la fonction suivante écrite en langage Python :

```
def terme(N) :
    U =1
    for i in range(N) :
        U=U+i
    return U
```

   Affirmation 3 : terme(4) renvoie la valeur 7.
4. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :
   - Prix A : il reçoit 1 000 euros par jour pendant 15 jours ;
   - Prix B : il reçoit 1 euro le 1er jour, 2 euros le 2e jour, 4 euros le 3e jour et pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.

   Affirmation 4 : La valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par
$$v_n = \int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x.$$
   Affirmation 5 : La suite (v_n) est croissante.

Corrigé

1. **Affirmation 1 : FAUSSE.**
   La propriété du cours indique que toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 0$.
   Il suffit donc d'exhiber un contre-exemple.
   La suite constante égale à 1 est décroissante (mais pas strictement décroissante) et minorée par 0 (entre autres), et pourtant, elle converge vers 1, et pas vers 0.
   Si on préfère donner un contre exemple avec une suite strictement décroissante, on peut par exemple choisir la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ et de terme général : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, par exemple. Cette suite est assez clairement décroissante, minorée par 0 et converge vers 1.

2. **Affirmation 2 : VRAIE.**

En effet, pour n entier naturel : $v_n = \dfrac{-9^n+3^n}{7^n} = -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n \times \dfrac{1-\left(\dfrac{3}{9}\right)^n}{1} = -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n \times \left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$

Comme on a : $\dfrac{9}{7} > 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{9}{7}\right)^n = +\infty$.

Par ailleurs : $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, donc on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, donc, par limite de la somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1$.

Finalement, par limite du produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n \times \left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right) = -\infty$.

Si on a, pour tout n naturel, $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors, par comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3. **Affirmation 3 : VRAIE.**

L'appel `terme(4)` commence par initialiser la variable `U` avec la valeur 1 (ligne 2 de la fonction).

Puis, la boucle `for` va s'exécuter `N` fois, ici donc 4 fois, avec le compteur `i` qui va prendre les valeurs entières entre 0 et `N-1`, donc ici 0, 1, 2 et 3.

- La première exécution « modifie » `U` en `U + 0`, la valeur reste égale à 1 ;
- La deuxième exécution modifie `U` en `U + 1`, la valeur devient égale à $1+1=2$;
- La troisième exécution modifie `U` en `U + 2`, la valeur devient égale à $2+2=4$;
- La dernière exécution modifie `U` en `U + 3`, la valeur devient égale à $4+3=7$.

On a donc bien la valeur 7 renvoyée par cet appel.

4. **Affirmation 4 : FAUSSE.**

Pour connaître le montant total du prix A, il suffit de multipler 1000 par 15. Le montant total est donc de 15 000 €.

Pour le prix B, il s'agit d'additionner les 15 premier termes d'une suite géométrique de premier terme 1 (le montant du prix le premier jours) et de raison 2 (car le montant chaque jour est le double du montant de la veille).

On applique la formule connue : $1 \times \dfrac{1-2^{15}}{1-2} = \dfrac{1-2^{15}}{-1} = 2^{15}-1 = 32\,767$.

Comme $32\,767 > 15\,000$, le prix B est (nettement) plus avantageux.

Remarque : En cas d'oubli de cette formule, on peut aussi (patiemment) calculer la somme des 15 termes, voire même remarquer que la somme reçue au quinzième jour sera de $2^{15-1} = 16\,384$, donc rien que la somme reçue le quinzième jour du prix B est strictement supérieure aux quinze jours cumulés pour le prix A.

5. **Affirmation 5 : VRAIE.**

Soit n un entier naturel non nul quelconque :

- La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$, et $\ln(1) = 0$, donc on en déduit que la fonction ln est à valeurs positives sur $[1\ ;\ +\infty[$ (voire à valeurs strictement positives sur $]1\ ;\ +\infty[$).
- $v_{n+1} - v_n = \displaystyle\int_1^{n+1} \ln x\,\mathrm{d}x - \int_1^n \ln x\,\mathrm{d}x$
  $= \displaystyle\int_n^{n+1} \ln x\,\mathrm{d}x$ par la relation de Chasles

— l'expression $v_{n+1} - v_n$ est donc l'intégrale, entre deux bornes ordonnées dans l'ordre croissant (car $n < n+1$) d'une fonction à valeurs positives sur l'intervalle d'intégration (car $[n\,;\,n+1] \subset [1\,;\,+\infty[$, puisque $n \geqslant 1$) : cette expression est donc positive.

Pour un n quelconque supérieur à 1, la différence entre les termes v_{n+1} et v_n est positive, donc la suite (v_n) est bien croissante.

Exercice 36.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est juste ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 2y = -6x + 1$.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 6x + 1$ est une solution de l'équation différentielle (E).

Affirmation 2 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

La suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

Affirmation 3 : On considère la suite (u_n) définie dans l'affirmation 2.
L'instruction `suite(50)` ci-dessous, écrite en langage Python, renvoie u_{50}.

```
1  def suite(k):
2    S=0
3    for i in range(k):
4      S=S+(3/4)**k
5    return S
```

Affirmation 4 : Soit a un réel et f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = a\ln(x) - 2x.$$

Soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.
II existe une valeur de a pour laquelle la tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Corrigé

Affirmation 1 : Fausse. En effet :
Dérivons la fonction f (qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que somme d'une fonction polynôme, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et d'une fonction composée d'une fonction linéaire suivie de la fonction exponentielle, toutes deux définies et dérivables sur $\mathbb{R}$).
$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x} - 6.$
Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) - 2f(x) = \left(2\,\mathrm{e}^{2x} - 6\right) - 2\left(\mathrm{e}^{2x} - 6x + 1\right)$

$$= 2\,\mathrm{e}^{2x} - 6 - 2\,\mathrm{e}^{2x} + 12x - 2 \quad \text{en distribuant le } -2$$
$$= 12x - 8$$

Ainsi, on a $f'-2f$ qui est la fonction $x \longmapsto 12x-8$, qui est différente de la fonction $x \longmapsto -6x+1$, donc f n'est pas une solution de l'équation différentielle (E).

Affirmation 2 : Fausse En effet :
En posant la suite (v_n), suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = \dfrac{3}{4}$, on a donc :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 1 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$
Et donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.
En utilisant la formule connue pour déterminer la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{3}{4}} = \frac{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}}{\dfrac{1}{4}} = 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right).$$

Comme on a : $0 < \dfrac{3}{4} < 1$, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$.

Puis, par limite de la somme, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1} = 1$.

Et, enfin, par limite du produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 4\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}\right) = 4$.
La limite de la suite est donc finie (et vaut 4).

Affirmation 3 : Fausse. En effet :
La fonction `suite()` part d'une variable `S` qui prend une valeur égale à 0, puis effectue une boucle `for`, qui va ajouter à ce 0 des puissances de $\dfrac{3}{4}$ (l'instruction `a**b` signifie a^b).
Il y a ici deux problèmes dans cette fonction pour que `suite(50)` renvoie la valeur u_{50}.

- La première erreur, est qu'au lieu d'ajouter des puissances successives de $\dfrac{3}{4}$, on ajoute toujours la même puissance de $\dfrac{3}{4}$. L'appel `suite(50)` ajoute $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{50}$ à chaque exécution de la boucle `for`, au lieu d'ajouter $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{0}$, puis $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{1}$, puis $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2}$ et ainsi de suite jusqu'à $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{50}$.
- La seconde erreur est que le nombre u_{50} est la somme des 51 premières puissances de $\dfrac{3}{4}$ (de la puissance 0 à la puissance 50), et la boucle `for` ici s'exécutera 50 fois seulement, et pas 51 fois.

Pour que l'appel `suite(50)` renvoie u_{50}, il faudrait une fonction comme celle-ci :

```
1  def suite(k):
2    S=0
3    for i in range(k+1):
4      S=S+(3/4)**i
5    return S
```

La ligne 3 modifiée permet d'exécuter la boucle `for` 51 fois (la variable `i` commencera à la valeur 0, puis augmentera d'unité en unité jusqu'à atteindre la valeur strictement inférieure à `k+1`, donc d'atteindre la valeur `k`).
La ligne 4 modifiée fait qu'à chaque exécution de la boucle for, on va ajouter une puissance différente de la raison, avec un exposant de plus en plus élevé.

Remarques : l'instruction `range(k+1)` a exactement le même effet que `range(0,k+1)`.
On peut aussi trouver d'autres fonctions, avec un code différent qui auront le même effet. Il n'est pas nécessaire pour répondre à la question de donner une fonction correcte : pointer l'une des deux erreurs commises suffit à montrer que l'appel `suite(50)` ne produit pas l'effet escompté.

Affirmation 4 : Vraie. En effet :
Quel que soit le réel a, la fonction f est définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, en tant que somme d'une fonction linéaire et du produit de la fonction ln par un réel, toutes fonctions définies et dérivables sur l'intervalle considéré.
Soit a un réel :
On a : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad f'(x) = a \times \dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{a}{x} - 2.$
Notamment, pour $x = 1$ $\quad f'(1) = \dfrac{a}{1} - 2 = a - 2.$
La tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $f'(1) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a = 2$.
Il existe donc une (unique) valeur de a telle que la tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 37.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}.$$

3. En déduire que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, par
$u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. On considère le script Python ci-dessous :

```
1  from math import *
2  def seuil(n):
3      u=5
4      i=0
5      ℓ =(1 + sqrt(5))/2
6      while abs(u-ℓ)>=10**(-n):
7          u=sqrt(u+1)
8          i=i+1
9      return(i)
```

On rappelle que la commande **abs(x)** *renvoie la valeur absolue de x.*

a. Donner la valeur renvoyée par `seuil (2)`.

b. La valeur renvoyée par `seuil (4)` est 9.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

Partie A

1. f est de la forme $\sqrt{u}$ avec, pour tout x réel positif : $u(x) = x+1$ et $u'(x) = 1$.

Donc $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

La fonction racine carrée étant à valeurs positives, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$ donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$f(x) - x = \sqrt{x+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x+1}-x\right)\times\left(\sqrt{x+1}+x\right)}{\sqrt{x+1}+x} = \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x+1}+x} = \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}.$$

3.
$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x} = 0 \\ &\iff -x^2+x+1 = 0 \end{aligned}$$

Car sur $[0\,;\,+\infty[$, le dénominateur $\sqrt{x+1}+x$ est strictement positif, en tant que somme d'une expression strictement positive $(\sqrt{x+1})$ et d'une autre positive (x), donc ce dénominateur est non nul.

On a un polynome du second degré. Calculons le discriminant.

$\Delta = 1^2 - 4\times(-1)\times 1 = 5$

On a donc deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \geqslant 0$

$x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{-2} < 0$ donc n'est pas solution de l'équation sur $[0\,;\,+\infty[$

L'équation $f(x) = x$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:
$\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Remarque : ce nombre est connu sous l'appellation « nombre d'or ».

Partie B

1. — *Initialisation :* pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$.
$u_0 \in [0\,;\,+\infty[$, donc $f(u_0)$ est définie et $u_1 = f(u_0) = f(5) = \sqrt{5+1} = \sqrt{6} \approx 2,45$.
L'inéquation $\quad 1 \leqslant u_{0+1} \leqslant u_0 \quad$ est bien vérifiée.
— *Hérédité :* Pour un naturel n, on suppose que l'inégalité est vraie au rang n, c'est-à-dire : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
En appliquant la fonction f aux trois membres de cette inégalité, la croissance de f sur $[0\,;\,+\infty[$ donne :
$f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \implies \sqrt{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$
$\implies 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}, \quad car\ \sqrt{2} \approx 1,4 \geqslant 1$
Cette conclusion est l'inégalité, au rang suivant.
— *Conclusion :* l'inégalité est vraie au rang 0, et sa véracité est héréditaire, pour tout entier naturel, donc, en vertu du principe de récurrence, pour tout entier naturel n, l'inégalité est vraie, soit : $\quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. La question précédente donne :
— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n \quad$ la suite est donc décroissante ;
— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \quad$ la suite est donc minorée, par 1 ;
La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est donc convergente, vers une limite qui doit être supérieure ou égale à 1 (et inférieure ou égale à u_0 car la suite est décroissante).

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $[0\,;\,+\infty[$, intervalle qui contient la limite de la suite.
D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
D'après la question **3.** de la **Partie A**, cette équation n'a qu'une solution dans $[0\,;\,+\infty[$: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
On constate également que cette valeur satisfait les critères supplémentaires que l'on connaît pour cette limite (supérieure à 1 et inférieure à u_0).
La suite (u_n) converge donc vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. La fonction `seuil` présentée initialise la variable `u` à 5, c'est-à-dire u_0 et la variable `i` à 0, c'est-à-dire l'indice de u_0.
Tant que la valeur absolue de la différence entre ℓ et u est supérieure ou égale à 10^{-n}, on remplace dans la variable `u` le terme de la suite par le terme suivant, et dans la variable `i` l'indice par l'indice suivant.
La boucle s'arrête donc dès que `u` contient un terme de la suite dont la distance à ℓ est strictement inférieure à 10^{-n} et renvoie l'indice de ce terme (qui est donc une valeur approchée à 10^{-n} près de la limite).

a. `seuil(2)` va donc renvoyer l'indice du premier terme qui est à moins d'un centième de la limite ℓ.

Par exploration à la calculatrice, on a $u_4 - \ell \approx 0,02 \geqslant 10^{-2}$ et

$u_5 - \ell \approx 0,007 < 10^{-2}$ donc la fonction renverra l'indice du premier terme pour lequel le test du `while` n'est pas satisfait : 5.

b. Si `seuil(4)` renvoie 9, c'est que le premier terme de la suite qui est une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près sera u_9.

Remarque : comme la suite (u_n) converge vers ℓ en décroissant, tous les ter-mes de la suite sont des valeurs approchées de ℓ par excès, l'utilisation de la fonction `abs` dans la fonction Python n'était indispensable pour cette fonction de récurrence.

Exercice 38.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$.

1. **a.** Résoudre sur l'intervalle $[0\,;1]$ l'équation $f(x) = x$.

b. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$,

$$f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

c. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.$$

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.

4. **a.** Justifier que pour tout entier naturel n, $\ln(2) - u_n$ est positif.

b. On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.

Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.1
    while ln (2) − u ... 0.0001 :
        n=n+1
        u= ...
    return (u, n)
```

c. Donner la valeur de la variable n renvoyée par la fonction seuil ().

Corrigé

1. **a.** Résolvons, dans $[0\,;\,1]$, l'équation demandée :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 2x\mathrm{e}^{-x} = x \\ &\iff 2x\mathrm{e}^{-x} - x = 0 \\ &\iff x(2\mathrm{e}^{-x} - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{-x} = 1 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{2} \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln(2) \end{aligned}$$

Or, 0 et $\ln(2)$ sont deux réels dans $[0\,;\,1]$ (en effet, la stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}^{*+}$ donne : $1 < 2 < \mathrm{e} \implies 0 < \ln(2) < 1$).

L'équation a donc deux solutions dans $[0\,;\,1]$: 0 et $\ln(2)$.

b. f est dérivable sur $[0\,;\,1]$, en tant que composée et produit de fonctions qui pourraient être définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in [0;1], \quad f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x} + (2x) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x} = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

On arrive donc à l'expression demandée.

c. On sait que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$. On a : $f(0) = 2 \times 0\mathrm{e}^{-0} = 0$ et $f(1) = 2 \times 1\mathrm{e}^{-1} = 2\mathrm{e}^{-1}$.

On peut donc établir le tableau de variations de la fonction :

x	0		1
signe de 2		+	
signe de $(1-x)$		+	0
signe de e^{-x}		+	
signe de $f'(x)$		+	0
variations de f	0	↗	$2\mathrm{e}^{-1}$

2. **a.** *Initialisation :* Calculons u_1. $u_1 = f(u_0) = f(0,1) = 2 \times 0,1\mathrm{e}^{-0,1} \approx 0,18$.

On constate que l'inégalité est vraie pour $n = 0$, on a bien : $0 \leqslant u_0 < u_1 \leqslant 1$.

Hérédité : Pour un entier naturel k donné, on suppose que l'inégalité $0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 1$ est vraie.

Montrons que l'inégalité sera vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence on a :

$$0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 1 \implies f(0) \leqslant f(u_k) < f(u_{k+1}) \leqslant f(1)$$
car f est strictement croissante sur $[0;1]$
$$\implies 0 \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant 2\mathrm{e}^{-1}$$
car f est la fonction de récurrence de la suite (u_n)
$$\implies 0 \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant 1$$
car $2\mathrm{e}^{-1} \approx 0,74 < 1$

Ainsi, la véracité de l'inégalité est héréditaire.

Conclusion : L'inégalité est vraie au rang 0, et sa véracité est héréditaire pour tout entier naturel, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.

b. On a notamment :

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc (strictement) croissante.
— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$. La suite (u_n) est donc bornée par 0 et 1.

La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est donc convergente, vers une limite ℓ vérifiant $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $[0;1]$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

D'après la question **1. a.**, cette équation n'a que deux solutions dans $[0;1]$: 0 et $\ln(2)$, or la suite est (strictement) croissante, donc minorée par son premier terme : $u_0 = 0,1$, donc la limite ne saurait être inférieure à 0,1 : la possibilité d'avoir $\ell = 0$ est donc écartée, et finalement, l'unique valeur possible pour ℓ est donc $\ln(2)$.

La suite (u_n) converge donc vers $\ln(2)$.

4. **a.** La suite (u_n) est croissante et converge vers $\ln(2)$, donc elle est majorée par $ln(2)$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ln(2) \implies \ln(2) - u_n \geqslant 0$.

Pour tout entier naturel n, la différence $\ln(2) - u_n$ est bien positive.

b. Un terme de la suite (u_n) sera donc toujours une valeur approchée par défaut de $\ln(2)$. Si on veut que la valeur approchée soit à 10^{-4} près, cela signifie que la différence entre u_n, la valeur approchée, et $\ln(2)$ doit être inférieure ou égale à 10^{-4}.

On va donc explorer les termes consécutifs de la suite (u_n) tant que

$\ln(2) - u_n > 0,0001$, de sorte que la boucle s'interrompra dès que la différence deviendra inférieure ou égale à $10^{-4} = 0,0001$.

Le script ci-dessous convient (à condition d'avoir importé les fonctions `exp` et `log` qui est la fonction logarithme népérien, de la librairie `math`, au préalable).

On a dans ce corrigé ajouté les deux lignes qui rendent le programme exécutable

```
from math import exp
from math import log as ln
def seuil():
  n=0
  u=0.1
  while ln(2) - u > 0.0001:
    n=n+1
    u=2*u*exp(-u)
  return(u,n)
```

Remarque : on peut aussi importer la constante d'Euler de la librairie maths et utiliser une variante : `from math import e` en lieu et place de la première ligne et `u=2*u*e**(-u)` ou `u=2*u/(e**u)` pour l'avant dernière.

c. $n = 11$

Exercice 39.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

2. Calculer u_1 et u_2.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.
7. En déduire une expression de v_n en fonction de n.
8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.
9. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
def seuil() :
    n=0
    u=0.5
    while u < 0.95 :
        n=...
        u=...
    return n
```

Corrigé

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1. Le trinôme $g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\ ;\ 1]$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = 2 - 2x = 2(1-x)$.
Or on sait que $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow -x \leqslant 0 \leqslant 1-x$ ou en lisant de droite à gauche
$1-x \geqslant 0 \Rightarrow 2(1-x) \geqslant 0 \iff g'(x) \geqslant 0$: la dérivée étant positive sur $[0\ ;\ 1]$ et ne s'annulant qu'en $x = 1$, la fonction g est strictement croissante de $g(0) = 0$ à $g(1) = 2 - 1^2 = 1$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 &= \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} &= g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

2. • $u_1 = 2 \times \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} = 0,75$;

• $u_2 = 2 \times \dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{24}{16} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{15}{16} = 0,9375$.

3. Démonstration par récurrence :

• *Initialisation* :
On a $0 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} < 1$, soit $0 < u_0 < u_1 < 1$: l'encadrement est vrai au rang zéro.

• *Hérédité* : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

Alors par stricte croissance sur $[0\,;\,1]$ de la fonction g, on a :
$g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1)$, soit d'après les résultats précédents :
$0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$: l'encadrement est encore vrai au rang $n+1$.
Conclusion : la relation est vraie au rang $n = 0$ et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est encore au rang $n+1$: par le principe de récurrence, on a donc
Pour tout entier naturel n, $: 0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

4. Le résultat précédent montre que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est majorée par 1 : elle converge donc vers une limite $\ell \leqslant 1$.

5. La relation $g(u_n) = u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$ donne à la limite car g est continue car dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$: $\ell = 2\ell - \ell^2 \iff$
$\ell - \ell^2 = 0 \iff \ell(1-\ell) = 0$ soit
$\begin{cases} \ell &= 0 \text{ ou} \\ 1-\ell &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ell &= 0 \text{ ou} \\ 1 &= \ell \end{cases}$
La solution $\ell = 0$ n'est pas possible (la suite est croissante) ; il reste $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1-u_n)$.

6. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(1-u_{n+1}) = \ln\left[1-\left(2u_n - u_n^2\right)\right] = \ln\left(1-2u_n+u_n^2\right) =$
$\ln(1-u_n)^2 = 2\ln(1-u_n)$ (car $1-u_n > 0$ voir la récurrence ci-dessus, donc $\ln(1-u_n)$ existe).
Or $\ln(1-u_n) = v_n$.
Finalement : $v_{n+1} = 2v_n$ ce qui montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \ln(1-u_0) = \ln\left(1-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

7. On sait qu'alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n$, soit $v_n = -\ln 2 \times 2^n$.

8. La relation $v_n = \ln(1-u_n)$ donne donc :
$-\ln 2 \times 2^n = \ln(1-u_n) \iff \mathrm{e}^{-\ln 2\times 2^n} = \mathrm{e}^{\ln(1-u_n)}$, (par croissance de la fonction exponentielle), soit encore :
$\mathrm{e}^{-\ln 2\times 2^n} = 1-u_n \iff u_n = 1-\mathrm{e}^{-\ln 2\times 2^n}$.
Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln 2 \times 2^n = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\ln 2\times 2^n} = 0$ et par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

9.

```
def seuil() :
    n=0
    u=0.5
    while u < 0.95 :
        n=n + 1
        u=2*u - u**2
    return n
```