Corrigé
Succession d'épreuves et loi binomiale

Modéliser une succession d'épreuves

Exercice 1.

On lance trois fois une pièce truquée pour laquelle $P(\text{Pile}) = 0,6$. Les lancers sont indépendants.

1. Calculer la probabilité d'obtenir « Pile, Face, Pile » dans cet ordre.
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux Pile.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un Face.

1. $0,6 \times 0,4 \times 0,6 = 0,144$.
2. Trois chemins (PPF, PFP, FPP) : $3 \times 0,144 = 0,432$.
3. $1 - 0,6^3 = 0,784$.

Exercice 2.

Un code est formé d'une lettre (parmi 26) suivie d'un chiffre (parmi 10), choisis au hasard et indépendamment. Quelle est la probabilité que le code soit « une voyelle suivie d'un chiffre pair »? (On compte 6 voyelles.)

$\frac{6}{26} \times \frac{5}{10} = \frac{3}{26} \approx 0,115$.

Utiliser les coefficients binomiaux

Exercice 3.

1. Construire le triangle de Pascal jusqu'à $n = 7$.
2. En déduire $\binom{7}{3}$, $\binom{7}{5}$ et $\binom{6}{2} + \binom{6}{3}$.
3. Donner sans calcul $\binom{20}{1}$, $\binom{20}{19}$ et $\binom{20}{20}$.

1. Lignes 6 : 1 6 15 20 15 6 1 ; 7 : 1 7 21 35 35 21 7 1.
2. 35 ; 21 ; $15 + 20 = 35 = \binom{7}{3}$ (relation de Pascal).
3. 20 ; 20 ; 1.

Calculer avec la loi binomiale

Exercice 4.

X suit la loi $\mathscr{B}(8\,;\,0,3)$. Calculer à 10^{-3} près :

1. $P(X=2)$
2. $P(X=0)$
3. $P(X\geqslant 1)$
4. $P(X\leqslant 2)$
5. $P(X>3)$
6. $P(2\leqslant X\leqslant 4)$

Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

1. $0,296$
2. $0,058$
3. $0,942$
4. $0,552$
5. $0,194$
6. $0,687$

$E(X)=2,4$; $\sigma(X)=\sqrt{1,68}\approx 1,296$.

Exercice 5. [Contrôle qualité]

Une machine produit des pièces dont 4 % sont défectueuses. On prélève 50 pièces ; la production est assez grande pour assimiler le prélèvement à des tirages avec remise. On note X le nombre de pièces défectueuses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $P(X=0)$, puis la probabilité d'avoir au plus 3 pièces défectueuses.
3. Calculer $E(X)$ et interpréter.

1. 50 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, succès « défectueuse » de probabilité $0,04$: $\mathscr{B}(50\,;\,0,04)$.
2. $P(X=0)=0,96^{50}\approx 0,130$; $P(X\leqslant 3)\approx 0,861$.
3. $E(X)=2$: en moyenne 2 pièces défectueuses par lot de 50.

Exercice 6.

On lance n fois un dé équilibré. Combien de lancers faut-il au minimum pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 dépasse $0,99$?

$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>0,99 \iff \left(\frac{5}{6}\right)^n<0,01$. À la calculatrice (ou avec le logarithme) : $n\geqslant 26$.

Exercice 7. [Intervalle]

X suit la loi $\mathscr{B}(100\ ;\ 0{,}5)$. Le tableau donne quelques valeurs de $P(X \leqslant k)$ arrondies.

k	38	39	40	59	60	61
$P(X \leqslant k)$	0,0105	0,0176	0,0284	0,9716	0,9824	0,9895

1. Déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.

2. En déduire un intervalle I tel que $P(X \in I) \geqslant 0{,}95$.

3. On lance 100 fois une pièce et on obtient 63 Pile. Que peut-on penser ?

1. $a = 40$ et $b = 60$.

2. $P(40 \leqslant X \leqslant 60) = 0{,}9824 - 0{,}0176 = 0{,}9648 \geqslant 0{,}95$: $I = [40\ ;\ 60]$.

3. $63 \notin I$: on peut douter que la pièce soit équilibrée (avec un risque d'erreur d'environ 5 %).