Corrigé
Continuité

Étudier la continuité d'une fonction

Exercice 1.

1. La fonction partie entière E (qui à x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x) est-elle continue en 2 ? Justifier graphiquement.
2. Justifier que $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1} + \sqrt{x+3}$ est continue sur $[-3\,;\,+\infty[$.

1. Non : pour x juste inférieur à 2, $E(x) = 1$, alors que $E(2) = 2$ (la courbe fait un « saut »).
2. Somme d'un quotient de fonctions continues (dénominateur non nul) et de la composée de $x \mapsto x+3$ (positive sur cet intervalle) par la racine carrée.

Exercice 2.

Déterminer le réel a pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = 2x + a$ si $x < 1$ et $f(x) = x^2 - 3$ si $x \geqslant 1$;
2. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ si $x \neq 2$ et $f(2) = a$.

1. $\lim\limits_{x \to 1^-} (2x + a) = 2 + a$ et $f(1) = -2 : a = -4$.
2. Pour $x \neq 2$, $f(x) = x + 2 \to 4 : a = 4$.

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 3.

Voici le tableau de variations d'une fonction f continue sur $[-2\,;\,5]$.

x	-2		1		5
f	-3	↗	4	↘	1

1. Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ admet-elle sur $[-2\,;\,5]$?
2. Même question pour $f(x) = 3$ et $f(x) = -4$.

1. Sur $[-2\,;\,1]$, f croît strictement de -3 à 4 : une solution. Sur $[1\,;\,5]$, $f \geqslant 1 > 0$: aucune. Total : une solution.
2. $f(x) = 3$: une solution sur $[-2\,;\,1]$ et une sur $[1\,;\,5]$ ($3 \in [1\,;\,4]$) : deux solutions. $f(x) = -4$: aucune (le minimum est -3).

Exercice 4.

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Dresser le tableau de variations de f (limites comprises).
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions.
3. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la plus grande solution.

1. $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$: f croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ (de $-\infty$ à 3), décroissante sur $[-1\,;\,1]$ (de 3 à -1), croissante sur $[1\,;\,+\infty[$ (de -1 à $+\infty$).
2. Sur chacun des trois intervalles, f est continue, strictement monotone et 0 est compris entre les valeurs extrêmes : une solution par intervalle.
3. $1{,}53 < \alpha < 1{,}54$.

Exercice 5.

Montrer que l'équation $e^x = 3 - x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

$g(x) = e^x + x - 3$ est continue et strictement croissante ($g'(x) = e^x + 1 > 0$), $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$: une unique solution $\alpha \approx 0{,}79$.

Approcher une solution par dichotomie

Exercice 6.

On applique la fonction `dichotomie` du cours à $f(x) = x^2 - 2$, avec $a = 1$, $b = 2$ et $e = 0,1$.

1. Faire fonctionner l'algorithme « à la main » en complétant un tableau des valeurs successives de a, b et m.
2. Quel nombre a-t-on encadré? Combien d'étapes faut-il pour obtenir une amplitude inférieure à 10^{-6}?
3. La fonction `dichotomie(f, a, b, e)` du cours renvoie un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à e d'une solution de $f(x) = 0$ sur $[a\,;\,b]$. Compléter son code.

```
def dichotomie(f, a, b, e):
    while b - a > e:
        m = ...
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = ...
        else:
            a = ...
    return a, b
```

1. $m = 1,5$ ($f > 0$) : $[1\,;\,1,5]$; $m = 1,25$ ($f < 0$) : $[1,25\,;\,1,5]$; $m = 1,375$ ($f < 0$) : $[1,375\,;\,1,5]$; $m = 1,4375$ ($f > 0$) : $[1,375\,;\,1,4375]$, amplitude $0,0625 < 0,1$.
2. $\sqrt{2}$. Après n étapes, l'amplitude est $\frac{1}{2^n}$: il faut $2^n > 10^6$, soit $n = 20$.
3. Si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires, la solution est dans $[a\,;\,m]$, sinon dans $[m\,;\,b]$:

```
def dichotomie(f, a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

Avec $f(x) = x^2 - 2$, `dichotomie(f, 1, 2, 0.1)` renvoie `(1.375, 1.4375)`, comme à la question 1.

Exercice 7. [Suite et point fixe]

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2}$. On admet que (u_n) converge vers un réel $\ell > 0$. Déterminer ℓ.

$f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ est continue sur $[0\,;\,+\infty[$, donc $\ell = f(\ell) : \ell^2 + 2\ell = 2\ell + 3$, $\ell^2 = 3$, $\ell = \sqrt{3}$.