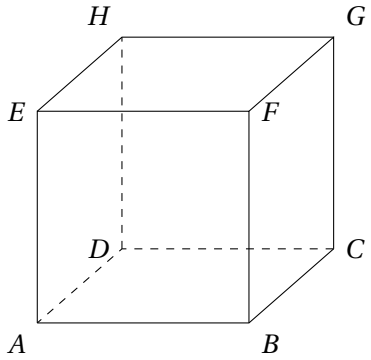
Corrigé
Géométrie vectorielle dans l'espace

Calculer avec des vecteurs de l'espace

Exercice 1.

$ABCDEFGH$ est un cube. Simplifier :



1. $\vec{AB} + \vec{FG}$
2. $\vec{AE} + \vec{DC} + \vec{FG}$
3. $\vec{HG} - \vec{CG} + \vec{BC}$
4. $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$

1. $\vec{FG} = \vec{BC}$: $\vec{AC}$.
2. $\vec{DC} = \vec{AB}$ et $\vec{FG} = \vec{AD}$: $\vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AG}$.
3. $\vec{HG} = \vec{AB}$, $-\vec{CG} = \vec{GC} = \vec{EA}$: $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{EA} = \vec{AC} + \vec{EA} = \vec{EC}$.
4. $\vec{AG}$.

Exercice 2.

$ABCD$ est un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$. Montrer que $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\left(\vec{AD} + \vec{BC}\right)$.

$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AD} + \vec{DJ}$ et $\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BC} + \vec{CJ}$. En additionnant, $2\vec{IJ} = \vec{AD} + \vec{BC}$ car $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ et $\vec{DJ} + \vec{CJ} = \vec{0}$.

Étudier des positions relatives

Exercice 3.

Dans le cube $ABCDEFGH$ de l'exercice 1, donner la position relative :

1. des droites (AB) et (HG) ; des droites (AE) et (BC) ; des droites (AG) et (EC) ;
2. de la droite (EG) et du plan (ABC) ; de la droite (AG) et du plan (EFG) ;
3. des plans (ABF) et (DCG) ; des plans (ABG) et (EFC).

1. Parallèles ; non coplanaires ; sécantes (diagonales du rectangle $AEGC$).
2. (EG) est parallèle à (AC), donc parallèle au plan (ABC) (et disjointe) ; (AG) coupe le plan (EFG) en G.
3. Parallèles (faces opposées) ; sécants (selon une droite passant par le centre du cube, parallèle à (AB)).

Exercice 4. [Théorème du toit]

$SABCD$ est une pyramide de base le parallélogramme $ABCD$. Déterminer l'intersection des plans (SAB) et (SCD).

$(AB) \parallel (CD)$, $(AB) \subset (SAB)$ et $(CD) \subset (SCD)$. Les plans sont sécants en S ; d'après le théorème du toit, leur intersection est la droite passant par S et parallèle à (AB).

Utiliser les coordonnées

Exercice 5.

Dans un repère de l'espace, $A(1\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $B(3\ ;\ -1\ ;\ 4)$, $C(-1\ ;\ 5\ ;\ -4)$ et $D(2\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

1. Calculer les coordonnées de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et du milieu I de $[BC]$.
2. Les points A, B, C sont-ils alignés ?
3. Déterminer les coordonnées du point E tel que $ABED$ soit un parallélogramme.

1. $\vec{AB}(2\ ;\ -3\ ;\ 4)$, $\vec{AC}(-2\ ;\ 3\ ;\ -4)$, $I(1\ ;\ 2\ ;\ 0)$.
2. $\vec{AC} = -\vec{AB}$: oui, alignés (A est d'ailleurs le milieu I de $[BC]$).
3. $\vec{AB} = \vec{DE}$: $E(4\ ;\ -3\ ;\ 5)$.

Exercice 6.

On donne $\vec{u}(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$, $\vec{v}(3\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $\vec{w}(-1\ ;\ -2\ ;\ 3)$.

1. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Déterminer, s'ils existent, des réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Conclure.

1. $\frac{3}{1} \neq \frac{0}{-1}$: coordonnées non proportionnelles.
2. $a+3b=-1$, $-a=-2$, $2a+b=3$: $a=2$, $b=-1$, et la première équation donne $2-3=-1$: vérifiée. $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}$: les vecteurs sont coplanaires.

Exercice 7.

$A(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$, $B(2\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et $D(3\ ;\ 3\ ;\ -1)$. Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ?

$\vec{AB}(1\ ;\ 1\ ;\ -2)$, $\vec{AC}(-1\ ;\ 1\ ;\ -1)$, $\vec{AD}(2\ ;\ 3\ ;\ -3)$. $a\vec{AB}+b\vec{AC}=\vec{AD}$: $a-b=2$, $a+b=3$ donc $a=2{,}5$, $b=0{,}5$; troisième : $-5-0{,}5=-5{,}5\neq -3$. Les points ne sont pas coplanaires.