Corrigé
Calcul intégral

Calculer une intégrale

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^2 \left(x^2 - 2x + 3\right) \mathrm{d}x$

2. $I_2 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$

4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \mathrm{d}x$

5. $I_5 = \displaystyle\int_{-1}^1 (2x+1)^3 \mathrm{d}x$

6. $I_6 = \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

1. $\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 + 6 = \frac{14}{3}$

2. $[\ln x]_1^{\mathrm{e}} = 1$

3. $\mathrm{e}^{\ln 2} - 1 = 1$

4. $\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

5. $\left[\frac{(2x+1)^4}{8}\right]_{-1}^1 = \frac{81-1}{8} = 10$

6. $\left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = 2$

Exercice 2. [Valeur moyenne]

1. Calculer la valeur moyenne de $f(x) = 3x^2$ sur $[0\,;\,2]$.

2. Calculer la valeur moyenne de $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0\,;\,1]$.

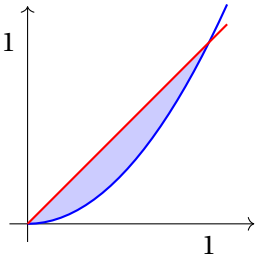
1. $\mu = \frac{1}{2}\left[x^3\right]_0^2 = 4$.

2. $\mu = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,63$.

Calculer une aire

Exercice 3.

On considère $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$.



1. Étudier la position relative des courbes sur $[0\,;\,1]$.
2. Calculer l'aire du domaine compris entre les deux courbes sur $[0\,;\,1]$.
3. Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de $h(x) = x^2 - 4$ et l'axe des abscisses.

1. $g(x) - f(x) = x(1-x) \geqslant 0$: $\mathscr{C}_g$ au-dessus.
2. $\int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ u.a.
3. $h \leqslant 0$ sur $[-2\,;\,2]$: $-\int_{-2}^{2}(x^2-4)\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{16}{3} - 16\right) = \frac{32}{3}$ u.a.

Intégrer par parties

Exercice 4.

À l'aide d'une intégration par parties, calculer : $A = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$ (avec $v'(x) = 1$) ;
$B = \displaystyle\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$A = \left[x\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1$.
B : $u = x+1$, $v = -\mathrm{e}^{-x}$: $B = [-(x+1)\mathrm{e}^{-x}]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left(1 - \frac{2}{\mathrm{e}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 2 - \frac{3}{\mathrm{e}}$.

Étudier une suite d'intégrales

Exercice 5.

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0.
2. Montrer que $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. En déduire I_1.
3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
4. Montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de (I_n).

1. $I_0 = \big[\ln(1+x)\big]_0^1 = \ln 2$.
2. $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$. $I_1 = 1 - \ln 2$.
3. Sur $[0\,;\,1]$, $x^{n+1} \leqslant x^n$ donc $\frac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant \frac{x^n}{1+x}$ et $I_{n+1} \leqslant I_n$ (ordre).
4. $0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$ sur $[0\,;\,1]$; on intègre. Par encadrement, $\lim I_n = 0$.

Exercice 6. [Méthode des rectangles]

On utilise la fonction `rectangles` du cours avec $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $a = 0$, $b = 1$ et $n = 100$. On obtient environ $0,7500$.

1. Pourquoi ne peut-on pas calculer exactement $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ avec une primitive usuelle ?
2. f étant décroissante sur $[0\,;\,1]$, la valeur obtenue est-elle une valeur approchée par excès ou par défaut ?
3. La fonction `rectangles(f, a, b, n)` du cours calcule la somme des aires de n rectangles de même largeur, de hauteur la valeur de f à gauche de chaque intervalle. Compléter son code.

```
def rectangles(f, a, b, n):
    h = ...
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + ...
    return s
```

1. f n'a pas de primitive exprimable avec les fonctions usuelles.
2. Les rectangles utilisent la valeur à gauche, la plus grande : approximation par excès (valeur exacte $\approx 0,7468$).

3. La largeur des rectangles est $h = \dfrac{b-a}{n}$ et le k-ième rectangle a pour hauteur $f(a+kh)$:

```
def rectangles(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + h * f(a + k * h)
    return s
```