Concentration et loi des grands nombres

Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 1.

Une variable aléatoire X a pour espérance 20 et pour variance 4.

1. Majorer $P\big(|X-20| \geqslant 5\big)$.
2. Minorer $P(16 < X < 24)$.

Exercice 2.

Une usine produit des pièces dont 40 % ont une finition « premium ». On prélève 200 pièces (tirages assimilés à des tirages avec remise) et on note X le nombre de pièces premium.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer $P(60 < X < 100)$.
3. La calculatrice donne $P(60 < X < 100) \approx 0,995$. Commenter.

Utiliser l'inégalité de concentration

Exercice 3.

On lance n fois un dé équilibré et on note M_n la fréquence d'apparition du 6.

1. Justifier que $E(M_n) = \frac{1}{6}$ et $V(M_n) = \dfrac{5}{36n}$.
2. Déterminer une valeur de n à partir de laquelle $P\left(\left|M_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant 0,05$.

Exercice 4.

Un sondage porte sur $n = 1\,000$ personnes ; M_n est la proportion de réponses « oui » dans l'échantillon et p la proportion inconnue dans la population. On admet que $V \leqslant 0,25$.

1. Montrer que $P\big(|M_n - p| \geqslant \delta\big) \leqslant \dfrac{0,25}{1\,000\,\delta^2}$.
2. Déterminer δ pour que ce majorant vaille 0,05. Interpréter.

Interpréter la loi des grands nombres

Exercice 5.

Vrai ou faux ? Justifier.

1. Après 10 Pile consécutifs avec une pièce équilibrée, Face a plus de chances de sortir au lancer suivant.
2. Sur un très grand nombre de lancers d'une pièce équilibrée, la fréquence de Pile est très probablement proche de $0,5$.
3. Si un jeu a une espérance de gain négative, un joueur qui joue un très grand nombre de parties perd très probablement de l'argent.

Corrigé

