# Corrigé
# Concentration et loi des grands nombres

## Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

**Exercice 1.**

Une variable aléatoire $X$ a pour espérance 20 et pour variance 4.

1. Majorer $P\big(|X-20| \geqslant 5\big)$.
2. Minorer $P(16 < X < 24)$.

1. $P\big(|X-20| \geqslant 5\big) \leqslant \frac{4}{25} = 0,16$.
2. $P(16 < X < 24) = 1 - P\big(|X-20| \geqslant 4\big) \geqslant 1 - \frac{4}{16} = 0,75$.

**Exercice 2.**

Une usine produit des pièces dont 40 % ont une finition « premium ». On prélève 200 pièces (tirages assimilés à des tirages avec remise) et on note $X$ le nombre de pièces premium.

1. Donner la loi de $X$, son espérance et sa variance.
2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer $P(60 < X < 100)$.
3. La calculatrice donne $P(60 < X < 100) \approx 0,995$. Commenter.

1. $X \sim \mathscr{B}(200\,;\,0,4)$, $E(X) = 80$, $V(X) = 48$.
2. $P(60 < X < 100) = 1 - P\big(|X-80| \geqslant 20\big) \geqslant 1 - \frac{48}{400} = 0,88$.
3. La minoration est juste mais assez grossière : l'inégalité est valable pour toutes les lois.

## Utiliser l'inégalité de concentration

### Exercice 3.

On lance $n$ fois un dé équilibré et on note $M_n$ la fréquence d'apparition du 6.

1. Justifier que $E(M_n) = \frac{1}{6}$ et $V(M_n) = \dfrac{5}{36n}$.
2. Déterminer une valeur de $n$ à partir de laquelle $P\left(\left|M_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant 0,05$.

1. $M_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ où les $X_i$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$ : $\mu = \frac{1}{6}$, $V = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$.
2. Il suffit que $\frac{5}{36n \times 0,0001} \leqslant 0,05$, soit $n \geqslant \frac{5}{36 \times 0,0001 \times 0,05} \approx 27\,777,8$ : $n \geqslant 27\,778$.

### Exercice 4.

Un sondage porte sur $n = 1\,000$ personnes ; $M_n$ est la proportion de réponses « oui » dans l'échantillon et $p$ la proportion inconnue dans la population. On admet que $V \leqslant 0,25$.

1. Montrer que $P\big(|M_n - p| \geqslant \delta\big) \leqslant \dfrac{0,25}{1\,000\,\delta^2}$.
2. Déterminer $\delta$ pour que ce majorant vaille $0,05$. Interpréter.

1. Inégalité de concentration avec $V \leqslant 0,25$.
2. $\delta^2 = \frac{0,25}{50} = 0,005$, $\delta \approx 0,071$. Avec une probabilité d'au moins $0,95$, la proportion observée est à moins de $7,1$ points de la proportion réelle.

## Interpréter la loi des grands nombres

### Exercice 5.

Vrai ou faux ? Justifier.

1. Après 10 Pile consécutifs avec une pièce équilibrée, Face a plus de chances de sortir au lancer suivant.
2. Sur un très grand nombre de lancers d'une pièce équilibrée, la fréquence de Pile est très probablement proche de $0,5$.
3. Si un jeu a une espérance de gain négative, un joueur qui joue un très grand nombre de parties perd très probablement de l'argent.

1. Faux : les lancers sont indépendants, la probabilité reste $0,5$.
2. Vrai : loi des grands nombres.
3. Vrai : le gain moyen par partie se concentre autour de l'espérance, négative.