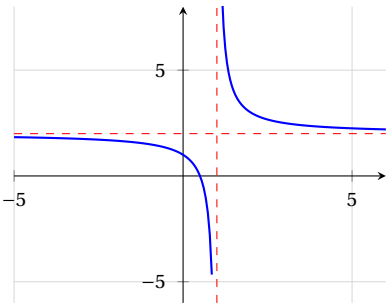
Corrigé
Limites de fonctions

Lire et interpréter des limites

Exercice 1.

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

1. Conjecturer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, en 1^- et en 1^+.
2. En déduire les équations des asymptotes à la courbe.



1. $\lim\limits_{-\infty} f = 2$; $\lim\limits_{+\infty} f = 2$; $\lim\limits_{1^-} f = -\infty$; $\lim\limits_{1^+} f = +\infty$.
2. Asymptote horizontale $y = 2$ en $\pm\infty$; asymptote verticale $x = 1$.

Exercice 2.

Dresser l'allure d'une courbe de fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ vérifiant : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ et f croissante.

Courbe croissante, qui « descend » vers $-\infty$ le long de l'axe des ordonnées (asymptote $x = 0$) et se rapproche par en dessous de la droite $y = 3$.

Calculer des limites par opérations

Exercice 3.

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 + 3x - 1\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2x^3 - x + 4\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3 - \dfrac{2}{x} + e^{-x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(2 - \dfrac{1}{x}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2}$
6. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x}{x-2}$

1. $+\infty$

2. $-\infty$

3. 3

4. $+\infty$

5. $+\infty$

6. $3x \to 6 > 0$, $x-2 \to 0^-$: $-\infty$

Exercice 4.

Lever l'indétermination et calculer les limites.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3-4x^2\right)$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-3}{x^2+x+1}$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+5}{x^2+1}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{3x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

1. $x^3\left(1-\frac{4}{x}\right) \to +\infty$.

2. $\dfrac{2-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \to 2$.

3. $\dfrac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1+\frac{5}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \to 0$.

4. $\dfrac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{3-\frac{2}{x}} \to +\infty$.

5. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \to 0$.

6. $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 \to 2$.

Exercice 5.

Déterminer les limites à l'aide d'une composée.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{4x+1}{x}}$

3. $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}$

1. $1-x \to -\infty : 0$. 2. $\frac{4x+1}{x} \to 4 : \sqrt{4} = 2$. 3. $\frac{1}{x} \to +\infty : +\infty$.

Utiliser la comparaison et les croissances comparées

Exercice 6.

1. Montrer que pour tout x, $x-1 \leqslant x+\cos x$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\cos x)$.
2. Encadrer $\dfrac{2+\sin x}{x}$ pour $x>0$ et en déduire sa limite en $+\infty$.

1. $\cos x \geqslant -1$; $x-1 \to +\infty$ donc $x+\cos x \to +\infty$.
2. $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{2+\sin x}{x} \leqslant \dfrac{3}{x}$; gendarmes : limite 0.

Exercice 7.

Déterminer les limites.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x-x^5\right)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+x}{e^x+1}$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^x$

1. $+\infty$
2. 0
3. $\dfrac{x}{e^x} \to 0$
4. $x^5\left(\frac{e^x}{x^5}-1\right) \to +\infty$
5. $\dfrac{1+\frac{x}{e^x}}{1+e^{-x}} \to 1$
6. $xe^x+e^x \to 0$

Exercice 8. [Refroidissement]

La température (en °C) d'un café est $T(t)=20+60e^{-0,1t}$, t en minutes.

1. Calculer $T(0)$ et la limite de T en $+\infty$. Interpréter.
2. Montrer que T est décroissante.

1. $T(0)=80$ °C ; $e^{-0,1t} \to 0$ donc $T \to 20$: la température tend vers celle de la pièce.
2. $T'(t)=-6e^{-0,1t}<0$.