Limites de suites

Calculer la limite d'une suite

Exercice 1.

Déterminer la limite de chaque suite.

1. $u_n = 3n^2 - 5$
2. $u_n = 2 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{1}{n^2}$
3. $u_n = (n+1)\left(3 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
4. $u_n = \dfrac{-2}{n+5}$
5. $u_n = n^2 - 10n$
6. $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2-n}$
7. $u_n = \dfrac{3n+1}{n^2+2}$
8. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

On considère la suite $u_n = n^2 - 10n$ du 5. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > A$. Que renvoie `seuil(1000)` ? Pourquoi cette fonction s'arrête-t-elle quel que soit A ?

```
def seuil(A):
    n = 0
    while ...:
        n = n + 1
    return n
```

Exercice 2.

Déterminer la limite de chaque suite.

1. $u_n = 4 \times 1,05^n$
2. $u_n = 10 - 2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
3. $u_n = \dfrac{3^n - 1}{3^n}$
4. $u_n = \dfrac{2^n + 5^n}{4^n}$
5. $u_n = (-0,9)^n + 1$
6. $u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$

Utiliser les théorèmes de comparaison

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n+\sin n}{n^2} \leqslant \dfrac{n+1}{n^2}$ et minorer cette quantité. En déduire la limite.
2. Montrer que $u_n = n + (-1)^n$ vérifie $u_n \geqslant n-1$. En déduire $\lim u_n$.
3. Déterminer $\lim \dfrac{\cos(n)}{n+1}$.

Exercice 4.

Soit $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ pour $n \geqslant 1$ (où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$).

1. Montrer que $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire la limite de (u_n).

Étudier la convergence d'une suite monotone

Exercice 5.

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 2$.

1. Montrer par récurrence que pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
2. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. On pose $v_n = u_n - 4$. Montrer que (v_n) est géométrique, exprimer u_n en fonction de n et retrouver la limite.

Exercice 6. [Médicament]

Un patient reçoit chaque jour une dose de 10 mL d'un médicament ; l'organisme élimine 20 % de la quantité présente en 24 h. On note q_n la quantité (en mL) juste après la n-ième injection, $q_1 = 10$.

1. Justifier que $q_{n+1} = 0,8q_n + 10$.
2. Montrer que (q_n) est croissante et majorée par 50.
3. En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite. Interpréter.
4. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche le nombre d'injections à partir duquel la quantité de médicament dépasse 49 mL. Quelle valeur est affichée ?

```
q = 10
n = 1
while q <= ...:
    n = n + 1
    q = ...
print(n)
```

Exercice 7. [Algorithme de seuil]

On reprend la suite $u_n = 4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Écrire un programme Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > 3,999$. Quelle valeur obtient-on ?

Corrigé

