Corrigé
Limites de suites

Calculer la limite d'une suite

Exercice 1.

Déterminer la limite de chaque suite.

1. $u_n = 3n^2 - 5$

2. $u_n = 2 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{1}{n^2}$

3. $u_n = (n+1)\left(3 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

4. $u_n = \dfrac{-2}{n+5}$

5. $u_n = n^2 - 10n$

6. $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2-n}$

7. $u_n = \dfrac{3n+1}{n^2+2}$

8. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

On considère la suite $u_n = n^2 - 10n$ du 5. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > A$. Que renvoie `seuil(1000)` ? Pourquoi cette fonction s'arrête-t-elle quel que soit A ?

1. $+\infty$

2. 2

3. $+\infty$

4. 0

5. $n^2\left(1 - \frac{10}{n}\right) \to +\infty$

6. $\frac{1}{2}$

7. 0

8. $\dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \to 0$

On augmente n tant que $u_n \leqslant A$:

```
def seuil(A):
    n = 0
    while n**2 - 10*n <= A:
        n = n + 1
    return n
```

`seuil(1000)` renvoie 38 ($u_{37} = 999$ et $u_{38} = 1\,064$). Comme $\lim u_n = +\infty$, u_n finit par dépasser n'importe quel réel A : la boucle se termine toujours.

Exercice 2.

Déterminer la limite de chaque suite.

1. $u_n = 4 \times 1{,}05^n$
2. $u_n = 10 - 2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
3. $u_n = \dfrac{3^n - 1}{3^n}$
4. $u_n = \dfrac{2^n + 5^n}{4^n}$
5. $u_n = (-0{,}9)^n + 1$
6. $u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$

1. $+\infty$
2. 10
3. $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \to 1$
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{5}{4}\right)^n \to +\infty$
5. 1
6. $\dfrac{1 - (1/3)^{n+1}}{2/3} \to \dfrac{3}{2}$

Utiliser les théorèmes de comparaison

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n + \sin n}{n^2} \leqslant \dfrac{n+1}{n^2}$ et minorer cette quantité. En déduire la limite.
2. Montrer que $u_n = n + (-1)^n$ vérifie $u_n \geqslant n - 1$. En déduire $\lim u_n$.
3. Déterminer $\lim \dfrac{\cos(n)}{n+1}$.

1. $\sin n \leqslant 1$; et $\dfrac{n-1}{n^2} \leqslant \dfrac{n + \sin n}{n^2}$. Les deux bornes tendent vers 0 : limite 0 (gendarmes).
2. $(-1)^n \geqslant -1$; $n - 1 \to +\infty$ donc $u_n \to +\infty$.
3. $-\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{\cos n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$: limite 0.

Exercice 4.

Soit $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ pour $n \geqslant 1$ (où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$).

1. Montrer que $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire la limite de (u_n).

1. $u_n = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{2}{n} \times \cdots \times \dfrac{n}{n}$; chaque facteur à partir du deuxième est inférieur ou égal à 1, donc $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. Gendarmes : $\lim u_n = 0$.

Étudier la convergence d'une suite monotone

Exercice 5.

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 2$.

1. Montrer par récurrence que pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
2. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. On pose $v_n = u_n - 4$. Montrer que (v_n) est géométrique, exprimer u_n en fonction de n et retrouver la limite.

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 2{,}5$: vrai. Si $u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$, alors $\frac{u_k}{2} + 2 \leqslant \frac{u_{k+1}}{2} + 2 \leqslant 4$.
2. Croissante et majorée : elle converge vers ℓ tel que $\ell = \frac{\ell}{2} + 2$, donc $\ell = 4$.
3. $v_{n+1} = \frac{u_n}{2} - 2 = \frac{1}{2} v_n$, $v_0 = -3$: $u_n = 4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 4$.

Exercice 6. [Médicament]

Un patient reçoit chaque jour une dose de 10 mL d'un médicament ; l'organisme élimine 20 % de la quantité présente en 24 h. On note q_n la quantité (en mL) juste après la n-ième injection, $q_1 = 10$.

1. Justifier que $q_{n+1} = 0{,}8 q_n + 10$.
2. Montrer que (q_n) est croissante et majorée par 50.
3. En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite. Interpréter.
4. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche le nombre d'injections à partir duquel la quantité de médicament dépasse 49 mL. Quelle valeur est affichée ?

1. Il reste 80 % de q_n, puis on ajoute 10 mL.
2. Récurrence : $q_1 = 10 \leqslant q_2 = 18 \leqslant 50$; si $q_k \leqslant q_{k+1} \leqslant 50$, alors $0,8q_k + 10 \leqslant 0,8q_{k+1} + 10 \leqslant 50$.
3. Limite $\ell = 0,8\ell + 10$, $\ell = 50$: la quantité se stabilise à 50 mL.
4. On applique la relation de récurrence tant que $q_n \leqslant 49$:

```
q = 10
n = 1
while q <= 49:
    n = n + 1
    q = 0.8 * q + 10
print(n)
```

L'algorithme affiche 18 : la quantité dépasse 49 mL à partir de la 18e injection. Comme (q_n) converge vers $50 > 49$, la boucle se termine.

Exercice 7. [Algorithme de seuil]

On reprend la suite $u_n = 4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Écrire un programme Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > 3,999$. Quelle valeur obtient-on ?

```
def seuil():
    n, u = 0, 1
    while u <= 3.999:
        n = n + 1
        u = u / 2 + 2
    return n
```

On cherche $3 \times 0,5^n < 0,001$: le programme renvoie $n = 12$ ($3/4096 \approx 0,00073$).