Corrigé
Logarithme népérien

Utiliser les propriétés algébriques du logarithme

Exercice 1.

Simplifier les expressions suivantes.

1. $A = \ln 50 - 2\ln 5$

2. $B = \ln\left(e^4\right) - \ln\sqrt{e}$

3. $C = 3\ln 2 + \ln\dfrac{1}{8}$

4. $D = \ln\left(\sqrt{3}+1\right) + \ln\left(\sqrt{3}-1\right)$

1. $A = \ln\frac{50}{25} = \ln 2$

2. $B = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

3. $C = \ln 8 - \ln 8 = 0$

4. $D = \ln(3-1) = \ln 2$

Exercice 2.

Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$: $\ln 12$; $\ln\dfrac{9}{16}$; $\ln 0,75$; $\ln\sqrt{18}$.

$\ln 12 = 2\ln 2 + \ln 3$; $\ln\frac{9}{16} = 2\ln 3 - 4\ln 2$; $\ln 0,75 = \ln\frac{3}{4} = \ln 3 - 2\ln 2$; $\ln\sqrt{18} = \frac{1}{2}(\ln 2 + 2\ln 3) = \frac{1}{2}\ln 2 + \ln 3$.

Résoudre des équations et des inéquations

Exercice 3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, après avoir précisé l'ensemble de résolution.

1. $e^{3x-1} = 4$

2. $\ln(2x+1) = 3$

3. $\ln x + \ln(x-1) = \ln 6$

4. $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

1. $3x - 1 = \ln 4$: $x = \frac{1+\ln 4}{3}$.

2. Sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$: $2x+1 = e^3$, $x = \frac{e^3-1}{2}$.

3. Sur $]1\,;\,+\infty[$: $x(x-1) = 6$, $x^2 - x - 6 = 0$, $x = 3$ ou $x = -2$ (exclu). $\mathscr{S} = \{3\}$.

4. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $X = \ln x$: $X^2 - X - 2 = 0$, $X = 2$ ou $X = -1$. $\mathscr{S} = \left\{e^{-1}\,;\,e^2\right\}$.

Exercice 4.

Résoudre : 1. $\ln(3-x) \geqslant 0$; 2. $e^x > 3$; 3. $\ln(x+2) < \ln(2x-1)$.

1. Sur $]-\infty\,;\,3[$: $3-x \geqslant 1$, $x \leqslant 2$. $\mathscr{S} =]-\infty\,;\,2]$.
2. $x > \ln 3$.
3. Sur $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$: $x+2 < 2x-1$, $x > 3$. $\mathscr{S} =]3\,;\,+\infty[$.

Exercice 5. [Seuil]

Un capital placé à 3 % par an (intérêts composés) est multiplié par 1,03 chaque année.

1. Déterminer par le calcul au bout de combien d'années le capital aura doublé.
2. Compléter la fonction Python pour qu'elle renvoie ce nombre d'années.

```
def doublement():
    n = 0
    c = 1
    while ..... :
        c = .....
        n = n + 1
    return n
```

1. $1,03^n \geqslant 2 \iff n \geqslant \frac{\ln 2}{\ln 1,03} \approx 23,4$: 24 ans.
2. `while c < 2:` et `c = 1.03 * c`.

Étudier une fonction faisant intervenir le logarithme

Exercice 6.

Calculer les dérivées : $f(x) = \ln(3x+2)$ sur $\left]-\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$; $g(x) = x\ln x$; $h(x) = \ln(e^x+1)$; $k(x) = (\ln x)^2$.

$f'(x) = \frac{3}{3x+2}$; $g'(x) = \ln x + 1$; $h'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$; $k'(x) = \frac{2\ln x}{x}$.

Exercice 7.

Soit $f(x) = x - \ln x$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$ (on pourra écrire $f(x) = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$).
2. Étudier les variations de f.
3. En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$.

1. En 0 : $-\ln x \to +\infty$, donc $f \to +\infty$. En $+\infty$: $\frac{\ln x}{x} \to 0$, donc $f \to +\infty$.
2. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$: décroissante sur $]0\,;\,1]$, croissante sur $[1\,;\,+\infty[$, minimum $f(1) = 1$.
3. $f(x) \geqslant 1$ donne $x - \ln x \geqslant 1$, soit $\ln x \leqslant x - 1$.

Exercice 8.

Soit $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que $g'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ et dresser le tableau de variations de g.
3. Combien de solutions l'équation $g(x) = 0{,}2$ admet-elle ?

1. En 0 : $\ln x \to -\infty$ et $\frac{1}{x} \to +\infty$: $g \to -\infty$. En $+\infty$: 0 (croissance comparée).
2. $g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2}$. Croissante sur $]0\,;\,\mathrm{e}]$, décroissante sur $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$, maximum $g(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}37$.
3. $0 < 0{,}2 < \frac{1}{\mathrm{e}}$: une solution sur $]1\,;\,\mathrm{e}[$ et une sur $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$ (corollaire du TVI), soit deux solutions.