Orthogonalité et distances dans l'espace

Calculer un produit scalaire dans l'espace

Exercice 1.

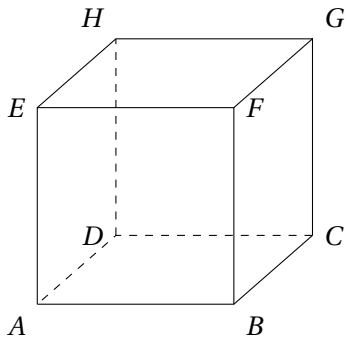
Dans un repère orthonormé, on donne $\vec{u}(2\,;\,-1\,;\,3)$, $\vec{v}(1\,;\,4\,;\,1)$ et $\vec{w}(-1\,;\,2\,;\,2)$.

1. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{w}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{w}\|$.
2. Quels vecteurs sont orthogonaux ?
3. Calculer une mesure de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{w}$ au degré près.

Exercice 2.

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a. Calculer, en utilisant des projections ou des décompositions :

1. $\vec{AB}\cdot\vec{AG}$;
2. $\vec{AE}\cdot\vec{BG}$;
3. $\vec{EG}\cdot\vec{BD}$;
4. $\vec{AF}\cdot\vec{AH}$, puis l'angle $\widehat{FAH}$.



Démontrer une orthogonalité

Exercice 3.

Dans un repère orthonormé, $A(1\,;\,0\,;\,2)$, $B(3\,;\,1\,;\,0)$, $C(2\,;\,0\,;\,3)$ et $D(2\,;\,-4\,;\,1)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Montrer que $\vec{n}(1\,;\,-4\,;\,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
3. En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC), puis calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ (rappel : $V = \frac{1}{3}\times$ aire de base $\times$ hauteur).

Exercice 4.

Déterminer un vecteur normal au plan dirigé par $\vec{u}(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $\vec{v}(3\,;\,0\,;\,1)$.

Exercice 5. [Cube]

On reprend le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 de l'exercice 2 et le repère $(A\,;\,\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$.

1. Donner les coordonnées de tous les sommets.
2. Montrer que $\vec{CE}$ est normal au plan (BDG).
3. Les droites (AH) et (BG) sont-elles orthogonales ? sécantes ?

Déterminer un projeté orthogonal et une distance

Exercice 6.

Dans un repère orthonormé, d est la droite passant par $A(1\ ;\ 2\ ;\ 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$. Soit $M(3\ ;\ 1\ ;\ 4)$.

1. Un point H de d s'écrit $H(1+t\ ;\ 2\ ;\ t)$. Déterminer t pour que $\vec{MH}\cdot\vec{u}=0$.
2. En déduire le projeté orthogonal de M sur d et la distance de M à d.

Exercice 7.

On reprend le cube de l'exercice 5. Soit $K\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

1. Montrer que $\vec{BK}=\frac{1}{3}\vec{BD}+\frac{1}{3}\vec{BG}$. Que peut-on en déduire pour K ?
2. Montrer que $\vec{EK}$ est colinéaire à $\vec{CE}$.
3. En déduire que K est le projeté orthogonal de E sur le plan (BDG) et la distance de E à ce plan.

Corrigé

